Exercice principal S74

1. Question de cours : Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires de E.

2. Déterminer la dimension de E^*.

3. Dans cette question uniquement, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit f et g deux éléments de E^* définis par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P(0)$ et $g(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(g)$. Les formes linéaires f et g sont-elles proportionnelles ?

4. Soit f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) Soit $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$. On pose : $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Montrer que $h = 0$. Conclusion.

5. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit *stable* par A lorsque pour tout $X \in F$ on a $AX \in F$.

a) Soit $X \in F$ avec $X \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est vecteur propre de A.

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et L la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $L(x, y, z) = ax + by + cz$.

Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(LA)$.

En déduire que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (transposée de A).

Exercice sans préparation S74

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$ admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.

2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice principal S 74

(Q1) $\hat{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n non nul. $\hat{f}$ est un endomorphisme de $\hat{E}$.

- $\lambda \in \mathbb{K}$.
  λ est valeur propre de $\hat{f}$ si il existe x appartenant à $\hat{E}$ vérifiant :

  $x \neq 0_{\hat{E}}$ et $\hat{f}(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in \hat{E}$.
  x est un vecteur propre de $\hat{f}$ si il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que

$\hat{f}(x) = \lambda x$ et si x n'est pas nul.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in \hat{E}$. x est un vecteur propre de $\hat{f}$ associé à la valeur propre λ si $x \neq 0_{\hat{E}}$ et si $\hat{f}(x) = \lambda x$.

(Q2) $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = n \times 1 = n = \dim E$.

$\underline{\dim E^* = \dim E}$.

(Q3) Soit $P \in E$. $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow X$ divise $P \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = XQ$. Supposons $p \neq 0$.

Mieux $P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $P = XQ \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $P = X(\sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^\ell)$

$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $P = \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^{\ell+1} \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^p)$

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X, X^2, \dots, X^p) \text{ si } p \geq 1}$. $\underline{(X, X^2, \dots, X^p) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$ (cette famille est libre...)

Supposons $p = 0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda$.
$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow P(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow P = 0_E$.

$\underline{\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \text{ si } p = 0}$. Difficile de trouver une base !

Supposons $p \geq 1$. Soit $P = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell X^\ell \in E$.

$g(P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell dt = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \int_0^1 t^\ell = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \frac{1}{\ell+1} \Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{\ell+1} a_\ell = 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker} g$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{\ell=0}^{p} \frac{1}{\ell+1} a_\ell = 0$ dans la base canonique de E.

$\dim \operatorname{Ker} g = (p+1) - 1 = p$. $\underline{\operatorname{Ker} g = p}$.

$\operatorname{Ker} g = \{ \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell X^\ell - \left((p+1) \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{a_\ell}{\ell+1}\right) X^p ;\ (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \}$.

$\operatorname{Ker} g = \left\{ \sum_{\ell=0}^{p-1} a_\ell \left(X^\ell - \frac{p+1}{\ell+1} X^p\right) ;\ (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \right\}$.

$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}\left((X^0-(p+1)X^p), (X^1-\frac{p+1}{2}X^p), \dots, (X^{p-1}-\frac{p+1}{p}X^p) \right)$.

Ainsi $((X^0-(p+1)X^p), (X^1-\frac{p+1}{2}X^p), \dots, (X^{p-1}-\frac{p+1}{p}X^p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, g$, de cardinal p égal à la dimension de $\mathrm{Ker}\, g$.

Ainsi $(X^0-(p+1)X^p, X^1-\frac{p+1}{2}X^p, \dots, X^{p-1}-\frac{p+1}{p}X^p)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, g$ ... lorsque $p \geqslant 1$.

Supposons que $p=0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P=\lambda$.

$P \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow 0 = \int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 \lambda\, dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow P = 0_E$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$ si $p=0$. Difficile encore ici de trouver une base !

1er cas.. $p=0$. Soit $P \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P=\lambda$.

$f(P) = P(0) = \lambda$ et $g(P) = \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda$.

$\forall P \in E$, $f(P) = g(P)$. $f=g$. f et g sont proportionnelles.

2ème cas.. $p \geqslant 1$. Supposons f et g proportionnelles. Comme $f \neq 0_{E^*}$: $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $g = \theta f$.

$g(1) = \int_0^1 1\,dt = 1$. Donc $1 = g(1) = \theta f(1) = \theta \times 1 = \theta$. $\theta = 1$. $g = f$.

$g(X) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ et $f(X) = 0$. Alors $\frac{1}{2} = 0$!

Ainsi f et g ne sont pas proportionnelles.

f et g sont proportionnelles si et seulement si $p=0$.

(Q4) a) $f \neq 0_{E^*}$ et $g \neq 0_{E^*}$.

$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R} = 1$ et $\mathrm{Im}\, f \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$. Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

Le théorème du rang donne : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim E - 1 = n-1$

De même $\dim \mathrm{Ker}\, g = n-1$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, g < +\infty$. Alors $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.

b) (*) Posons $F = \mathrm{Vect}(x_0)$. $x_0 \notin \mathrm{Ker}\, f$ donc $x_0 \neq 0_E$. F est donc la droite vectorielle engendrée par x_0. Comme $x_0 \notin \mathrm{Ker}\, f$: $\mathrm{Ker}\, f \cap F = \{0_E\}$

$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim F = n-1+1 = \dim E$. Ceci achève de montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et F sont supplémentaires.

(*) x_0 existe car $f \neq 0_{E^*}$

Soit $x \in E$. $\exists ! (x', x'') \in \operatorname{Ker} f \times F$, $x = x' + x''$.

$x'' \in F$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x'' = \lambda x_0$. Rappelons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ et que h est une forme linéaire sur E comme combinaison linéaire de deux formes linéaires sur E.

$$h(x) = h(x') + h(x'') = g(x_0)\underbrace{f(x')}_{=0_{\mathbb{R}}} - f(x_0)\underbrace{g(x')}_{=0_{\mathbb{R}}} + g(x_0)f(x'') - f(x_0)g(x'').$$

$$h(x) = g(x_0)f(\lambda x_0) - f(x_0)g(\lambda x_0) = \lambda\left[g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)\right] = 0_{\mathbb{R}}.$$

$\forall x \in E$, $h(x) = 0_{\mathbb{R}}$. $\underline{\underline{h = 0_{E^*}}}$. Alors $g(x_0) f = f(x_0) g$ et $f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}}$ car $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $g = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} f$. <u>$f$ et g sont proportionnelles.</u>

Q5 a) Nous partirons de $X \in \mathbb{R}^3$ (et pas F) et $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

* Supposons que X soit un vecteur propre de A. $\exists \mu \in \mathbb{R}$, $AX = \mu X$.

$$A(\operatorname{Vect}(X)) = \operatorname{Vect}(AX) = \operatorname{Vect}(\mu X) \subset \operatorname{Vect}(X)$$
avec égalité si $\mu \neq 0$.

Ainsi $\operatorname{Vect}(X)$ est stable par A.

* Réciproquement supposons que $\operatorname{Vect}(X)$ soit stable par A. Alors $AX \in \operatorname{Vect}(X)$ car $X \in \operatorname{Vect}(X)$. Donc $\exists \mu' \in \mathbb{R}$, $AX = \mu' X$. Comme $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, X est un vecteur propre de A.

<u>Si $X \in \mathbb{R}^3$ et si $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$: $\operatorname{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est un vecteur propre de A.</u>

<u>Remarque</u>. – Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par A sont les droites vectorielles engendrées par les vecteurs propres de A.

b) Notons que $ax + by + cz = 0$ est une équation de $\mathcal{P}$ <u>dans la base canonique</u> $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Pour éviter les confusions nous noterons f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A.

Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f_A si et seulement si $\operatorname{Ker}(L) \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$. Notons que $\mathcal{P} = \operatorname{Ker}(L)$.

$\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$.

$\Updownarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow X \in \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$.

$\Updownarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow L(f_A(X)) = 0$.

$\Updownarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow f_A(X) \in \operatorname{Ker} L$.

$\Updownarrow$ $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \mathcal{P} \Rightarrow f_A(X) \in \mathcal{P}$.

$\Updownarrow$ $\mathcal{P}$ est stable par f_A.

$\mathcal{P}$ est stable par f_A si et seulement si $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$.

- Supposons que $H = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

  $H \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tAH = \lambda H$; ${}^tH A = \lambda {}^tH$.

  Notons que ${}^tH$ est la matrice de L relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et à la base canonique de $\mathbb{R}$.

  ${}^tHA$ est la matrice de $L \circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et à la base canonique de $\mathbb{R}$.

  ${}^tHA = \lambda {}^tH$ donne alors $L \circ f_A = \lambda L$.

  $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $X \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow L(X) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \lambda L(X) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow (L \circ f_A)(X) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow X \in \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$.

  Ainsi $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$. Alors $\mathcal{P}$ est stable par f_A.

- Réciproquement supposons $\mathcal{P}$ stable par f_A. Alors $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$.

  L est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$. $\dim \operatorname{Ker} L = 2$.

  Alors $2 = \dim \operatorname{Ker} L \leq \dim \operatorname{Ker}(L \circ f_A) \leq 3$. $\dim \operatorname{Ker}(L \circ f_A) = 2$ ou 3.

  1er cas. – $\dim \operatorname{Ker}(L \circ f_A) = 2$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Ker}(L \circ f_A) = 2$.

  Alors $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker}(L \circ f_A)$, $L \circ f_A$ et L sont deux formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$. Alors d'après Q4 : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $L \circ f_A = \lambda L$.

  Donc $(a\ b\ c)A = \lambda (a\ b\ c)$. En transposant il vient :

  ${}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Comme $(a, b, c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

  Ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (associé à λ).

<u>2ème Cas.</u>. dim Ker $(L \circ f_A) = 3$.

Alors $L \circ f_A = 0_{E^*}$. Donc $(a\ b\ c)A = 0_{M_{1,3}(\mathbb{R})}$.

En transposant il vient ${}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $(a, b, c) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à 0.

Ainsi $\mathcal{P}$ est stable par f_A (ou par A) si et seulement $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

<u>Remarque</u>.. Ces résultats se généralisent de la manière suivante.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n non nulle.

$\mathcal{B}$ est une base de E et A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

1) une droite vectorielle de E est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.

2) Un hyperplan H de E d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>