Exercice principal S60

1. Question de cours : Définition et propriétés des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Dans cette question, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_3).$$

a) Trouver la matrice de u dans la base canonique et en déduire que u est symétrique.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$, puis montrer que $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im} u$.

c) Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite de l'exercice, $(E, \langle\,,\rangle)$ est un espace euclidien et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\,,\rangle$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, x un vecteur de E et $y = p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F. Montrer que pour tout $z \in F$, on a : $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

4. Soit u un endomorphisme symétrique de $(E, \langle\,,\rangle)$. On note p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires et orthogonaux.

b) Soit $x \in E$. Justifier l'existence d'un vecteur $y_0 \in E$ tel que $u(y_0) = p(x)$ et trouver parmi les vecteurs $y \in E$ vérifiant $u(y) = p(x)$, celui qui a la plus petite norme ; on le note $v(x)$.

c) Montrer que v est linéaire, puis calculer $u \circ v$ et $u \circ v \circ u$.

d) Calculer $p(x)$ et $v(x)$ pour $x = (1, 1, 1)$, lorsque u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de la question 2.

Exercice sans préparation S60

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $]-1, +1[$.

1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.

2. Montrer que toute valeur de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est effectivement possible pour la variance de X.

Exercice principal S 60

Q1 E est un espace vectoriel euclidien. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est son produit scalaire.

- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de E telle que $M_{\mathcal{B}_0}(f)$ est symétrique.
- $f \in \mathcal{L}(E)$. f est symétrique si et seulement si pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E $M_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
- L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- Si f est un automorphisme symétrique de E, f^{-1} est un automorphisme symétrique de E.
- Soit f un endomorphisme symétrique de E
  - → les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
  - → Si $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes alors la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille orthogonale de E.
  - → f est diagonalisable
  - → Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Q2 Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire proposé et $\| \cdot \|$ la norme associée.

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

(*)

a) $u(e_1) = u((1,0,0)) = (1,1,2)$. $u(e_2) = u((0,1,0)) = (1,-1,0)$ et $u(e_3) = u((0,0,1)) = (2,0,2)$.

Ainsi $\underline{\underline{M_{(e_1,e_2,e_3)}(u)}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$. Nous noterons dans la suite de cette question

A cette matrice.

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$. A est symétrique. La matrice de u dans la base orthonormée

(e_1, e_2, e_3) est symétrique. Ainsi $\underline{\underline{u \text{ est symétrique.}}}$

(*) Notons que (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

b) Soit $x = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ un élément de $E=\mathbb{R}^3$.

$x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x)=0_E \iff \begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+y+2z=0\\x-y=0\\2x+2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=x\\z=-x\\0=x+x-2x\end{cases} \iff \begin{cases}y=x\\z=-x\end{cases}$

$\operatorname{Ker} u = \{xe_1+ye_2+ze_3\in E \mid y=x \text{ et } z=-x\} = \{xe_1+xe_2-xe_3 \,;\, x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1+e_2-e_3)$

Comme $e_1+e_2-e_3\neq 0_E$: $e_1+e_2-e_3$ est une base de $\operatorname{Ker} u$. $\dim \operatorname{Ker} u = 1$.

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux éléments de $\operatorname{Im} u$.

$\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = \langle (1,1,2),(1,-1,0)\rangle = 1\times 1+1\times(-1)+2\times 0=0$. De plus $u(e_1)$ et $u(e_2)$ ne sont pas nuls. Alors $(u(e_1),u(e_2))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\operatorname{Im} u$.

donc $(u(e_1),u(e_2))$ est une famille libre et orthogonale de deux éléments de $\operatorname{Im} u$ et $\dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u = 3-1=2$. Alors $(u(e_1),u(e_2))$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im} u$.

c) Soit p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.

$p(u(e_1)) = u(e_1)$ et $p(u(e_2)) = u(e_2)$; $p(e_1+e_2+2e_3) = e_1+e_2+2e_3$ et $p(e_1-e_2)=e_1-e_2$.

donc $\begin{cases} p(e_1)+p(e_2)+2p(e_3) = e_1+e_2+2e_3. \\ p(e_1)-p(e_2)=e_1-e_2 \end{cases}$

$\langle e_1+e_2-e_3, u(e_1)\rangle = \langle e_1+e_2-e_3, e_1+e_2+2e_3\rangle = 1\times 1+1\times 1+(-1)\times 2=0.$

$\langle e_1+e_2-e_3, u(e_2)\rangle = \langle e_1+e_2-e_3, e_1-e_2\rangle = 1\times 1+1\times(-1)+(-1)\times 0=0.$

$e_1+e_2-e_3$ est orthogonal à $u(e_1)$ et $u(e_2)$. Or $\operatorname{Im} u = \mathrm{Vect}(u(e_1),u(e_2))$.

