## Exercice principal S63

1. Question de cours : Théorème de transfert.

Soit $p$ un réel vérifiant $\frac{1}{2} < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X_0$ est la variable certaine de valeur 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_n$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t$ réel, on pose : $Y_n = 2X_n - n$ et $g_n(t) = E\big(e^{-tY_n}\big)$, où $E$ désigne l'espérance..

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $g_n(t) = \big(p\,e^{-t} + q\,e^{t}\big)^n$.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant g_n(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in ]0, 1[$ (indépendant de $n$) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant \alpha^n$.

4. Dans cette question, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $Z_0 = 0$ et $Z_n = \min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$.

a) Déterminer $Z_n(\Omega)$. Calculer $P(Z_n = -n)$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose : $A_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} [Y_j \leqslant 0]$. Montrer que l'on a : $P(A_k) \leqslant \dfrac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

c) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $r \in [\![-n, 0]\!]$. Établir les inégalités :

$$P(Z_n = r) \leqslant P\big(A_k \cap (Z_n = r)\big) + P(Z_k = r) \quad \text{et} \quad E(Z_n) \geqslant \frac{-n\alpha^n}{1-\alpha} + E(Z_{n-1}).$$

5. Montrer que la suite $\big(E(Z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

$\Updownarrow$

$E(Z_n) \geqslant -\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha} + E(Z_{n-1})$.

## Exercice sans préparation S63

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $f$ n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \mathrm{id}) \circ (f^2 + \mathrm{id}) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ sont supplémentaires.

2. Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# EXERCICE PRINCIPAL 563

(Q1) • Soit $X$ une variable aléatoire réelle et finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ où $i \mapsto x_i$ est une bijection de $[\![1, r]\!]$ sur $X(\Omega)$.

$g$ est une fonction numérique de la variable réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$

→ $E(g(X))$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{r} g(x_k) P(X = x_k)$.

• Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète.

$X(\Omega) = \{x_k \,;\, k \in [\![n_0, +\infty[\![\}$ et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $[\![n_0, +\infty[\![$ sur $X(\Omega)$.

$g$ est une fonction numérique de la variable réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$.

→ $E(g(X))$ existe si et seulement si la série de terme $g(x_k) P(X = x_k)$ est absolument convergente.

→ En cas d'existence $E(g(X)) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} g(x_k) P(X = x_k)$.

• Soit $X$ une variable aléatoire à densité. On suppose que $X$ possède une densité $f_X$ nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$.

$g$ est une fonction numérique de la variable réelle continue sur $]a, b[$ privé d'un nombre fini de points.

→ $E(g(X))$ existe si et seulement $\int_a^b g(t) f_X(t)\, dt$ est absolument convergente.

→ En cas d'existence $E(g(X)) = \int_a^b g(t) f_X(t)\, dt$.

(Q2) <u>1er cas.</u> - $n = 0$. Alors $X_0$ et $Y_0$ sont des variables certaines égales à 0.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-tY_0}$ est la variable certaine égale à 1.

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $E(e^{-tY_0}) = 1$ et $1 = (pe^{-t} + qe^{+t})^0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $E(e^{-tY_0}) = (pe^{-t} + qe^{+t})^0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_0(t) = (pe^{-t} + qe^{+t})^0$.

<u>2ème cas.</u> - $n \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. $X_n$ est une variable aléatoire finie et $x \to e^{-t(2x-n)}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors $E(e^{-t(2X_n - n)})$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{-t(2k-n)} P(X_n = k)$.

Donc $E(e^{-tY_n})$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{-t(2k-n)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Notons que $2k - n = k - (n-k)$

$$E(e^{-tY_n}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-t}p)^k (e^{t}q)^{n-k} = (e^{-t}p + e^{t}q)^n = (pe^{-t}+qe^{t})^n.$$

↑ $2k-n = k-(n-k)$ ; formule du binôme.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n(t) = E(e^{-tY_n}) = (pe^{-t}+qe^{t})^n$.

Finalement $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \; g_n(t) = E(e^{-tY_n}) = (pe^{-t}+qe^{t})^n.}}$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n=0$ : $P(Y_n \leq 0) \leq 1 = (pe^{-t}+qe^{t})^0 = (pe^{-t}+qe^{t})^n = g_n(t)$.

Supposons $n \geq 1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

Si $t=0$ : $P(Y_n \leq 0) \leq 1 = (p+q)^n = (pe^{-0}+qe^{0})^n = (pe^{-t}+qe^{t})^n = g_n(t)$.

