Exercice principal S51

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x-y)^2 \, \mathrm{e}^{2x-y}$.

2.a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que : $\forall A \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

b) Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

3. Soit (α, β) un couple de réels différent de $(0,0)$ et g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles vérifiant : $\forall A \in \mathbb{R}^2$, $\alpha\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(A) + \beta\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(A) = 0$.

Pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $h(u,v) = g(\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$.

a) Montrer que $h(u+\varepsilon, v) = h(u,v) + o(\varepsilon)$ (quand ε tend vers 0).

b) En déduire l'existence d'une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = \varphi(v)$.

4. Montrer que f est la seule fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(0,t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Exercice sans préparation S51

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(XY > 0)$.
2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice principal S. S1

Q1 Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (on suppose que Ω n'est pas vide). A est un point de Ω.

f admet un développement limité d'ordre 1 en A ou au voisinage de A... si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

- Il existe une fonction polynôme de 2 variables P, de degré au plus 1 telle que :

$$f(A+H) \underset{H \mapsto 0_{\mathbb{R}^2}}{=} P(H) + o(\|H\|). \quad (1)$$

- Il existe une fonction polynôme de 2 variables P, de degré au plus 1 telle que :

$$f(X) \underset{X \mapsto A}{=} P(X-A) + o(\|X-A\|) \quad (2)$$

<u>Remarque</u>.- Si f admet un développement limité d'ordre 1 en A ou au voisinage de A le polynôme P vérifiant (1) (resp. (2)) est unique. Il s'appelle la partie régulière du développement limité d'ordre 1 de f à A ou au voisinage de A

(1) (resp. (2)) est le développement limité d'ordre 1 de f à A ou au voisinage de A

On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

1) f admet un développement limité d'ordre 1 à tout point de Ω.

2) A est un élément de Ω. Le développement limité de f en A est :

$$f(A+H) \underset{H \mapsto 0_{\mathbb{R}^2}}{=} f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + o(\|H\|) \text{ ou}$$

$$f(X) \underset{X \mapsto A}{=} f(A) + \langle \nabla f(A), X-A \rangle + o(\|X-A\|)$$

Q2 a) $(x,y) \mapsto 2x-y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme et $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $(x,y) \mapsto e^{2x-y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$(x,y) \mapsto (2x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme.

Alors par produit <u>f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.</u>

Soit $A=(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2 \times 2 \times (2a-b) e^{2a-b} + (2a-b)^2 2 e^{2a-b}$.

<u>$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 2(2a-b)(2+2a-b) e^{2a-b}$.</u>

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2\times(-1)(2a-b)e^{2a-b} + (2a-b)^2(-1)e^{2a-b}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b} + 2\left(-(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b}\right) = 0.$$

$$\forall A\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0.$$

b) Soit $A=(a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

A point critique de f

$\Updownarrow$

$\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Updownarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$

$\Updownarrow \leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ d'après a)

$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$

$\Updownarrow$

$2(2a-b)(2+2a-b)e^{2a-b} = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2a-b=0 \\ \text{ou} \\ 2+2a-b=0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} b=2a \\ \text{ou} \\ b=2a+2 \end{cases}$

Ainsi 1) f admet une infinité de points critiques

2) L'ensemble des points critiques de f est $\{(a,2a);\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,2a+2);\ a\in\mathbb{R}\}$.

Remarques.- 1.- $\mathbb{R}^2$ étant un ouvert et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est trop...) si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f.

Ainsi, si f admet un extremum local en $A=(a,b)$: $b=2a$ ou $b=2a+2$.

2.- Notons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit A un point critique de f.
Pour conclure à l'existence ou la non existence d'un extremum local en A pour f on aurait pu commencer par calculer $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(A)$. Malheureusement cette quantité est nulle !! Facile à noter en dérivant par rapport aux 2 variables le résultat de Q2a)

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(t)=t^2e^t$. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\hat{\varphi}(2x-y)$.

Étudions $\hat{\varphi}$. $\hat{\varphi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $\hat{\varphi}'(t)=2te^t+t^2e^t=t(t+2)e^t$.

