Exercice principal S62

1. Question de cours : Définition de la limite d'une suite de nombres réels.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sup(u_k,\ k \geqslant n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$.

4.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant n$, on a : $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

b) Que vaut $P(S_n = k)$ lorsque $k < n$?

5. Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, bornée et de dérivée bornée sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$ est convergente.

On pose alors pour tout $x \in]0,1]$: $K_n(x) = x^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^k$

b) Établir l'existence de $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ et exprimer $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ en fonction de $K_n(p)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant A\,\varepsilon + B\,P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

d) Soit $t \in [1,+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left|K_n\left(\frac{1}{t}\right) - f(t)\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice sans préparation S62

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
On pose : $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
et $H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}$.
Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

R.

Exercice pricipal S 62

Q1 $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de réels et ℓ est un élément de $\mathbb{R}$.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in[\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![, n\geq p \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, ℓ est l'unique réel qui vérifie :

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in[\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![, n\geq p \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$; ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Q2 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\{u_k\,;\,k\geq n+1\}\subset\{u_k\,;\,k\geq n\}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Sup}\{u_k\,;\,k\geq n+1\}\leq \operatorname{Sup}\{u_k\,;\,k\geq n\}$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1}\leq v_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. En particulier $\exists m\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m\leq u_n$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $m\leq u_n\leq \operatorname{Sup}\{u_k\,;\,k\geq n\}=v_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par m.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc <u>$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente</u>.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_n\leq \operatorname{Sup}\{u_k\,;\,k\geq n\}=v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$. Alors par encadrement

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

<u>Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.</u>

Q3
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possèdent une espérance commune égale à $\frac{1}{p}$ et une variance commune égale à $\frac{q}{p^2}$

La loi faible des grands nombres montre que la suite $\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{p}$.

Alors $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geq\varepsilon\right)=0$.

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geq\varepsilon\right)=0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leq P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right\}\right) \leq$ [illegible] $\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\geq\varepsilon\right\}$ [illegible]. Alors par encadrement il vient :

par croissance

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)=0.}$$

Q4 a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$ et $\forall k\in[\![n,+\infty[\![$, $P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$.

- $S_1=X_1$. $S_1(\Omega)=X_1(\Omega)=[\![1,+\infty[\![$.

$$\forall k\in[\![1,+\infty[\![,\ P(S_1=k)=P(X_1=k)=p\,(1-p)^{k-1}=\binom{k-1}{1-1}p^1(1-p)^{k-1}.$$

Ainsi la propriété est vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$. $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$ et $X_{n+1}(\Omega)=[\![1,+\infty[\![$.

Alors $S_{n+1}(\Omega)\overset{(*)}{=}[\![n+1,+\infty[\![$, non ?! Soit $k\in[\![n+1,+\infty[\![$. $(\{X_{n+1}=i\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

Ainsi $P(S_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\{S_{n+1}=k\}\cap\{X_{n+1}=i\})=\sum_{i=1}^{+\infty}P(\{S_n=k-i\}\cap\{X_{n+1}=i\})$.

$P(S_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(S_n=k-i)\,P(X_{n+1}=i)$ car $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont indépendantes donc

$S_n=X_1+X_2+\dots+X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes

$P(S_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{k-n}P(S_n=k-i)P(X_{n+1}=i)$ car $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$

$$P(S_{n+1}=k)\underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=}\sum_{i=1}^{k-n}\binom{k-i-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-i-n}\,p\,(1-p)^{i-1}=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{i=1}^{k-n}\binom{k-i-1}{n-1}.$$

$$P(S_{n+1}=k)=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\Big[\underbrace{\binom{k-2}{n-1}+\binom{k-3}{n-1}+\dots+\binom{n-1}{n-1}}_{\binom{k-1}{n}\ \dots\text{ où connu !}}\Big]=\binom{k-1}{(n+1)-1}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}.$$

$\forall k\in[\![n+1,+\infty[\![$, $P(S_{n+1}=k)=\binom{k-1}{(n+1)-1}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}$! Ceci achève la récurrence.

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![\ \text{ et }\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}.}$$

Remarques. 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de Pascal de paramètres n et p.

