Exercice principal S54

1. Question de cours : Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ est muni du produit scalaire usuel, noté $\langle\,,\rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2.a) Montrer que la matrice M n'est pas inversible.

b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est symétrique.

3.a) Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, on a : $\langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.

b) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.

c) En déduire que M n'est pas diagonalisable.

4.a) Montrer que le noyau de φ et l'image de φ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^5$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ, alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par l'endomorphisme φ.

c) Établir l'existence de deux réels non nuls α et β, et d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, +1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, +1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, +1[$ telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S 60

Q1 E est un espace vectoriel euclidien. $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire sur E.
Un endomorphisme symétrique de E est un endomorphisme f de E tel que
$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
La matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale est symétrique.

Q2 a) Notons C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les colonnes de M... dans l'ordre.

$C_1 + C_3 + C_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. $1 \times C_1 + 1 \times C_3 + 1 \times C_5 = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$ et $(1,1,1) \neq (0,0,0)$.

Ainsi la famille (C_1, C_3, C_5) est liée. Il en est de même de la famille $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$.

Ainsi dim Vect$(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) < 5$. Donc rg $M < 5$. Alors <u>M n'est pas inversible.</u>

b) Notons que M est antisymétrique. ${}^tM = -M$.
Alors ${}^t(M^2) = {}^tM\,{}^tM = (-M)(-M) = M^2$. ${}^t(M^2) = M^2$.
Donc M^2 est une matrice symétrique.
φ^2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$, qui est orthonormale pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$, est symétrique.
Ainsi Q1 nous montre que <u>φ^2 est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^5$.</u>

Q3 a) Rappelons que M est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ qui est orthonormale pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5$. Soit X (resp. Y) la matrice de x (resp. y) dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. MX (resp. MY) est la matrice de $\varphi(x)$ (resp. $\varphi(y)$) dans cette base.
$\langle \varphi(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tM\,Y = {}^tX(-M)Y = -{}^tXMY = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.
Ainsi <u>$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5,\ \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.</u> φ est antisymétrique.

b) Soit λ une valeur propre de φ^2 et x un vecteur propre associé. $x \neq 0_{\mathbb{R}^5}$ et $\varphi^2(x) = \lambda x$.
$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle \varphi^2(x), x \rangle = -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\|\varphi(x)\|^2$.
Alors $\lambda = -\dfrac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2}$ car $\|x\|^2 \neq 0$ puisque $x \neq 0_{\mathbb{R}^5}$. Ainsi $\lambda = -\left(\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\right)^2 \leq 0$

Les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.

c) Soit λ une valeur propre réelle de M. $\exists X \in M_{5,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$ et $MX = \lambda X$.

Alors $M^2 X = \lambda^2 X$ et $X \neq 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi λ est une valeur propre de M^2 donc de φ^2.

Alors $\lambda^2 \leq 0$. Donc $\lambda = 0$.

La seule valeur propre possible de M dans $\mathbb{R}$ est 0. Or M n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de M.

Ainsi $Sp_{\mathbb{R}} M = \{0\}$. Supposons M diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Alors $M_{5,1}(\mathbb{R}) = SEP(M, 0)$. Donc $\forall X \in M_{5,1}(\mathbb{R})$, $MX = 0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}$. Alors $M = 0_{M_5(\mathbb{R})}$!!

Ainsi M n'est pas diagonalisable dans $M_5(\mathbb{R})$.

Q4 a) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4), \varphi(e_5))$.

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(e_2, -e_1+e_3, -e_2+e_4, -e_3+e_5, -e_4) = \mathrm{Vect}(e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$.

$(e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,\varphi$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha e_2 + \beta e_4 + \gamma(-e_1+e_3) + \delta(-e_3+e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$.

Ainsi $-\gamma e_1 + \alpha e_2 + (\gamma - \delta) e_3 + \beta e_4 + \delta e_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$.

La liberté de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ donne : $-\gamma = \alpha = \gamma - \delta = \beta = \delta = 0$. Alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Ceci achève de montrer que $\tilde{\mathcal{B}}_2 = (e_2, e_4, -e_1+e_3, -e_3+e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

$\varphi(e_1) + \varphi(e_3) + \varphi(e_5) = e_2 + (-e_2+e_4) + (-e_4) = 0_{\mathbb{R}^5}$; $\varphi(e_1+e_3+e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$.

Ainsi $e_1+e_3+e_5$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^5 - \dim \mathrm{Im}\,\varphi = 5 - 4 = 1$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est une droite vectorielle.

Alors $\tilde{\mathcal{B}}_1 = (e_1+e_3+e_5)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\langle e_2, e_1+e_3+e_5 \rangle = 0$; $\langle e_4, e_1+e_3+e_5 \rangle = 0$; $\langle -e_1+e_3, e_1+e_3+e_5 \rangle = -1+1 = 0$,

$\langle -e_3+e_5, e_1+e_3+e_5 \rangle = -1+1 = 0$.

Ainsi les éléments de $\tilde{\mathcal{B}}_2$ sont orthogonaux à l'élément de $\tilde{\mathcal{B}}_1$.