$\hat{\varphi}'(-2)=\hat{\varphi}'(0)=0$; $\forall t\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, $\hat{\varphi}'(t)>0$ et $\forall t\in]-2,0[$, $\hat{\varphi}'(t)<0$.

Alors $\hat{\varphi}$ est strictement croissante sur $]-\infty,-2]$ et sur $[0,+\infty[$ et $\hat{\varphi}$ est strictement décroissante sur $[-2,0]$. Notons que $\lim\limits_{t\to-\infty}\hat{\varphi}(t)=0$, $\hat{\varphi}(-2)=4e^{-2}$, $\hat{\varphi}(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\hat{\varphi}(t)=+\infty$

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\hat{\varphi}'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\hat{\varphi}(t)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Alors $\hat{\varphi}$ admet un minimum global atteint en un seul point 0 et qui vaut 0.
$\hat{\varphi}$ admet un maximum local et un seul qui vaut $4e^{-2}$ atteint en -2.
Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\hat{\varphi}(t)>\hat{\varphi}(0)=0$ et $\forall t\in]-\infty,0]$, $\hat{\varphi}(t)\leq\hat{\varphi}(-2)$

Soit $A=(a,b)$ un point critique de f.

<u>1er cas</u>.. $b=2a$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\hat{\varphi}(x-y)\geq 0=f(a,2a)=f(A)$.

Ainsi <u>f admet un minimum global en A qui vaut 0</u>.

<u>2ème cas</u>.. $b=2a+2$.

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|X-A\|\leq\frac{1}{2}$ ... petite boule !!

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leq\frac{1}{2}$. Alors $\sqrt{(x-a)^2}\leq\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leq\frac{1}{2}$ donc $|x-a|\leq\frac{1}{2}$. De même $|y-b|\leq\frac{1}{2}$ ou $|b-y|\leq\frac{1}{2}$

Alors $-\frac{1}{2}\leq x-a\leq\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\leq b-y\leq\frac{1}{2}$

donc $\begin{cases}-1\leq 2x-2a\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq b-y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$. Ainsi $-\frac{3}{2}\leq 2x-y-(2a-b)\leq\frac{3}{2}$. En particulier

$2x-y\leq\frac{3}{2}+2a-b=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}\leq 0$.

Comme $2x-y\leq 0$: $\hat{\varphi}(2x-y)\leq\hat{\varphi}(-2)=\hat{\varphi}(2a-b)$. Donc $f(x,y)\leq f(a,b)$ ou $f(X)\leq f(A)$.

Finalement $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $\|X - A\| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(X) \leq f(A)$.

Alors <u>f admet en A un maximum local.</u>

<u>Remarque</u>.- Ce maximum n'est pas global car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 e^{2x}) = +\infty$.

<u>Soit $A = (a,b)$ un point critique de f. $b = 2a$ ou $b = 2a + 2$.</u>

<u>Si $b = 2a$ f admet en A un minimum global qui vaut 0.</u>

<u>Si $b = 2a+2$ f admet en A un maximum local qui vaut $4e^{-2}$.</u>

→

(Q3) a) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Posons $A = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc g admet un développement limité d'ordre 1 en A.

donné par $g(A+H) \underset{H \mapsto 0_{\mathbb{R}^2}}{=} g(A) + \langle \nabla g(A), H \rangle + o(\|H\|)$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\|(\varepsilon \alpha, \varepsilon \beta)\| = |\varepsilon| \, \|(\alpha,\beta)\|$. donc $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} \|(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)\| = 0$

Alors $g(A + (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)) \underset{\varepsilon \mapsto 0}{=} g(A) + \langle \nabla g(A), (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta) \rangle + o(\|(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)\|)$.

Notons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $A + (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v) + (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $A + (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta) = (\alpha(u+\varepsilon) - \beta v, \beta(u+\varepsilon) + \alpha v)$.