2. Au niveau de (*) on pouvait se contenter de $S_{n+1}(\Omega)\subset[\![n+1,+\infty[\![$ et remarquer à la fin que $\forall k\in[\![n+1,+\infty[\![$, $P(S_{n+1}=k)\neq 0$. Donc $S_{n+1}(\Omega)=[\![n+1,+\infty[\![$.

b) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], P(S_n = k) = 0$

Q5 a) f est bornée sur $[1, +\infty[$. Alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in [1, +\infty[, |f(y)| \leq M$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f(1+\frac{k}{n})| \leqslant M$. Soit $x \in]0,1]$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k^2 \left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right| = k^2 |f(1+\frac{k}{n})| \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k^2 \left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right| \leqslant k^2 M \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$. $(*)$

Or $\binom{k+n-1}{n-1} = \dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)}{(n-1)!} \underset{k \mapsto +\infty}{\sim} \dfrac{k^{n-1}}{(n-1)!}$

Ainsi $k^2 M \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \underset{k \mapsto +\infty}{\sim} M \dfrac{1}{(n-1)!} k^{n+1} (1-x)^k$.

$1-x \in [0,1[$ donc par croissance comparée : $\lim\limits_{k \mapsto +\infty} (k^{n+1}(1-x)^k) = 0$.

Alors $\lim\limits_{k \mapsto +\infty} \left(k^2 M \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k\right) = 0$.

Par encadrement $(*)$ donne : $\lim\limits_{k \mapsto +\infty} \left(k^2 \left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right|\right) = 0$.

Ainsi
- $\left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right| \underset{k \mapsto +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} \geqslant 0$ (et, mais ce n'est pas utile, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right| \geqslant 0$)
- La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\left| f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k \right|$ converge.

Alors pour tout $x \in]0,1]$ la série de terme général $f(1+\frac{k}{n}) \binom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$ est absolument convergente donc convergente.

b) $g : t \mapsto f(\frac{t}{n})$ est une fonction de la variable réelle dont le domaine de définition contient $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ car f est définie sur $[1, +\infty[$.

Alors $g_n(S_n)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq n} g_n(k)\,P(S_n=k)$ est absolument convergente (théorème de transfert).

$f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ est absolument convergente.

$f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} f\left(\frac{k+n}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$ est absolument convergente.

$\forall k\in\mathbb{N},\quad f\left(\frac{k+n}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k = p^n\, f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k.$

$1-p\in\,]0,1[$. Donc d'après a) la série de terme général $f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$ est absolument convergente. Il en est de même pour la série $p^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$ et pour la série $f\left(\frac{k+n}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$! Alors $\underline{\underline{f\left(\frac{S_n}{n}\right)\text{ possède une espérance}}}$.

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=\sum_{k=n}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}\quad\text{(théorème de transfert)}$$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k+n}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k = p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k$$

Ainsi $\underline{\underline{E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=p^n\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\binom{k+n-1}{n-1}(1-p)^k = K_n(p).}}$

c) Comme nous l'avons vu plus haut f est bornée sur $[1,+\infty[$ donc $\exists M\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in[1,+\infty[,\ |f(y)|\leq M$.

f' est également bornée sur $[1,+\infty[$. $\exists \hat{M}\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in[1,+\infty[,\ |f'(y)|\leq\hat{M}$.

f est C^1 sur $[1,+\infty[$. L'inégalité des accroissements finis et ce qui précède donne :

$\forall (a,b)\in[1,+\infty[,\quad |f(a)-f(b)|\leq\hat{M}\,|a-b|.$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $A_n=\{\omega\in\Omega \mid \left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|\leq\varepsilon\}$.

Soit $\omega\in\Omega$.

1) $\omega\in A_n$. $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \underset{\uparrow}{\leq} \hat{M}\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leq\hat{M}\,\varepsilon=\hat{M}\,\varepsilon\,\mathbb{1}_{A_n}(\omega).$

$\frac{S_n(\omega)}{n}\in[1,+\infty[$ et $\frac{1}{p}\in[1,+\infty[$

2) $\omega\notin A_n$. $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leq\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{p}\right)\right|\leq 2M=2M\,\mathbb{1}_{\bar{A}_n}$

& $\frac{S_n(\omega)}{n}\in[1,+\infty[$ et $\frac{1}{p}\in[1,+\infty[$.

donc $\forall \omega \in A_n$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\, \varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n}(\omega)+0 = \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n}(\omega) + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega)$.