Ainsi $e_1+e_2-e_3 \in (\operatorname{Im}(u))^{\perp}$. Alors $p(e_1)+p(e_2)-p(e_3) = p(e_1+e_2-e_3)=0_E$.

Finalement $\begin{cases} p(e_1)+p(e_2)+2p(e_3) = e_1+e_2+2e_3 & (1)\\ p(e_1)-p(e_2)=e_1-e_2 & (2)\\ p(e_1)+p(e_2)-p(e_3)=0_E & (3)\end{cases}$

(1)-(3) donne $3p(e_3) = e_1+e_2+2e_3$; $p(e_3) = \frac{1}{3}(e_1+e_2+2e_3)$.

$\begin{cases} p(e_1)-p(e_2)=e_1-e_2 & (2)\\ p(e_1)+p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}(e_1+e_2+2e_3) & (4)\end{cases}$

(2)+(4) donne $2p(e_1) = e_1-e_2+\frac{1}{3}(e_1+e_2+2e_3)$; $p(e_1) = \frac{1}{6}(4e_1-2e_2+2e_3) = \frac{1}{3}(2e_1-e_2+e_3)$

(4)-(2) donne $2p(e_2) = \frac{1}{3}(e_1+e_2+2e_3)-e_1+e_2$; donc $p(e_2) = \frac{1}{6}(-2e_1+4e_2+2e_3) = \frac{1}{3}(-e_1+2e_2+e_3)$

Alors la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.. notons que p est la projection sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à $\operatorname{Ker} u$ car $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.

Remarque 2.. notons que cette matrice est symétrique car c'est la matrice dans une base orthonormée d'une projection orthogonale donc d'un endomorphisme symétrique.

(Q3) C'est du cours !

Soit $z \in F$. $\|x-z\|^2 = \|\underbrace{(x-y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{(y-z)}_{\in F}\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$

donc $\forall z \in F-\{y\}$, $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \underset{\neq y}{>} \|x-y\|^2$.

Comme $\|x-z\| \geq 0$ et $\|x-y\| \geq 0$: $\forall z \in F-\{y\}, \|x-z\| > \|x-y\|$.

Notons que si $z=y$: $z \in F$ et $\|x-z\| = \|x-y\|$.

Ainsi pour tout $z \in F$, on a : $\|x-z\| \geq \|x-y\|$, avec égalité si et seulement $z=y$.

(Q4) a) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ et soit $z \in \operatorname{Im} u$. $\exists t \in E$, $z = u(t)$.

$\langle x, z\rangle = \langle x, u(t)\rangle = \langle u(x), t\rangle = \langle 0_E, t\rangle = 0$.

$\forall x \in \operatorname{Ker} u, \forall z \in \operatorname{Im} u$, $\langle x, z\rangle = 0$. $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

En particulier $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.

$\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E < +\infty$ (d'après le théorème du rang

$\uparrow$ c'est un espace vectoriel euclidien

Les trois points précédents montrent que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

b) Soit $x \in E$. $p(x) \in \operatorname{Im} u$ donc il existe un vecteur y_0 de E tel que $u(y_0) = p(x)$.

$\exists! (y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$, $y_0 = y_1 + y_2$. Notons que $y_2 = p(y_0)$.

Alors $p(x) = u(y_0) = u(y_1+y_2) = u(y_1) + u(y_2) = u(y_2)$

$y_2 \in \operatorname{Im} u$ et $u(y_2) = p(x)$.

Soit $y \in E$. $u(y)=p(x) \Leftrightarrow u(y)=u(y_2) \Leftrightarrow u(y-y_2)=0 \Leftrightarrow \exists t \in \ker u,\ y-y_2=t$.

Ainsi $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}=\{y_2+t \,;\, t\in \ker u\}$.