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $g(A + (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)) = g(\alpha(u+\varepsilon) - \beta v, \beta(u+\varepsilon) + \alpha v) = h(u+\varepsilon, v)$.

On a également $g(A) = g(\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v) = h(u,v)$.

$\langle \nabla g(A), (\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta) \rangle = \varepsilon \langle \nabla g(A), (\alpha,\beta) \rangle = \varepsilon\left(\alpha \frac{\partial g}{\partial x}(A) + \beta \frac{\partial g}{\partial y}(A)\right) = \varepsilon \times 0 = 0$.

Finalement $h(u+\varepsilon, v) \underset{\varepsilon \mapsto 0^+}{=} h(u,v) + o(\|(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta)\|)$.

$h(u+\varepsilon, v) \underset{\varepsilon \mapsto 0^+}{=} h(u,v) + o(|\varepsilon| \, \|(\alpha,\beta)\|)$

ou encore $h(u+\varepsilon, v) \underset{\varepsilon \mapsto 0}{=} h(u,v) + o(\varepsilon)$ A méditer

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u+\varepsilon, v) \underset{\varepsilon \mapsto 0}{=} h(u,v) + o(\varepsilon)$

b) Fixons v dans $\mathbb{R}$ et posons $\forall u \in \mathbb{R}$, $\ell_v(u) = h(u,v)$.

D'après ce qui précède : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\ell_v(u+\varepsilon) \underset{\varepsilon \mapsto 0^+}{=} \ell_v(u) + o(\varepsilon)$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{\ell_v(u+\varepsilon) - \ell_v(u)}{\varepsilon} = 0$

donc pour tout u dans $\mathbb{R}$, ℓ_v est dérivable en u et de dérivée nulle en u.

Ainsi ℓ_v est constante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists ! \, c_v \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\ell_v(u) = c_v$. Posons $\forall v \in \mathbb{R}$, $\varphi(v) = c_v$.

1) φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = h_v(u) = C_v = \varphi(v)$. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = \varphi(v)$.

Notons que $\forall v \in \mathbb{R}$, $\varphi(v) = h(0,v) = g(-\beta v, \alpha v)$.

$v \mapsto -\beta v$ et $v \mapsto \alpha v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $h(u,v) = \varphi(v)$.

Q4 ⊛ Notons que f a "les bonnes qualités".

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ d'après Q2 a).
- $\forall A \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$ toujours d'après Q2 a).
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(0,t) = (2\times 0 - t)^2 e^{2\times 0 - t} = (-t)^2 e^{-t} = t^2 e^{-t}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(0,t) = t^2 e^{-t}$.

⊛ Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial \psi}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial \psi}{\partial x}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, \psi(0,t) = t^2 e^{-t}. \end{cases}$

Montrons que $\psi = f$.

Q3 permet de dire qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(u - 2v, 2u + v) = \varphi(v)$ (prendre $\alpha = 1, \beta = 2, g = \psi \dots$)

Soit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} u - 2v = x \\ 2u + v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{5}(x + 2y) \\ v = \frac{1}{5}(y - 2x) \end{cases}.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = \frac{1}{5}(x+2y)$ et $v = \frac{1}{5}(y - 2x)$. Alors $\begin{cases} u - 2v = x \\ 2u + v = y \end{cases}$

$\psi(x,y) = \psi(u - 2v, 2u + v) = \varphi(v) = \varphi\left(\frac{1}{5}(y - 2x)\right)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x,y) = \varphi\left(\frac{1}{5}(y-2x)\right)$ En particulier $\psi(0,t) = \varphi\left(\frac{1}{5} t\right)$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi(0,t) = t^2 e^{-t}$. Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi\left(\frac{1}{5}t\right) = \psi(0,t) = t^2 e^{-t}$.

Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x,y) = \varphi\left(\frac{1}{5}(y-2x)\right) = (y-2x)^2 e^{-(y-2x)} = (2x-y)^2 e^{2x-y}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x,y) = f(x,y)$. $\psi = f$. Finalement :

f est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, f(0,t) = t^2 e^{-t} \end{cases}$