$\forall \omega \in \bar{A}_n$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega) = 0 + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega) = \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n}(\omega) + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega)$.

Ainsi $\forall \omega \in \Omega$, $\left|f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n}(\omega) + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}(\omega)$.

Donc $\underline{\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n} + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}}$.

Alors $-\left(\hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n} + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}\right) \leq f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n} + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}$. (**).

$\mathbb{1}_{A_n}$ (resp. $\mathbb{1}_{\bar{A}_n}$) possède une espérance qui vaut $P(A_n)$ (resp. $P(\bar{A}_n)$).

Par combinaison linéaire $\hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n} + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}$ possède une espérance qui vaut $\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)$. De même $-\left(\hat{n}\,\varepsilon\, \mathbb{1}_{A_n} + 2M\, \mathbb{1}_{\bar{A}_n}\right)$ possède une espérance qui vaut $-\left(\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)\right)$

$f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance d'après b) et la variable constante $\frac{1}{p}$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{p}$.

Alors $f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)$ possède une espérance qui vaut $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)$. Alors en utilisant (**) et la croissance de l'espérance il vient :

$-\left(\hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)\right) \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n)$.

Ainsi $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq \hat{n}\,\varepsilon\, P(A_n) + 2M\, P(\bar{A}_n) \underset{P(A_n)\leq 1}{\leq} \hat{n}\,\varepsilon + 2M\, P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)$.

Posons $A=\hat{n}$ et $B=2M$. A et B sont indépendants de n et $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq A\varepsilon + B\, P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)$

Si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux réels positifs ou nuls tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leq A\varepsilon + B\, P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}\right|>\varepsilon\right)$.

---

d) Soit $t \in]1,+\infty[$. Posons $p=\frac{1}{t}$. $p \in]0,1[$.

Notons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|=0$ ce qui donnera

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|K_n(p)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|=0$ soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|K_n\left(\frac{1}{t}\right)-f(t)\right|=0$.

Notons que $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq r \Rightarrow \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2(\hat{n}+1)}$. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})| \leqslant A\varepsilon + B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon) \underset{q}{<} \frac{\varepsilon'}{2} + B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)$

$\left|\begin{array}{l} A=\hat{\Pi} \\ A\varepsilon = \varepsilon\hat{\Pi} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon(\hat{\Pi}+1)}\hat{\Pi} < \frac{\varepsilon'}{2}\end{array}\right.$

dans Q3 nous avons vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)=0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon))=0$.

donc $\exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant r \Rightarrow B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon) = |B\,P(|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{p}|>\varepsilon)| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant r \Rightarrow |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})| < \frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2}=\varepsilon'$.

Finalement $\forall\varepsilon'\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant r \Rightarrow |E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})| < \varepsilon'$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}|E(f(\frac{S_n}{n}))-f(\frac{1}{p})|=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}|K_n(p)-f(\frac{1}{p})|=0$ et ceci pour tout $p\in]0,1[$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{t})-f(t)|=0$ et ceci pour tout $t\in]1,+\infty[$.

Rappelons que $\forall x\in]0,1],\ K_n(x)=x^n\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} f(1+\frac{\ell}{n})\binom{\ell+n-1}{n-1}(1-x)^\ell$.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{t})=(\frac{1}{t})^n\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} f(1+\frac{\ell}{n})\binom{\ell+n-1}{n-1}(1-\frac{1}{t})^\ell$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{1})=(\frac{1}{1})^n f(1+\frac{0}{n})\binom{0+n-1}{n-1}\times 1 = f(1)$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ K_n(\frac{1}{1})-f(1)=0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{1})-f(1)|=0$

Finalement $\underline{\underline{\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}|K_n(\frac{1}{t})-f(t)|=0}}$. $\underline{\underline{\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}}$.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}K_n(\frac{1}{t})=f(t)$. $\forall x\in]0,1],\ \lim\limits_{x\to+\infty}K_n(x)=f(\frac{1}{x})$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}(E(f(\frac{S_n}{n})))=f(\frac{1}{p})}}$.

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire ...</u>