Supposons $t>0$. $P(Y_n \leq 0) = P(-tY_n \geq 0) = P(e^{-tY_n} \geq 1)$.

$e^{-tY_n}$ est une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et possède une espérance.

L'inégalité de Markov montre alors que $P(Y_n \leq 0) = P(e^{-tY_n} \geq 1) \leq \dfrac{E(e^{-tY_n})}{1} = g_n(t)$.

Finalement $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \; P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t).}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geq 1$.

$g_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) = n(-pe^{-t}+qe^{t})(pe^{-t}+qe^{t})^{n-1}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) > 0 \Leftrightarrow -pe^{-t}+qe^{t} > 0 \Leftrightarrow qe^{t} > pe^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} > \frac{p}{q}$.

Notons que $\ln \frac{p}{q} > 0$ car $\frac{p}{q} > 1$ car $\frac{1}{2} < p < 1$ et $q = 1-p$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

De même : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$ et $g_n'(t) < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

Donc $g_n$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}]$. Alors $g_n$ possède un minimum sur $\mathbb{R}_+$ atteint en le seul point

$t_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t)$. En particulier $P(Y_n \leq 0) \leq g_n(t_0)$.

$$g_n(t_0) = (pe^{-t_0}+qe^{t_0})^n = (pe^{-\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}} + qe^{\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}})^n = \left(p\sqrt{\tfrac{q}{p}} + q\sqrt{\tfrac{p}{q}}\right)^n.$$

$g_n(t_0) = (2\sqrt{pq})^n$. Posons $\alpha = 2\sqrt{pq}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n$. De plus $P(Y_0 \leq 0) \leq 1 = \alpha^0$.

Ainsi si $\alpha = 2\sqrt{pq}$ : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n}$.

Notons que $\alpha \in ]0,1[$. Évidemment $\alpha > 0$.

$\alpha < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{pq} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{pq} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow pq < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4} - pq = \frac{1}{4} - p(1-p) = \frac{1}{4} - p + p^2 = (p - \frac{1}{2})^2$

Or $p \in ]\frac{1}{2}, 1[$ donc $(p - \frac{1}{2})^2 > 0$ et ainsi $\alpha < 1$.

Finalement si $\alpha = 2\sqrt{pq}$ :
1) $\alpha \in ]0,1[$
2) $\alpha$ ne dépend pas de $n$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y_n \leq 0) \leq \alpha^n$.

Q4) Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ !

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Z_n = -n) = P(\min(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = -n)$. Notons que $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ prennent des valeurs supérieures ou égales à $-(n-1)$.

Ainsi $P(Z_n = -n) = P(Y_n = -n) = P(2X_n - n = -n) = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = q^n$.

$\underline{P(Z_n = -n) = q^n}$. Ceci vaut encore pour $n=0$ car $Z_0$ est la variable certaine égale à 0.

b) Rappel : Si $r \in \mathbb{N}^*$ et si $B_1, B_2, \dots, B_r$ sont $r$ événements de $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ :

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r) \leq \sum_{k=1}^{r} P(B_k)$$ . Ceci se montre de manière évidente par récurrence.

Alors $P(\{Y_{k+1} \leq 0\} \cup \{Y_{k+2} \leq 0\} \cup \dots \cup \{Y_n \leq 0\}) \leq \sum_{j=k+1}^{n} P(Y_j \leq 0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(A_k) \leq \sum_{j=k+1}^{n} P(Y_j \leq 0) \leq \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^j = \alpha^{k+1} \times \frac{1-\alpha^{n-k}}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

$\begin{cases} 1 - \alpha^{n-k} \leq 1 \\ 1 - \alpha > 0 \\ \alpha^{k+1} > 0 \end{cases}$

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(A_k) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et soit $r \in [\![-n, 0]\!]$.

$(A_k, \overline{A_k})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne $P(Z_n = r) = P(A_k \cap \{Z_n = r\}) + P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\})$.

$P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\}) = P(\{Y_{k+1} > 0\} \cap \{Y_{k+2} > 0\} \cap \dots \cap \{Y_n > 0\} \cap \{Z_n = r\})$.

$P(\overline{A_k} \cap \{Z_n = r\}) = P(\{Y_{k+1} > 0\} \cap \{Y_{k+2} > 0\} \cap \dots \cap \{Y_n > 0\} \cap \{\min(Y_0, Y_1, \dots Y_n) = r\})$.

