Exercice principal S84

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{i,j} = \min(i,j)$.

2.a) Soit $L = (l_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire inférieure et $U = (u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure. On pose : $M = LU = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $m_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

b) En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^tTT$.

c) Montrer que les matrices A et T sont de même rang.

d) Justifier que A est diagonalisable et déduire des questions précédentes que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

e) Justifier l'inversibilité de A et déterminer son inverse.

3. Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

On note Σ_S la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

a) Montrer que les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.

b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, déterminer $\mathrm{Cov}(S_i, S_j)$.

c) Exprimer Σ_S en fonction de A.

Exercice sans préparation S84

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice principale S 84

Q1 M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) M est diagonalisable

ii) Il existe une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.

iii) M est semblable à une matrice diagonale

iv) L'endomorphisme canoniquement associé à M est diagonalisable.

v) $\sum_{\lambda \in sp M} \dim SEP(M,\lambda) = n$

$\bigoplus_{\lambda \in sp M} SEP(M,\lambda) = M_{n,1}(\mathbb{K})$

Q2 a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k}\, u_{k,j} \underset{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{j} l_{i,k}\, u_{k,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

U est triangulaire supérieure ($u_{k,j} = 0$ si $k > j$)

L est triangulaire inférieure ($l_{i,k} = 0$ si $i < k$)

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

b) Soit T la matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{R})$ telle que si $T = (t_{i,j})$:

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ t_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$. Posons ${}^tT = (t'_{i,j})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ t'_{i,j} = t_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}$. Notons que ${}^tT$ est triangulaire inférieure.

Alors d'après a) ${}^tTT = \left(\sum_{k=1}^{\min(i,j)} t'_{i,k}\, t_{k,j}\right) \underset{\uparrow}{=} \left(\sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1 \times 1\right) = \left(\min(i,j)\right) = A$.

Si $k \leq \min(i,j)$: $t'_{i,k} = t_{k,j} = 1$

Si $k > \min(i,j)$: $t'_{i,k} = 0$ ou $t_{k,j} = 0$

Soit T la matrice triangulaire supérieure telle que $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

${}^tTT = A$.

c) Montrons que $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

• Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors ${}^tTTX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $0_{\mathbb{R}} = {}^tX\,{}^tTTX = {}^t(TX)TX = \|TX\|^2$. Alors $\|TX\| = 0$.

Par conséquent $TX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $AX = {}^tTTX = {}^tT\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ceci achève de montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

Evitons d'expliciter le théorème du rang pour les matrices...

Soit f_A (resp. f_T) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. T).

Ce qui précède montre que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_T(x) = 0\}$. Ainsi $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} f_T$.

Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f_A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} f_A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} f_T = \operatorname{rg} f_T = \operatorname{rg} T$.

<u>A et T ont même rang.</u>

d) ${}^tA = {}^t({}^tTT) = {}^tT\,{}^t({}^tT) = {}^tTT = A$.

Alors A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

$AX = \lambda X$. $\lambda \|X\|^2 = \lambda \langle X, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \langle AX, X\rangle = \langle X, AX\rangle = \langle X, {}^tTTX\rangle = {}^tX({}^tTTX) = {}^t(TX)TX = \|TX\|^2$.

Donc $\lambda = \dfrac{\|TX\|^2}{\|X\|^2}$ car $\|X\| \neq 0$. Alors $\lambda = \left(\dfrac{\|TX\|}{\|X\|}\right)^2 \geqslant 0$.

Supposons que $\lambda = 0$. Alors $\|TX\|^2 = 0$. $\|TX\| = 0$. $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Par définition de T : $TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donne $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$. En faisant les opérations

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ..., $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ on obtient $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ainsi $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$!! Finalement $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda \neq 0$. $\lambda > 0$.

<u>Les valeurs propres de A sont strictement positives.</u>

e) Comme dans ce qui précède on a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ TX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi T est inversible. $n = \operatorname{rg} T \underset{Q2c)}{=} \operatorname{rg} A$. $\operatorname{rg} A = n$.

