

D'après HEC 82

n est un entier naturel supérieur ou égal à deux. Une roue de loterie est schématisée par un disque de centre O , divisé en n secteurs égaux, mobile par rapport à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Les secteurs sont numérotés de 1 à n , dans le sens inverse du sens trigonométrique et chaque secteur a une mesure angulaire de $h = \frac{2\pi}{n}$ radians.

On note I le point situé au bord du disque, tel que le segment $[O, I]$ délimite les secteurs 1 et n .

Voir le schéma à la fin.

Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue dans le sens trigonométrique. Lorsque celle-ci s'arrête, le secteur rencontré par la demi-droite (O, \vec{i}) est dit gagnant (on suppose que la demi-droite (O, \vec{i}) , privée de O ..., à l'arrêt de la roue ne rencontre qu'un seul secteur).

La position initiale de la roue est la suivante : le point I est sur la demi-droite (O, \vec{i}) .

On note X la variable aléatoire égale à la mesure (en radian) de l'angle total dont a tourné la roue avant de s'arrêter (on prend en compte les tours effectués par la roue, donc X prend ses valeurs dans \mathbb{R}^{+*}).

On suppose que X est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} e^{x_0-t} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, x_0[\end{cases}$$

avec $x_0 = Nh$ où N est un entier naturel non nul.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro du secteur gagnant.

Dans la première partie, on étudie les variables X et Y . Dans la seconde partie, on étudie la probabilité qu'un joueur de gagner, lorsqu'il mise plusieurs fois.

On est prié de ne pas trop se poser de questions métaphysiques sur la frontière des secteurs. Coulez-vous dans la logique du texte qui a été posé comme cela. De plus, pour tout réel x , $P(X = x) = 0$...

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE 1

Q1 Loi de la variable aléatoire X .

- Déterminer la fonction de répartition F de X .
- Quelle est la fonction de répartition de la variable $(X - x_0)$? Quelle loi usuelle reconnaissez-vous?
- En déduire l'espérance et la variance de X .
- Soit s un élément de \mathbb{Z} . Calculer la probabilité de l'événement $\{(s-1)h \leq X < sh\}$ (on distinguera les cas $s \leq N$ et $s \geq N+1$).

Q2 Loi de la variable Y , égale au numéro du secteur gagnant.

- Soit k un élément de \mathbb{N} et q un élément de \mathbb{Z} . Montrer l'équivalence suivante :

$$nq + k > N \iff q \geq 1 + E\left(\frac{N-k}{n}\right)$$

où $E\left(\frac{N-k}{n}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{N-k}{n}$.

b) Montrer l'égalité d'événements :

$$\{Y = 1\} = \bigcup_{q=0}^{\infty} \{2q\pi \leq X < 2q\pi + h\} = \bigcup_{q=0}^{\infty} \{nqh \leq X < (nq + 1)h\}$$

c) Donner une expression analogue de l'événement $\{Y = k\}$ pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

d) En déduire que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(Y = k) = p_n(k) = \frac{e^{\frac{2\pi}{n}} - 1}{e^{2\pi} - 1} e^{2\pi[\frac{N-k}{n} - E(\frac{N-k}{n})]}$$

Q3 Espérance de Y dans le cas où N est un multiple de n .

$N = np$ où p est un élément de \mathbb{N}^* .

a) Montrer que pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{N - k}{n} - E\left(\frac{N - k}{n}\right) = 1 - \frac{k}{n}.$$

b) Montrer que l'espérance de Y vaut : $\frac{e^{\frac{2\pi}{n}}}{e^{\frac{2\pi}{n}} - 1} - \frac{n}{e^{2\pi} - 1}$ (on pourra au préalable calculer pour $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n kx^k$).

PARTIE 2

Dans cette partie : $n \geq 4$.

Pour tout entier naturel $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose : $p_k = p_n(k) = P(Y = k)$ et $a_k = p_{k-1} + p_k + p_{k+1}$, avec la convention : $p_0 = p_n$ et $p_1 = p_{n+1}$.

Le secteur de numéro n est aussi numéroté 0, et le secteur de numéro 1 est aussi numéroté $n+1$.

Dans toute cette partie, il est inutile de remplacer p_k par l'expression trouvée dans la partie précédente.