Alors $P(\overline{A}_k \cap \{Z_n=r\}) \underset{r\in[\![-n,0]\!]}{=} P(\{Y_{k+1}>0\}\cap\{Y_{k+2}>0\}\cap\dots\cap\{Y_n>0\}\cap\{\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_k)=r\})$

Par croissance $P(\overline{A}_k\cap\{Z_n=r\}) \leq P(\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_k)=r) = P(Z_k=r)$.

Finalement $P(Z_n=r)=P(A_k\cap\{Z_n=r\})+P(\overline{A}_k\cap\{Z_n=r\})\leq P(A_k\cap\{Z_n=r\})+P(Z_k=r)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in[\![0,n-1]\!], \forall r\in[\![-n,0]\!], \quad P(Z_n=r)\leq P(A_k\cap\{Z_n=r\})+P(Z_k=r).$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. d'après ce que précède appliqué à $k=n-1$ on obtient

$\forall r\in[\![-n,0]\!], \quad P(Z_n=k)\leq P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+P(Z_{n-1}=r)$.

donc $\forall r\in[\![-n,0]\!], \quad r\,P(Z_n=k)\geq r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+r\,P(Z_{n-1}=r)$.

Rappelons que $Z_n=\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_n)$ prend ses valeurs dans $[\![-n,0]\!]$ car $Y_0$ est la variable certaine égale à $0$ et les variables $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ prennent comme plus petites valeurs $-1,-2,\dots,-n$. de même $Z_0$ prend ses valeurs dans $[\![-0,0]\!]$. cela permet de dire que $Z_{n-1}$ prend ses valeurs dans $[\![-(n-1),0]\!]$...

Alors $E(Z_n)=\sum_{r=-n}^{0} r\,P(Z_n=k)\geq\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+\sum_{r=-n}^{0} r\,P(Z_{n-1}=r)$.
ou $r=-(n-1)$

donc $E(Z_n)\geq\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+E(Z_{n-1})$.

$\forall r\in[\![-n,0]\!], \quad r\geq -n$ et $P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})\geq 0$.

donc $\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})\geq\sum_{r=-n}^{0}(-n)\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})=-n\sum_{r=-n}^{0}P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})$.

Or $(P(Z_n=r))_{r\in[\![-n,0]\!]}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{r=-n}^{0}P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})=P(A_{n-1})$.

Ainsi $\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})\geq -n\,P(A_{n-1})\geq -n\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

$P(A_{n-1})\leq\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ et $-n\leq 0$.

Alors $E(Z_n)\geq\sum_{r=-n}^{0} r\,P(A_{n-1}\cap\{Z_n=r\})+E(Z_{n-1})\geq -\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}+E(Z_{n-1})$.

$E(Z_n)\geq\dfrac{-n\alpha^n}{1-\alpha}+E(Z_{n-1})$ et ceci pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

**Q5** $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad Z_n=\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_n)\leq\min(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1})=Z_{n-1}$

Par croissance de l'espérance il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_n) \leq E(Z_{n-1})$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq E(Z_{n-1}) - E(Z_n) \leq \dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}$ (1)

$\uparrow$ $E(Z_n) \geq \dfrac{-n\alpha^n}{1+\alpha} + E(Z_{n-1})$

$\alpha \in ]0,1[$ donc la série de terme général $\dfrac{n\alpha^n}{1-\alpha}$ est convergente. Alors (1) et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $E(Z_{n-1}) - E(Z_n)$ converge. Posons $C = \sum_{k=1}^{+\infty} (E(Z_{k-1}) - E(Z_k))$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} (E(Z_k) - E(Z_{k-1})) + E(Z_0) \underset{\substack{\uparrow \\ E(Z_0)=0}}{=} - \sum_{k=1}^{n} (E(Z_{k-1}) - E(Z_k))$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} E(Z_n) = - \sum_{k=1}^{+\infty} (E(Z_{k-1}) - E(Z_k)) = -C$.

Alors <u>la suite de terme général $E(Z_n)$ converge.</u>

$$\lim_{n \to +\infty} E(Z_n) = - \sum_{q=1}^{+\infty} (E(Z_{q-1}) - E(Z_q)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (E(Z_k) - E(Z_{k-1})).$$

<u>Remarque.</u> Ce thème est contenu dans Oral ESCP 1997 3.4.

Si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.