Alors <u>A est inversible.</u>

$A^{-1} = ({}^tTT)^{-1} = T^{-1}({}^tT)^{-1} = T^{-1}\,{}^tT^{-1}$. Cherchons T^{-1}.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $TX = Y$.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 \\ \quad \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$. En faisant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ..., $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ on obtient $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \quad \cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$.

Ainsi $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$T^{-1} = (\alpha_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } j=i+1 \text{ (suppose } j \geq 2 \text{ et } i \leq n-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

${}^tT^{-1} = (\alpha'_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha'_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } i=j+1 \text{ (suppose } j \leq n-1 \text{ et } i \geq 2). \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $A^{-1} = (\gamma_{i,j})$. $A^{-1} = T^{-1}\,{}^tT^{-1}$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{i,\ell}\, \alpha'_{\ell,j}$.

<u>1er cas.</u> $i \in [\![2, n-1]\!]$

$$\gamma_{i,j} = \alpha_{i,i}\,\alpha'_{i,j} + \alpha_{i,i+1}\,\alpha'_{i+1,j} = \alpha'_{i,j} - \alpha'_{i+1,j}.$$

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1-(-1) & \text{si } i=j \\ -1-0 & \text{si } i=j+1 \\ 0-1 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>2ème cas.</u> $i=1$.

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{1,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{1,\ell}\,\alpha'_{\ell,j} = \alpha_{1,1}\,\alpha'_{1,j} + \alpha_{1,2}\,\alpha'_{2,j} = \alpha'_{1,j} - \alpha'_{2,j}.$$

$\gamma_{i,j} = \gamma_{1,j} = \begin{cases} 1-(-1) & \text{si } j=1 \\ 0-1 & \text{si } j=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a encore $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>3ème cas</u> $i=n$

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{n,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{n,\ell}\,\alpha'_{\ell,j} = \alpha_{n,n}\,\alpha'_{n,j} = \alpha'_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \text{ ou } j=i \\ -1 & \text{si } j=n-1 \text{ ou } j=i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a "encore" $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>L'inverse de A est la matrice $A^{-1} = (\gamma_{i,j})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,</u> $\gamma_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j<n \\ 1 & \text{si } i=j=n \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(*) voir dernière page A^{-1}.

Q3) a) Soit λ une valeur propre de Σ_S. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$\lambda \|X\|^2 = \lambda \langle X, X\rangle = \langle X, \lambda X\rangle = \langle X, \Sigma_S X\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{cov}(S_i, S_j)\, y_j\right).$

$\lambda \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \,\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i S_i, \sum_{j=1}^n x_j S_j\right) = V\left(\sum_{i=1}^n x_i S_i\right) \geq 0$. $\lambda \|X\|^2 \geq 0$.

Or X n'est pas nul donc $\|X\|^2 > 0$. Ainsi $\lambda \geq 0$.

<u>Les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.</u>

b) et c) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^i X_k, \sum_{l=1}^j X_l\right) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \mathrm{cov}(X_k, X_l)$. Rappelons que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ indépendantes.

Alors $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(X_k, X_l) = \begin{cases} V(X_k) & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

donc $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(X_k, X_l) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>1er cas</u> : $i \leq j$. $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{k=1}^i \mathrm{cov}(X_k, X_k) = \sum_{k=1}^i V(X_k) = i\, p(1-p)$

<u>2ème cas</u> : $i > j$ $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{l=1}^j \sum_{k=1}^i \mathrm{cov}(X_k, X_l) = \sum_{l=1}^j \mathrm{cov}(X_l, X_l) = \sum_{l=1}^j V(X_l) = j\, p(1-p)$.

donc $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = \begin{cases} p(1-p)\, i & \text{si } i \leq j \\ p(1-p)\, j & \text{si } i > j \end{cases}$; $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = p(1-p) \min(i,j)$.

<u>$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(S_i, S_j) = p(1-p) \min(i,j)$.</u> <u>$\Sigma_S = p(1-p)\, A$.</u>

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>si vous trouvez des erreurs importantes me le dire.</u>