La loterie est utilisée avec la règle de jeu suivante : avant l'expérience, le joueur mise sur un secteur de son choix ; soit k le numéro de ce secteur ; après l'expérience, il perçoit le double de sa mise si la roue s'est arrêtée sur le secteur k , il est remboursé si la roue s'arrête sur le secteur $k-1$ ou sur le secteur $k+1$; il perd sa mise dans les $n-3$ autres cas.

Le joueur décide de tenter sa chance plusieurs fois consécutives, avec la méthode que voici : au premier coup, il mise sur un secteur choisi au hasard (les n choix sont équiprobables) ;

- si au $m^{\text{ème}}$ coup ($m \geq 1$) il a été remboursé ou s'il a doublé sa mise (on dit dans les deux cas qu'il a gagné au $m^{\text{ème}}$ coup), il mise au $(m + 1)^{\text{ème}}$ coup sur le même secteur qu'au $m^{\text{ème}}$ coup !!
- sinon (on dit alors qu'il a perdu au $m^{\text{ème}}$ coup), il choisit au hasard l'un des autres secteurs (les $n-1$ choix sont équiprobables).

On suppose que que les coups successifs constituent des expériences aléatoires indépendantes et identiques. Le point I de la roue est remis à sa position initiale sur la demi-droite $(0, \vec{i})$ après chaque expérience.

On adopte les notations suivantes :

- $S_k(m)$ est l'événement "le joueur choisit le secteur k au $m^{\text{ème}}$ coup" ; et la probabilité de cet événement est notée : $s_k(m)$.
- $G(m)$ est l'événement "le joueur gagne au $m^{\text{ème}}$ coup" et sa probabilité est notée $g(m)$.

• $g_k(m)$ est la probabilité conditionnelle que le joueur gagne au $m^{\text{ème}}$ coup, sachant qu'il a misé sur le secteur k .

Q1 Cas où $m=1$.

Calculer $s_k(1)$, $g_k(1)$ (en fonction a_k) et $g(1)$.

Q2 Cas général

a) Soit $m \geq 2$. Calculer $g_k(m)$ en fonction d'éléments de la suite (a_i) .

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul m :

$$s_k(m+1) = a_k s_k(m) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (1-a_i) s_i(m)$$

Q3 Pour tout entier non nul m , on pose :

$$U_m = \begin{pmatrix} s_1(m) \\ s_2(m) \\ \vdots \\ s_n(m) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice carrée M d'ordre n , à coefficients réels indépendants de m , telle que, pour tout entier naturel non nul m : $U_{m+1} = MU_m$.

b) En déduire, pour m dans \mathbb{N}^* , U_m en fonction de la de M , U_1 et m .

c) Montrer que pour tout entier naturel m non nul : $g_m = {}^t A M^{m-1} U_1$ où ${}^t A$ désigne la transposée de la matrice A .

Q4 Dans cette question, on choisit n assez grand pour que les nombres a_k où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puissent être supposés égaux.