Alors $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont orthogonaux. En particulier $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$.

de plus $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^5$ d'après le théorème du rang.

Ainsi <u>$\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$, supplémentaires et orthogonaux.</u>

b) Soit λ une valeur propre non nulle de φ^2. Soit x un vecteur propre de φ^2 associé à λ.

Supposons $(x, \varphi(x))$ liée. Comme x n'est pas nul : $\exists \gamma \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \gamma x$.

Alors $\lambda x = \varphi^2(x) = \gamma^2 x$; $(\lambda - \gamma^2)x = 0_{\mathbb{R}^5}$ et $x \neq 0_{\mathbb{R}^5}$. Ainsi $\lambda - \gamma^2 = 0$.

Alors $\lambda = \gamma^2$ et $\gamma^2 \geqslant 0$. Donc $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda > 0$.

ceci est impossible car les valeurs propres de φ^2 sont des réels négatifs ou nuls.

Finalement $(x, \varphi(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

Posons $F = \operatorname{Vect}(x, \varphi(x))$. F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

$$\varphi(F) = \varphi(\operatorname{Vect}(x,\varphi(x))) = \operatorname{Vect}(\varphi(x), \varphi^2(x)) = \operatorname{Vect}(\varphi(x), \lambda^2 x) \overset{\lambda^2 \neq 0}{=} \operatorname{Vect}(\varphi(x), x) = \operatorname{Vect}(x, \varphi(x)) = F.$$

ceci suffit largement pour dire que F est stable par φ.

<u>Si λ est une valeur propre non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par φ.</u>

c) cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de M^2 puis de φ^2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

$$M^2 X = \lambda X \iff \begin{cases} -x + z = \lambda x \\ -2y + t = \lambda y \\ x - 2z + w = \lambda z \\ y - 2t = \lambda t \\ z - w = \lambda w \end{cases} \iff \begin{cases} z = (\lambda+1)x \\ t = (\lambda+1)y \\ y = (\lambda+2)t \\ z = (\lambda+1)w \\ x - (2+\lambda)z + w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = (\lambda+1)x = (\lambda+1)w \\ t = (\lambda+2)y \\ y = (\lambda+2)^2 y \\ x - (2+\lambda)z + w = 0 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> – $\lambda + 1 \neq 0$ et $(\lambda+2)^2 \neq 1$ ce qui signifie $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq -3$

$$M^2 X = \lambda X \iff \begin{cases} x = w \\ y = 0 \\ t = 0 \\ z = (\lambda+1)x \\ 0 = x - (2+\lambda)z + w = x\left(1 - (2+\lambda)(\lambda+1) + 1\right) = -\lambda(\lambda+3)x \end{cases} \overset{\lambda \neq -3}{\iff} \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \\ w = x \\ z = (\lambda+1)x \\ -\lambda x = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda \neq 0$.

$$M^2X=\lambda X \iff \begin{cases} y=0 \\ t=0 \\ w=x \\ z=(\lambda+1)x \\ x=0 \end{cases} \iff x=y=z=t=w=0 \iff X=0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi λ n'est pas valeur propre de M^2.

b) $\lambda=0$

$$M^2X=\lambda X \iff \begin{cases} y=0 \\ t=0 \\ w=x \\ z=x \end{cases}.$$ 0 est valeur propre de M^2 et $SEP(M^2,0)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

2ème cas. $\lambda=-1$.

$$M^2X=\lambda X \iff \begin{cases} z=0 \\ t=y \\ x-z+w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ t=y \\ w=-x \end{cases}$$

$$\{X\in M_{5,1}(\mathbb{R}) \mid M^2X=-X\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\\y\\-x\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}\}$$

Alors -1 est valeur propre et $SEP(M^2,-1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Remarque. On a clairement $\dim SEP(M^2,-1)=2$ car $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre. Nous le retrouverons plus bas.

3ème cas. $\lambda=-3$

$$M^2X=\lambda X \iff M^2X=-3X \iff \begin{cases} z=-2x=-2w \\ t=-y \\ y=(-1)^2y \\ x+z+w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} w=x \\ z=-2x \\ t=-y \\ 0=x-2x+x \end{cases} \iff \begin{cases} z=-2x \\ w=x \\ t=-y \end{cases},$$

$$\{X\in M_{5,1}(\mathbb{R}) \mid M^2X=-3X\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-2x\\-y\\x\end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)\neq\{0_{M_{5,1}(\mathbb{R})}\}.$$

Ainsi -3 est valeur propre de M^2 et $SEP(M^2,-3)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$

Remarque. $\dim SEP(M^2,-3)=2$ car la famille

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $M_{5,1}(\mathbb{R})$. Nous le retrouverons plus bas.

Exercice. Trouver une matrice orthogonale P de $M_5(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPM^2P=\text{Diag}(0,-1,-1,-3,-3)$

▼ <u>Remarques</u>.. 1) $Sp\,M^2 = \{0,-1,-3\}$, M^2 est diagonalisable, $\dim SEP(M^2;0) = 1$,
$1 \le \dim SEP(M^2;-1) \le 2$, $1 \le \dim SEP(M^2;-3) \le 2$.