$\forall t\in \ker u$, $\|y_2+t\|^2 = \|y_2\|^2+\|t\|^2$.

| $y_2\in \mathrm{Im}\, u$ et $t\in \ker(u)$ | $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker u$ sont orthogonaux |

$\forall t \in \ker u - \{0_E\}$, $\|y_2+t\|^2 > \|y_2\|^2$; $\forall t \in \ker u - \{0_E\}$, $\|y_2+t\| > \|y_2\|$.

Ainsi y_2 est le vecteur de $\{y_2+t \,;\, t\in \ker u\}$ de plus petite norme.

Alors y_2 est le vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ de plus petite norme.

Donc $p(y_0)$ est le vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ de plus petite norme sachant que y_0 est un élément de E tel que $u(y_0)=p(x)$.

Remarque.. $v(x)$ est l'unique élément de $\mathrm{Im}\, u \cap \{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$ ou de $\mathrm{Im}\, p \cap \{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$

c) • v est une application de E dans E.

• $u(\lambda v(x)+v(y)) = \lambda u(v(x)) + u(v(y)) = \lambda p(x)+p(y) = p(\lambda x+y)$.

Ainsi $\lambda v(x)+v(y) \in \{y\in E \mid u(y)=p(\lambda x+y)\}$.

$\lambda v(x)+v(y)$ vérifie $u(\lambda v(x)+v(y)) = p(\lambda x+y)$.

Ainsi $v(\lambda x+y) = p(\lambda v(x)+v(y))$ d'après ce que nous avons vu dans b)

car $v(x)$ (resp. $v(y)$) est l'image par p d'un élément de E (b) !).

Ainsi $v(x)\in \mathrm{Im}\, p$ et $v(y)\in \mathrm{Im}\, p$. Alors $\lambda v(x)+v(y) \in \mathrm{Im}\, p$.

Donc $v(\lambda x+y) = p(\lambda v(x)+v(y)) = \lambda v(x)+v(y)$.

Finalement $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in E^2$, $v(\lambda x+y) = \lambda v(x)+v(y)$. **$v$ est linéaire.**

Ainsi **v est un endomorphisme de E.**

Soit $x\in E$. $u(v(x)) = p(x)$ car $v(x)$ est un vecteur de $\{y\in E \mid u(y)=p(x)\}$.

$\forall x\in E$, $u(v(x))=p(x)$. **$u\circ v = p$.**

$u \circ v \circ u = p \circ u = u$ car $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ ... donc $\forall x \in E,\ p(u(x)) = u(x)$.

$\underline{\underline{u \circ v \circ u = u.}}$

d) Cohérence c̄ Q1. $M_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M_{(e_1,e_2,e_3)}(p)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Ainsi $p(e_1+e_2+e_3) = \frac{2}{3}(e_1 + e_2 + 2e_3) = \frac{2}{3}u(e_1) = u\left(\frac{2}{3}e_1\right)$.

$\frac{2}{3}e_1 \in \{y \in E \mid u(y) = p(e_1+e_2+e_3)\}$

donc $v(e_1+e_2+e_3)$ est la projection orthogonale de $\frac{2}{3}e_1$ sur $\operatorname{Im} p$.

$$v(e_1+e_2+e_3) = p\left(\frac{2}{3}e_1\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{9}[2e_1 - e_2 + e_3].$$

où $M_{(e_1,e_2,e_3)}(p)$

$\underline{\underline{v(e_1+e_2+e_3) = \frac{2}{9}(2e_1 - e_2 + e_3)}}$ ou $\underline{\underline{v((1,1,1)) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right).}}$

<u>Exercice</u>.- $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ est un élément quelconque de E.

Calculer $p(x)$ et $v(x)$.

<u>Réponses</u> $\underline{\underline{p(x) = \frac{1}{3}\left[(2x_1 - x_2 + x_3)e_1 + (-x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 + (x_1 + x_2 + 2x_3)e_3\right].}}$

$\underline{\underline{v(x) = \frac{1}{18}\left[(-x_1 + 5x_2 + 4x_3)e_1 + (5x_1 - 7x_2 - 2x_3)e_2 + (4x_1 - 2x_2 + 2x_3)e_2\right].}}$

$$\underline{\underline{M_{(e_1,e_2,e_3)}(v) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 5 & -7 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}}$$

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>