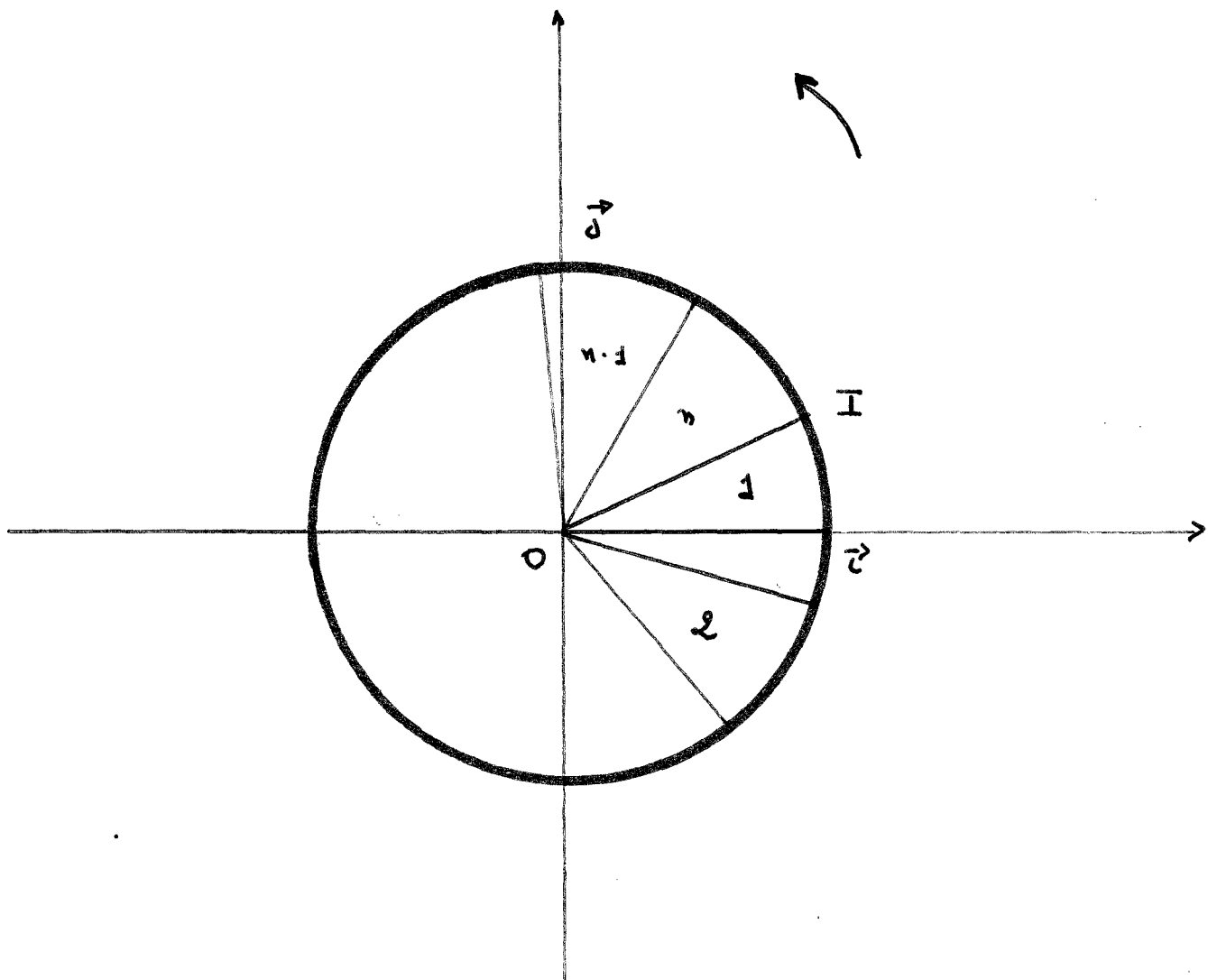
a) Montrer que la valeur commune des nombres a_k est $\frac{3}{n}$.

b) Montrer que M est combinaison linéaire des matrices I et J (où I désigne la matrice identité d'ordre n et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1).

On pourra poser pour simplifier les écritures : $M = \lambda I + \mu J$.

c) Pour tout entier naturel non nul p , calculer J^p . En déduire l'expression de M^{m-1} .

d) Déterminer la valeur de g_m .



PARTIE 1

(91) a) soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

si $x \in]-\infty, x_0[$, $F(x) = 0$ car f est nulle sur $]-\infty, x_0[$.

si $x \in [x_0, +\infty[$, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x e^{-\lambda(t-x_0)} dt = [-e^{-\lambda(t-x_0)}]_{x_0}^x = 1 - e^{-\lambda(x-x_0)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, x_0[\\ 1 - e^{-\lambda(x-x_0)} & \text{si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$.

b) Notons G la fonction de répartition de $X - x_0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(X - x_0 \leq x) = P(X \leq x + x_0) = F(x + x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + x_0 \in]-\infty, x_0[\\ 1 - e^{-\lambda(x+x_0-x_0)} & \text{si } x + x_0 \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Ainsi $X - x_0$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

c) Alors $X - x_0$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{\lambda} = 1$ et une variance qui

vaut $\frac{1}{\lambda^2} = 1$. Alors $X = (X - x_0) + x_0$ possède une espérance qui vaut

$1 + x_0$ et une variance qui vaut 1 .

$E(X) = 1 + x_0$ et $V(X) = 1$.

Dans l'énoncé j'ai mis r
à la place de \hat{q} .

d) soit $\hat{q} \in \mathbb{Z}$. $P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = F(\hat{q}h) - F((\hat{q}-1)h)$.

Rappelons que F est nulle sur $]-\infty, x_0[$ (et même sur $]-\infty, x_0]$.

Notons également que : $\hat{q}h \leq x_0 \Leftrightarrow \hat{q}h \leq Nh \Leftrightarrow \hat{q} \leq N$.

On a aussi : $(\hat{q}-1)h \geq x_0 \Leftrightarrow (\hat{q}-1)h \geq Nh \Leftrightarrow \hat{q}-1 \geq N \Leftrightarrow \hat{q} \geq N+1$

N devient alors naturel de distinguer deux cas.

1^{er} cas.. $\hat{q} \leq N$. Alors $\hat{q}h$ et $(\hat{q}-1)h$ sont dans $]-\infty, x_0]$.

Ainsi $P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = 0 - 0 = 0$.

2^{ème} cas... $\hat{q} > N$ ou $\hat{q} \geq N+1$. Alors $\hat{q}h$ et $(\hat{q}-1)h$ sont dans $[x_0, +\infty[$.

$$P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = F(\hat{q}h) - F((\hat{q}-1)h) = 1 - e^{-x_0/\hat{q}h} - 1 + e^{-x_0/(\hat{q}-1)h}$$

$$P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = e^{-x_0/\hat{q}h} (e^{-\hat{q}h} - 1) = e^{-(N-\hat{q})h} (e^h - 1).$$

$$\forall \hat{q} \in \mathbb{Z}, P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{q} \leq N \\ e^{-x_0/(\hat{q}-1)h} - e^{-x_0/\hat{q}h} = e^{-(N-\hat{q})h} (e^h - 1) & \text{si } \hat{q} > N \text{ ou } \hat{q} \geq N+1 \end{cases}$$

Q2 a) $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Supposons $nq+k > N$. Alors : $q > \frac{N-k}{n} \geq E(\frac{N-k}{n})$; ainsi $q > E(\frac{N-k}{n})$.

ce qui donne $q-1 \geq E(\frac{N-k}{n})$ car $q \notin E(\frac{N-k}{n})$ sont deux éléments de \mathbb{Z} .

Donc $nq+k > N \Rightarrow q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

Reciproquement supposons $q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

Alors $q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n}) > \frac{N-k}{n}$; $1q > N-k$; $nq+k > N$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{Z}, nq+k > N \Leftrightarrow q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

b) L'événement $\{Y=1\}$ est réalisé si et seulement si l'angle total dait

a tourné la roue appartient à un intervalle du type $[0 + q \times 2\pi, h + (q+1) \times 2\pi[$ ou q est un élément de \mathbb{N} .

Donc $\{Y=1\}$ est réalisé si et seulement si il existe un élément q de \mathbb{N} tel que l'événement $\{2q\pi \leq X < (2q+1)\pi + h\}$ soit réalisé.

$$\text{Ainsi } \{Y=1\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{2q\pi \leq X < (2q+1)\pi + h\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{nqh \leq X < (nq+1)h\}.$$

c) Soit $k \in]1, n[$. L'événement $\{Y=k\}$ est réalisé si et seulement si l'angle total dait a tourné la roue appartient à un intervalle du type $[(k-1)h + q \times 2\pi, kh + q \times 2\pi[$ où $q \in \mathbb{Z}$.

$\{Y=k\}$ est réalisé si et seulement si on peut trouver q dans \mathbb{N} tel que l'événement $\{2q\pi + (k-1)h \leq X < 2q\pi + kh\}$ soit réalisé. Ainsi:

$$\forall k \in \llbracket j, n \rrbracket, \{Y=k\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{2q\pi + (k-1)h \leq X < 2q\pi + kh\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{(nq+k-1)h \leq X < (nq+k)h\}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $2\pi = nh$

d) doit $k \in \llbracket j, n \rrbracket$.

$$P(Y=k) = P\left(\bigcup_{q=0}^{+\infty} \{(nq+k-1)h \leq X < (nq+k)h\}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty} P((nq+k-1)h \leq X < (nq+k)h).$$

union disjointe

d'après Q 3 a), si q et dans \mathbb{N} : $P((nq+k-1)h \leq X < (nq+k)h) = \begin{cases} e^{-(nq+k)h} & \text{si } nq+k \leq N \\ (e^{-1})^{nq+k} & \text{si } nq+k \geq N+1 \end{cases}$

d'après Q 2 a) $nq+k \geq N+1 \Leftrightarrow Nq+k > N \Leftrightarrow q \geq j + E\left(\frac{N-k}{n}\right)$.

$$\text{Ainsi } P(Y=k) = \sum_{q=j+E\left(\frac{N-k}{n}\right)}^{+\infty} e^{-(nq+k)h} (e^{-1})^{nq+k} = e^{-(N-k)h} (e^{-1})^{N-k} \sum_{q=j+E\left(\frac{N-k}{n}\right)}^{+\infty} (e^{-n})^q.$$

$$P(Y=k) = e^{-(N-k)h} (e^{-1})^{N-k} (e^{-n})^{j+E\left(\frac{N-k}{n}\right)} \frac{1}{1 - e^{-nh}}. \text{ Rappelons que } h = \frac{2\pi}{n}.$$

$$\text{Ainsi finalement: } P(Y=k) = e^{\frac{2\pi(N-k)}{n}} e^{-2\pi E\left(\frac{N-k}{n}\right)} (e^{\frac{2\pi}{n}})^{j+E\left(\frac{N-k}{n}\right)} \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

$$a \quad \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{1}{e^{2\pi}(1 - e^{-2\pi})} = \frac{1}{e^{2\pi} - 1}$$

$$\text{Finalement: } \forall k \in \llbracket j, n \rrbracket, P(Y=k) = \frac{e^{\frac{2\pi}{n} \cdot j - 1}}{e^{2\pi} - 1} e^{2\pi \left[\frac{N-k}{n} \cdot E\left(\frac{N-k}{n}\right) \right]}$$

Q3 a) doit être \mathbb{N} .

$p \in \mathbb{Z}!$

$$\frac{N \cdot k}{n} = \frac{n \cdot k}{n} = p \cdot \frac{k}{n}. \quad E\left(\frac{N \cdot k}{n}\right) = E\left(p \cdot \frac{k}{n}\right) = p + E\left(-\frac{k}{n}\right).$$

$$a - \frac{k}{n} \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \text{ donc } E\left(-\frac{k}{n}\right) = -1. \text{ Ainsi } E\left(\frac{N \cdot k}{n}\right) = p - 1 \text{ et}$$

$$\frac{N \cdot k}{n} - E\left(\frac{N \cdot k}{n}\right) = p \cdot \frac{k}{n} - (p - 1) = 1 - \frac{k}{n}.$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \frac{N \cdot k}{n} - E\left(\frac{N \cdot k}{n}\right) = 1 - \frac{k}{n}.$$

b) d'après ce qui précède : $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k) = \frac{e^{\frac{i\pi}{n} - 1}}{e^{i\pi} - 1} e^{2n\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k) = \frac{e^{\frac{i\pi}{n} - 1}}{e^{i\pi} - 1} e^{i\pi} e^{-k\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = A e^{-k\theta} = A e^{\theta} \dots$$

En posant $A = \frac{e^{\frac{i\pi}{n} - 1}}{e^{i\pi} - 1} e^{i\pi}$ et $t = e^{-\theta}$, $E(Y) = A \sum_{k=1}^{\infty} k t^k = A t \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En dérivant il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} [-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)] = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

$$\text{Ainsi } E(Y) = A t \frac{1 + n t^{n+1} - (n+1)t^n}{(1-t)^2} = A e^{-\frac{i\pi}{n}} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{i\pi}{n}})^2} (1 + n e^{-\frac{i\pi}{n}} e^{-i\pi} - (n+1)e^{-i\pi}).$$

$$E(Y) = \frac{e^{\frac{i\pi}{n} - 1}}{e^{i\pi} - 1} e^{i\pi} e^{-\frac{i\pi}{n}} \frac{1}{(e^{-\frac{i\pi}{n}})^2 (e^{\frac{i\pi}{n}} - 1)^2} (1 + n e^{-i\pi/n} e^{-i\pi} - (n+1)e^{-i\pi}).$$