Alors $\dim SEP(M^2;-1) = \dim SEP(M^2;-3) = 2$ ... ce qui était attendu.

2) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(M^2;0)$. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $SEP(M^2;-1)$ et

$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $SEP(M^2;-3)$.

Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $SEP(M^2;0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de

$SEP(M^2;-1)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée de $SEP(M^2;-3)$.

3) $Sp\,\varphi^2 = Sp\,M^2 = \{0,-1,-3\}$.

4) $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt3}(e_1+e_3+e_5)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2,0)$.

$\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt2}(e_1-e_5), \frac{1}{\sqrt2}(e_2+e_4)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2;-1)$.

$\mathcal{B}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt2}(e_2-e_4), \frac{1}{\sqrt6}(e_1-2e_3+e_5)\right)$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2;-3)$.

$SEP(\varphi^2,0)$, $SEP(\varphi^2;-1)$ et $SEP(\varphi^2;-3)$ sont deux à deux orthogonaux (φ^2 est symétrique)

et $\mathbb{R}^5 = SEP(\varphi^2,0) \oplus SEP(\varphi^2;-1) \oplus SEP(\varphi^2;-3)$ (φ^2 est diagonalisable).

Alors "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$" est une base orthonormée de $\mathbb{R}^5$ constituée de vecteurs propres de φ^2

associés aux valeurs propres $0,-1,-1,-3,-3$.

$M_{\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3}(\varphi^2) = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix}$. La matrice de passage de (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) à la

base $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$ est la matrice orthogonale : $\begin{pmatrix}1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 0 & 0 & 1/\sqrt6\\ 0 & 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0\\ 1/\sqrt3 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt6\\ 0 & 0 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 & 0\\ 1/\sqrt3 & -1/\sqrt2 & 0 & 0 & 1/\sqrt6\end{pmatrix}$. ▼

• Posons $u_1 = \frac{1}{\sqrt3}(e_1+e_3+e_5)$. u_1 appartient à $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (voir p 2).

Mieux $\mathcal{B}_1 = (u_1)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ ($\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 1$).

<u>$\varphi(u_1) = 0_{\mathbb{R}^5}$</u>.

- Posons $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_5)$. u_2 est un vecteur propre de φ^2 associé à la valeur propre -1. Alors $F_2 = \text{Vect}(u_2, \varphi(u_2))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$ stable par φ. [manuelle]

Notons que $\varphi(u_2) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_5)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$. Posons $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4)$; $u_3 \in F_2$

$(u_2, u_3) = \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $SEP(\varphi^2, -1)$ (voir la remarque).

Ainsi $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3)$ est une famille orthonormée du plan vectoriel F_2.

Ainsi $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3)$ est une base orthonormée de F_2 et $F_2 = SEP(\varphi^2, -1)$.

$u_3 = \varphi(u_2)$ et $\varphi(u_3) = \varphi^2(u_2) = -u_2$. $\underline{\underline{\varphi(u_2) = u_3 \text{ et } \varphi(u_3) = -u_2}}$.

- Posons $u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)$. u_4 est un vecteur propre de φ^2 associé à la valeur propre manuelle -3. Alors $F_3 = \text{Vect}(u_4, \varphi(u_4))$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$ stable par φ.

$\varphi(u_4) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + 2e_3 - e_5) = -\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_3 + e_5)$.

Posons $u_5 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_3 + e_5)$. $\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5$.

$F_3 = \text{Vect}(u_4, \varphi(u_4)) = \text{Vect}(u_4, -\sqrt{3}\,u_5) = \text{Vect}(u_4, u_5) = SEP(\varphi^2, -3)$.

Ainsi $\mathcal{B}_3$ est une base orthonormée de F_3 et de $SEP(\varphi^2, -3)$.

$\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5$. $\varphi(u_5) = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(u_4)\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi^2(u_4) \underset{\substack{\uparrow \\ u_4 \in SEP(\varphi^2, -3)}}{=} -\frac{1}{\sqrt{3}}(-3u_4) = \sqrt{3}\,u_4$.

$\underline{\underline{\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5 \text{ et } \varphi(u_5) = \sqrt{3}\,u_4}}$.

Posons $\alpha = -1$ et $\beta = \sqrt{3}$.

1) Comme nous l'avons vu dans la remarque précédente $\widehat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est base orthonormée de $\mathbb{R}^5$ car $\widehat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = {}$"$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$".

2) $\varphi(u_1) = 0_{\mathbb{R}^5}$, $\varphi(u_2) = u_3 = -\alpha\, u_3$, $\varphi(u_3) = -u_2 = \alpha\, u_2$, $\varphi(u_4) = -\sqrt{3}\,u_5 = -\beta\, u_5$ et $\varphi(u_5) = \sqrt{3}\,u_4 = \beta\, u_4$.

Ainsi $\underline{\underline{M_{\widehat{\mathcal{B}}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}}}$.

Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire