Exercice principal S79

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle , \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\| . \|$.
Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. On pose :

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = f(x)\} \text{ et } \mathcal{I} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = -f(x)\}.$$

Enfin, on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^n$ et telles que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u , v \rangle = 0$, on a : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

1. Question de cours : Théorème de Pythagore.

2. Établir les relations : $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$, où $\lfloor n\lambda \rfloor$ désigne la partie entière du réel $n\lambda$.

4. Soit $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$.

a) En exploitant l'hypothèse $n \geqslant 2$, montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $g(2x) = 2g(x)$.

b) Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $g(rx) = rg(x)$.
En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

c) Montrer que la fonction g est linéaire.

5. Soit $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$.

a) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Calculer $\langle x - y , x + y \rangle$ et en déduire que $h(x) = h(y)$.

b) Justifier l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = \varphi(\|x\|^2)$.

c) On admet que φ est continue. Montrer que pour tous réels positifs s et t, on a : $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$.

d) Établir alors l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = c\|x\|^2$.

6. En déduire la forme générale de toute fonction $f \in \mathcal{H}$.

Exercice sans préparation S79

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ($p \geqslant 2$) des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$.

On pose pour tout $p \geqslant 2$: $S_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ sachant $(S_p = n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$ en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Exercice principal S 79

(Q1) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E.

Si x et y sont deux éléments de E : x et y sont orthogonaux si et seulement si

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(Q2) Montrons que $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{H}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ par définition.
- Soit f_0 l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = 0$. $f_0 \in \mathcal{F}$.

→ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_0(-x) = 0 = f_0(x)$; $f_0 \in \mathcal{P}$. $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

→ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_0(-x) = 0 = -f_0(x)$; $f_0 \in \mathcal{I}$; $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

→ Soient u et v deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle u,v \rangle = 0$

$f_0(u+v) = 0 = 0+0 = f_0(u) + f_0(v)$. De plus f_0 est continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi $f_0 \in \mathcal{H}$; $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

- Soit $(f,g) \in \mathcal{F}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

→ Supposons que $(f,g) \in \mathcal{P}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda f+g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$; $\lambda f + g \in \mathcal{P}$.

→ Supposons que $(f,g) \in \mathcal{I}^2$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda f+g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda(-f(x)) + (-g(x)) = -(\lambda f + g)(x)$; $\lambda f + g \in \mathcal{I}$.

→ Supposons que $(f,g) \in \mathcal{H}^2$. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle u,v \rangle = 0$.

$(\lambda f+g)(u+v) = \lambda f(u+v) + g(u+v) = \lambda(f(u)+f(v)) + g(u) + g(v) = (\lambda f+g)(u) + (\lambda f+g)(v)$.

De plus f et g sont continues sur $\mathbb{R}^n$ donc $\lambda f+g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Ceci achève de montrer que $\lambda f+g$ appartient à $\mathcal{H}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in \mathcal{P}^2$, $\lambda f + g \in \mathcal{P}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in \mathcal{I}^2$, $\lambda f + g \in \mathcal{I}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in \mathcal{H}^2$, $\lambda f + g \in \mathcal{H}$.

Les trois points précédents montrent que $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{H}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}$.

Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrons par "analyse / synthèse" que $\exists! (p,i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, $f = p + i$.

* Analyse / Unicité.

Supposons que $(p,i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ et que $f = p + i$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(-x) + i(-x)$
$= p(x) - i(x)$.

Alors $f(x)+f(-x)=2p(x)$ et $f(x)-f(-x)=2i(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$.

d'où l'unicité de (p,i).

* Synthèse / Existence.

Posons $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.

- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)+i(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x))=f(x)$. $f=p+i$.
- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(-x)=\frac{1}{2}(f(-x)+f(x))=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=p(x)$; $p\in\mathcal{P}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ i(-x)=\frac{1}{2}(f(-x)-f(x))=-\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=-i(x)$; $i\in\mathcal{I}$.

Alors $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{P}$ et $i\in\mathcal{I}$. D'où l'existence d'un couple (p,i) de $\mathcal{P}\times\mathcal{I}$ tel que $f=p+i$. Notons que $\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \text{ et } i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))}$.

Finalement : $\underline{\forall f\in\mathcal{F},\ \exists!(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I},\ f=p+i}$.

<u>$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}=\mathcal{P}\oplus\mathcal{I}$.</u>

- $(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})\subset\mathcal{P}\cap\mathcal{I}=\{0_{\mathcal{F}}\}$.

  $0_{\mathcal{F}}\in(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})$ car $\mathcal{P}, \mathcal{I}, \mathcal{H}$ sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

  Ainsi $(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})\cap(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})=\{0_{\mathcal{F}}\}$. <u>$\mathcal{H}\cap\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$ sont en somme directe.</u>

- $\mathcal{H}\cap\mathcal{P}\subset\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}\cap\mathcal{I}\subset\mathcal{H}$ donc $\underline{(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})+(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})\subset\mathcal{H}}$ car $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

- Soit $f\in\mathcal{H}$. $\exists!(p,i)\in\mathcal{P}\times\mathcal{I},\ f=p+i$. Montrons que p et i sont dans $\mathcal{H}$.

  $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $i(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$.

  Soit $(u,v)\in(\mathbb{R}^n)^2$ tel que $\langle u,v\rangle=0$. Notons que $\langle -u,-v\rangle=0$.

  $$p(u+v)=\frac{1}{2}[f(u+v)+f(-u-v)]\underset{\langle u,v\rangle=\langle -u,-v\rangle=0}{=}\frac{1}{2}[f(u)+f(v)+f(-u)+f(-v)]=\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)+f(v)+f(-v)]$$

  $$p(u+v)=\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)]+\frac{1}{2}[f(v)+f(-v)]=p(u)+p(v).$$

  $$i(u+v)=\frac{1}{2}[f(u+v)-f(-u-v)]\underset{\langle u,v\rangle=\langle -u,-v\rangle=0}{=}\frac{1}{2}[f(u)+f(v)-f(-u)-f(-v)]=\frac{1}{2}[f(u)-f(-u)+f(v)-f(-v)]$$

  $$i(u+v)=\frac{1}{2}(f(u)-f(-u))+\frac{1}{2}(f(v)-f(-v))=i(u)+i(v).$$

  f appartient à $\mathcal{H}$ donc f est additive sur $\mathbb{R}^n$. Alors p et i sont additives sur $\mathbb{R}^n$. Ceci achève de montrer que $p\in\mathcal{H}$ et $i\in\mathcal{H}$.

  Ainsi $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{P}$, $i\in\mathcal{P}$, $p\in\mathcal{H}$ et $i\in\mathcal{H}$.

  $f=p+i$ avec $p\in\mathcal{H}\cap\mathcal{P}$ et $i\in\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$. $f\in(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})+(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})$.

Ainsi $\forall f \in \mathcal{E}$, $f \in (\mathcal{E} \cap \mathcal{G}) + (\mathcal{E} \cap \mathcal{I})$. $\underline{\underline{\mathcal{E} \subset (\mathcal{E} \cap \mathcal{G}) + (\mathcal{E} \cap \mathcal{I})}}$.

Les trois points précédents montrent que que $\underline{\underline{\mathcal{E} = (\mathcal{E} \cap \mathcal{G}) \oplus (\mathcal{E} \cap \mathcal{I})}}$.

Q3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor n\lambda \rfloor \leqslant n\lambda < \lfloor n\lambda \rfloor + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} \leqslant \lambda < \dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} \leqslant \lambda$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lambda - \dfrac{1}{n}\right) = \lambda$.

⚠ On aurait pu éviter l'utilisation de n...

Par encadrement il vient $\underline{\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n} = \lambda}}$ et ceci pour tout réel λ.

Q4 $g \in \mathcal{E} \cap \mathcal{I}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\dim \mathrm{Vect}(x) \leqslant 1$ et $\dim \mathbb{R}^n = n > 1$.

Alors $(\mathrm{Vect}(x))^\perp$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Ainsi il existe $z \in (\mathrm{Vect}(x))^\perp - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Posons $y = \dfrac{\|x\|}{\|z\|} z$.

Alors $y \in (\mathrm{Vect}(x))^\perp$ et $\|y\| = \left|\dfrac{\|x\|}{\|z\|}\right| \|z\| = \dfrac{\|x\|}{\|z\|} \|z\| = \|x\|$.

Ainsi y est un vecteur orthogonal à x et de même norme que $\|x\|$.

$\langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$. $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux.

Alors $g(x - y + x + y) = g(x - y) + g(x + y)$. $g(2x) = g(x - y) + g(x + y)$.

Notons que x et $-y$ sont orthogonaux de même que x et y.

Alors $g(2x) = g(x) + g(-y) + g(x) + g(y) = 2g(x)$ car $g(-y) = -g(y)$ $(g \in \mathcal{I})$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(2x) = 2g(x)}}$.

b) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $g(rx) = r g(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $r = 0$. $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $g(2z) = 2g(z)$. Donc $g(0_{\mathbb{R}^n}) = g(2 \times 0_{\mathbb{R}^n}) = 2 \times g(0_{\mathbb{R}^n})$.

Alors $g(0_{\mathbb{R}^n}) = 2 \times g(0_{\mathbb{R}^n})$. Ainsi $g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$.

Ainsi $g(rx) = g(0 \times x) = g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0 = 0 \times g(x) = r g(x)$. $g(rx) = r g(x)$.

Montrons par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^*$ $g(rx) = r g(x)$. ← ⚠ On aurait pu commencer la récurrence à $r = 0$!!

- La propriété est vraie pour $r=1$!
- Supposons la vraie pour r avec $r\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.

Soit z un vecteur non nul de $(\text{Vect}(x))^\perp$.

Posons $y=\frac{\sqrt{r}\|x\|}{\|z\|}z$. Notons que y est orthogonal à x car z est orthogonal à x.

$\langle rx+y, x-y\rangle = r\|x\|^2 - r\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \|y\|^2 = r\|x\|^2 - 0 + 0 - \left\|\frac{\sqrt{r}\|x\|}{\|z\|}z\right\|^2$

$\langle rx+y, x-y\rangle = r\|x\|^2 - \left(\left|\frac{\sqrt{r}\|x\|}{\|z\|}\right|\|z\|\right)^2 = r\|x\|^2 - \frac{r\|x\|^2}{\|z\|^2}\|z\|^2 = 0.$

$rx+y$ et $x-y$ sont deux éléments orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

Alors $g(rx+y+x-y) = g(rx+y) + g(x-y)$.

$g((r+1)x) = g(rx)+g(y)+g(x)+g(-y)$ car rx et y sont orthogonaux ainsi que x et $-y$.

comme $g\in\mathcal{I}$: $g(y)+g(-y)=0$. Alors $g((r+1)x)=g(rx)+g(x)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient $g((r+1)x) = rg(x)+g(x) = (r+1)g(x)$.

ceci achève la récurrence.

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall r\in\mathbb{N}, g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$. $\forall r\in\mathbb{N}$, $g(rx)=r(g(x))$.

$$\forall r\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N},\ g(rx) \underset{g\in\mathcal{I}}{=} -g((-r)x) \overset{-r\in\mathbb{N}^*}{=} -(-r)g(x) = rg(x).$$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall r\in\mathbb{Z}, g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et soit $r\in\mathbb{Q}$. $\exists (r_1,r_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $r=\frac{r_1}{r_2}$.

$$g(rx) = g\left(\frac{r_1}{r_2}x\right) = r_1 g\left(\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = \frac{r_1}{r_2}\left(r_2 g\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = r\,g\left(r_2\left(\frac{1}{r_2}x\right)\right) = rg(x).$$

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall r\in\mathbb{Q}, g(rx)=rg(x).}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $\forall q\in\mathbb{N}^*$, $r_q=\frac{\lfloor q\lambda\rfloor}{q}$.

$\forall q\in\mathbb{N}^*$, $r_q\in\mathbb{Q}$ et $\lim\limits_{q\to+\infty} r_q=\lambda$ d'après Q3.

$\forall q\in\mathbb{N}^*$, $g(r_q x)=r_q g(x)$. La suite $(r_q x)_{q\in\mathbb{N}^*}$ converge vers λx et

g est continue en λx $(g\in\mathcal{E})$. Alors $\lim\limits_{q\to+\infty} g(r_q x) = g(\lambda x)$.

Ainsi $g(\lambda x) = \lim\limits_{q\to+\infty} g(r_q x) = \lim\limits_{q\to+\infty} (r_q\, g(x)) = \lambda\, g(x)$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

c) montrons par récurrence que : $\forall s \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s,\ g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} g(x_i e_i)$

sachant que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notons que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot,\cdot \rangle)$.

- La propriété est évidemment vraie pour $s = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour s dans $[\![1, n-1]\!]$ et montrons la pour $s+1$.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}) \in \mathbb{R}^{s+1}$. $\sum_{i=1}^{s} x_i e_i$ et $x_{s+1} e_{s+1}$ sont orthogonaux.

Ainsi $g\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i + x_{s+1} e_{s+1}\right) = g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i\right) + g(x_{s+1} e_{s+1}) \underset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} \sum_{i=1}^{s} g(x_i e_i) + g(x_{s+1} e_{s+1})$

donc $g\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s+1} g(x_i e_i)$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi la propriété est vraie pour $s = n$ donc $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i e_i)$.

D'après Q4 b) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall x_i \in \mathbb{R},\ g(x_i e_i) = x_i\, g(e_i)$.

Ainsi $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(e_i)$.

Montrons que g est linéaire.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Montrons que $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

$\exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $\exists! (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

$g(x+y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(e_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i\, g(e_i)$

Ainsi $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Ceci achève de montrer que g est linéaire.

Q5 a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = \|y\|$. $\langle x-y, x+y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$.

Alors $h(x-y+x+y) = h(x-y) + h(x+y)$. $h(2x) = h(x-y) + h(x+y)$.

De même comme $\|y\| = \|x\|$: $h(2y) = h(y-x) + h(y+x)$.

Alors $h(2x) = h(x-y) + h(x+y) \underset{h \in \mathcal{G}}{=} h(-(x-y)) + h(y+x) = h(y-x) + h(y+x) = h(2y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow h(2x) = h(2y)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = \|y\|$. Posons $x' = \frac{1}{2}x$ et $y' = \frac{1}{2}y$.

$\|x'\| = \|\frac{1}{2}x\| = |\frac{1}{2}|\,\|x\| = |\frac{1}{2}|\,\|y\| = \|\frac{1}{2}y\| = \|y'\|$. Alors $h(2x') = h(2y')$. Ainsi $h(x) = h(y)$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow h(x) = h(y)$.

b) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est toujours la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) = h(\sqrt{t}\, e_1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\|\,\|x\|\, e_1\| = |\,\|x\|\,|\ \|e_1\| = \|x\|\ \|e_1\| = \|x\|$.

Alors d'après a : $h(\|x\| e_1) = h(x)$. Donc $h(x) = h\left(\sqrt{\|x\|^2}\, e_1\right) = \varphi(\|x\|^2)$.

Il existe une application φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ h(x) = \varphi(\|x\|^2)$.

c) Notons que l'application φ proposée ci-dessus est continue sur $\mathbb{R}^+$. "En effet" $t \mapsto \sqrt{t}\, e_1$ est continue de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}^n$ et h est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Par "composition"...

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque... on peut le montrer sérieusement en utilisant la définition...

Soit $(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Montrons que $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$.

$\varphi(s) = h(\sqrt{s}\, e_1)$. $\varphi(t) = h(\sqrt{t}\, e_1) \underset{\|\sqrt{t} e_1\| = \|\sqrt{t} e_2\|}{=} h(\sqrt{t}\, e_2)$.

$\varphi(s) + \varphi(t) = h(\sqrt{s}\, e_1) + h(\sqrt{t}\, e_2)$.

Or $\sqrt{s}\, e_1$ et $\sqrt{t}\, e_2$ sont orthogonaux donc $\varphi(s) + \varphi(t) = h(\sqrt{s}\, e_1 + \sqrt{t}\, e_2)$

$\varphi(s) + \varphi(t) = \varphi(\|\sqrt{s}\, e_1 + \sqrt{t}\, e_2\|^2) \underset{(e_1,e_2) \text{ est une famille orthonormée}}{=} \varphi((\sqrt{s})^2 + (\sqrt{t})^2) = \varphi(s+t)$.

$\forall (s,t)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\ \varphi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t).$

d) Nous allons montrer en trois étapes que $\forall (s,t)\in\mathbb{R}_+^2,\ \varphi(st)=s\varphi(t).$

→ **E1.** Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(nt)=n\varphi(t).$

- $\varphi(0+0)=\varphi(0)+\varphi(0)$. Donc $\varphi(0)=2\varphi(0)$; $\varphi(0)=0$.

  Alors $\varphi(0\times t)=\varphi(0)=0=0\times\varphi(t)$. La propriété est vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour n et montrons-la pour $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$.

  $\varphi((n+1)t)=\varphi(nt+t)=\varphi(nt)+\varphi(t)=n\varphi(t)+\varphi(t)=(n+1)\varphi(t)$. Ceci achève la récurrence.
  L'hypothèse de récurrence.

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(nt)=n\varphi(t).$

→ **E2** Montrons que $\forall r\in\mathbb{Q}_+,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(rt)=r\varphi(t).$

Soit $r\in\mathbb{Q}_+$ et soit $t\in\mathbb{R}_+$. $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ r=\frac{\alpha}{\beta}.$

$$\varphi(rt)=\varphi\left(\alpha\left(\frac{t}{\beta}\right)\right)\underset{\substack{\alpha\in\mathbb{N}\\ t/\beta\in\mathbb{R}_+}}{=}\alpha\,\varphi\left(\frac{t}{\beta}\right)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\beta\varphi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right)\underset{\beta\in\mathbb{N}\text{ et }\frac{t}{\beta}\in\mathbb{R}_+}{=}\frac{\alpha}{\beta}\varphi\left(\beta\times\frac{t}{\beta}\right)=r\varphi(t).$$

$\forall r\in\mathbb{Q}^+,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(rt)=r\varphi(t).$

→ **E3** Montrons que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(xt)=x\varphi(t).$ Soit $x\in\mathbb{R}^+$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{Ent}(2^nx)\leq 2^nx<\mathrm{Ent}(2^nx)+1$ ↓ Petite variante pour changer de Q3 !!

$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{\mathrm{E}(2^nx)}{2^n}\leqslant x<\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}+\frac{1}{2^n}\ ;\quad 0\leqslant x-\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}<\frac{1}{2^n}$

Alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x-\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}\right)=0.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}=x.$

Notons que $\mathrm{Ent}(2^nx)\in\mathbb{N}$ et $2^n\in\mathbb{N}^*$ donc $\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}\in\mathbb{Q}_+$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=\frac{\mathrm{Ent}(2^nx)}{2^n}.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\in\mathbb{Q}_+$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(x_nt)=x_n\varphi(t)$. Notons que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_nt\in\mathbb{R}_+$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_nt)=xt$ et φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varphi(x_nt))=\varphi(xt).$

Alors $\varphi(xt) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n t) = \lim_{n\to+\infty} (x_n \varphi(t)) = x\varphi(t)$.

ceci achève de prouver que $\forall (x,t)\in \mathbb{R}_+^2,\ \varphi(xt) = x\varphi(t)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \varphi(x\times 1) = x\varphi(1)$. Posons $c = \varphi(1)$.

$c\in\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = cx$.

Ainsi $\forall u\in\mathbb{R}^n$, $h(u) = \varphi(\|u\|^2) = c\|u\|^2$.

ou (!) $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ h(x) = c\|x\|^2$.

(Q6) * Soit $f\in\mathcal{H}$. $\exists (h,g)\in(\mathcal{H}\cap\mathcal{P})\times(\mathcal{H}\cap\mathcal{I})$, $f = h+g$.

d'après Q5 d) : $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $h(x) = c\|x\|^2$.

d'après Q4 c) : g est linéaire.

donc $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ f(x) = c\|x\|^2 + g$ où $c\in\mathbb{R}$ et $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

* $c\in\mathbb{R}$ et $g\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Supposons $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x) = c\|x\|^2 + g$. Montrons que f appartient à $\mathcal{H}$. Il suffit de montrer que : $h : x\mapsto c\|x\|^2$ appartient à $\mathcal{H}\cap\mathcal{P}$ et que $g\in\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$.

→ • $\forall x = (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $g(x) = g(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \underset{\text{linéarité de } g}{=} \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) = \sum_{i=1}^n g(e_i) x_i$. Ainsi g est une fonction polynomiale, donc g est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

• $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow g(x+y) = g(x)+g(y)$ car g est linéaire !!

• comme g est linéaire $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $g(-x) = -g(x)$; $g\in\mathcal{I}$.

Les trois points précédents montrent que $g\in\mathcal{H}\cap\mathcal{I}$.

→ • $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $h(-x) = c\|-x\|^2 = c\|x\|^2 = h(x)$; $h\in\mathcal{P}$.

• Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ tel que $\langle u,v\rangle$.

Pythagore donne $\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2$.

Alors $h(u+v) = c\|u+v\|^2 = c(\|u\|^2+\|v\|^2) = c\|u\|^2 + c\|v\|^2 = h(u)+h(v)$.

• $\lim_{x\mapsto x_0} h(x) = \lim_{x\mapsto x_0} (c\|x\|) = c\|x_0\| = h(x_0)$ pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$. h est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

ceci achève de montrer que $h\in\mathcal{H}\cap\mathcal{P}$.

Alors $f = h + g$ avec $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$. Donc $f \in \mathcal{H}$.

Alors on peut conclure et dire que les éléments de $\mathcal{H}$ sont les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe c dans $\mathbb{R}$ et une application linéaire g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = c\|x\|^2 + g$.

$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = c\|x\|^2 + g(x) \}$.

si vous trouvez des erreurs importantes me le dire