$$E(Y) = \frac{e^{i\pi} e^{i\pi/n}}{(e^{i\pi} - 1)(e^{\frac{i\pi}{n}} - 1)} \left[1 - e^{-i\pi} - n e^{-i\pi} (1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}) \right].$$

$$E(Y) = \frac{e^{i\pi/n} e^{i\pi/n} (1 - e^{-i\pi})}{e^{i\pi} (1 - e^{-i\pi}) (e^{i\pi/n} - 1)} - n \frac{e^{i\pi/n} (1 - e^{-i\pi/n})}{(e^{i\pi} - 1) (e^{i\pi/n} - 1) (1 - e^{-i\pi/n})}$$

$$E(Y) = \frac{e^{i\pi/n}}{e^{i\pi/n} - 1} - \frac{n}{e^{i\pi} - 1}$$

PARTIE 2

(Q1) Au premier coup le joueur mise sur un nombre au hasard donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}_k(\omega) = \frac{1}{n}$$

Pourtant k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$ nous noterons $A_k(m)$ l'événement au $m^{\text{ième}}$ coup le numéro du jeton gagnant est k , et ceci pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, g_k(m) = P(G(m) | S_k(m)) = P(A_{k-1}(m) \cup A_k(m) \cup A_{k+1}(m))$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, g_k(m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unions disjointes}}}{=} P(A_{k-1}(m)) + P(A_k(m)) + P(A_{k+1}(m)) = P_{k-1} + P_k + P_{k+1} = \alpha_k$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, g_k(m) = \alpha_k. \text{ En particulier : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, g_k(\omega) = \alpha_k$$

$(S_k(\omega))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités

$$\text{totales donne alors : } g_1 = P(G(\omega)) = \sum_{k=1}^n P(G(\omega) | S_k(\omega)) P(S_k(\omega)) = \sum_{k=1}^n g_k(\omega) \mathcal{P}_k(\omega)$$

$$g_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (P_{k-1} + P_k + P_{k+1}) = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n P_{k-1} + \sum_{k=1}^n P_k + \sum_{k=1}^n P_{k+1} \right]$$

$$g_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k + \sum_{k=1}^n P_k + \sum_{k=2}^{n+1} P_k \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n P_k + P_0 - P_n + \sum_{k=1}^n P_k + \sum_{k=1}^n P_k + P_{n+1} - P_1 \right)$$

$$\text{comme } \sum_{k=1}^n P_k = 1, P_0 = P_n \text{ et } P_1 = P_{n+1} : g_1 = \frac{1}{n} \times 3. \quad \underline{\underline{g_1 = \frac{3}{n}}}$$

Q2 a) déjà fait ! Nous avons vu plus haut que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, q_k(m) = a_k.$$

b) soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$(G(m), \overline{G(m)})$ est un système complet d'événements.

$$\text{Alors } P_k(m+1) = P(S_k(m+1)) = P(S_k(m+1) \cap G(m)) + P(S_k(m+1) \cap \overline{G(m)}).$$

$(S_i(m))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est également un système complet d'événements.

$$\text{Ainsi } P_k(m+1) = \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1) \cap G(m) \cap S_i(m)) + \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1) \cap \overline{G(m)} \cap S_i(m))$$

$$\text{Alors } P_k(m+1) = \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m)) P(G(m)/S_i(m)) P(S_i(m)) + \\ \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m)) P(\overline{G(m)}/S_i(m)) P(S_i(m))$$

$$P_k(m+1) = \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m)) g_i(m) \Delta_i(m) + \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m)) (1-g_i(m)) \Delta_i(m)$$

$$P_k(m+1) = \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m)) a_i \Delta_i(m) + \sum_{i=1}^n P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m)) (1-a_i) \Delta_i(m)$$

Analysons les probabilités conditionnelles de l'égalité précédente.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$ (lorsqu'il y a une victoire au $m^{\text{ième}}$ coup, on ne peut pas gagner au $(m+1)^{\text{ième}}$ coup, mais on peut gagner au $m^{\text{ième}}$ coup).

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = k \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq k \end{cases}$ (lorsqu'il y a une défaite au $m^{\text{ième}}$ coup, on ne peut pas gagner au $(m+1)^{\text{ième}}$ coup, mais on peut gagner au $(m+1)^{\text{ième}}$ coup sur un tirage aléatoire de celui sur lequel il a nié au $m^{\text{ième}}$ coup, le choix se fait au hasard).

$$\text{Alors } P_k(m+1) = a_k P_k(m) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{n-1} (1-a_i) \Delta_i(m).$$

Finalement $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \Delta_k(n+1) = a_k \Delta_k(n) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (1-a_i) \Delta_i(n)$

Q3 a) Posons $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, d_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{si } i=j \\ \frac{1}{n-1} (1-a_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Considérons la matrice $\pi = (d_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$.

→ les coefficients de π ne dépendent pas de n !

→ $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \Delta_i(n+1) = a_i \Delta_i(n) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1-a_j) \Delta_j(n)$

Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \Delta_i(n+1) = \sum_{j=1}^n d_{ij} \Delta_j(n) = \sum_{j=1}^n d_{ij} \Delta_j(n)$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, U_{m+1} = \pi U_m$, où $\pi = (d_{ij})$ est l'élément de $M_n(\mathbb{R})$ défini

par $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, d_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{si } i=j \\ \frac{1}{n-1} (1-a_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$

b) Une récurrence simple donne alors $\forall m \in \mathbb{N}^*, U_m = \pi^{m-1} U_1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $g_n = P(G(n)) = \sum_{k=1}^n P(G(n) | S_k(n)) P(S_k(n)) = \sum_{k=1}^n g_k(n) \Delta_k(n)$
($S_k(n) \in \mathcal{E}_{1,n}$) et un système complet d'événements.

$g_n = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n)$
 $g_n = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_k(n)$

$g_k(n) = a_k$

Q4 a) Noter, par exemple, la valeur connue de a_1, a_2, \dots, a_n .

Nous avons vu dans Q3 que : $\frac{3}{n} = g_3 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Alors $na = \sum_{k=1}^n a_k = 3$

Alors $a = \frac{3}{n}$. Ainsi $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = \frac{3}{n}$.

b) $J = (\beta_{ij})$ avec $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \beta_{ij} = 1$.

Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

• $i \neq j$ $d_{ij} = \frac{1}{n-3} (1 - a_j) = \frac{1}{n-3} (1 - \frac{3}{n}) = \frac{n-3}{n(n-3)} = \frac{n-3}{n(n-3)} \beta_{ij}$.

• $i = j$ $d_{ij} = a_i = \frac{3}{n} = (\frac{3}{n} - \frac{n-3}{n(n-3)}) \times 1 + \frac{n-3}{n(n-3)} = \frac{3n}{n(n-3)} \times 1 + \frac{n-3}{n(n-3)} \beta_{ij}$

Finalement : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, d_{ij} = \begin{cases} \frac{3}{n-3} \times 0 + \frac{n-3}{n(n-3)} \beta_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \frac{3n}{n(n-3)} \times 1 + \frac{n-3}{n(n-3)} \beta_{ij} & \text{si } i = j \end{cases}$

Ainsi $\Pi = \frac{3}{n-3} I + \frac{n-3}{n(n-3)} J$.

Pour $\lambda = \frac{2}{n-1}$ et $\mu = \frac{n-3}{n(n-3)}$, $\Pi = \lambda I + \mu J$.

c) Pour $J^2 = (\sigma_{ij})$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^n 1 = n = n \beta_{ij}$

Ainsi $J^2 = nJ$

Une récurrence simple donne alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = n^{p-1} J$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. λI et μJ commutent donc :

$(\lambda I + \mu J)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (\lambda I)^{k-p} (\mu J)^p = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \mu^p J^p = \lambda^k I + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \mu^p n^{p-1} J$

$(\lambda I + \mu J)^k = \lambda^k I + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} \lambda^{k-p} (n \mu)^p J = \lambda^k I + \frac{1}{n} [(\lambda + n \mu)^k - \lambda^k] J$

$(\lambda I + \mu J)^k = \lambda^k I + \frac{1}{n} [(\lambda + n \mu)^k - \lambda^k] J$. Notons que ceci vaut aussi

pour $k = 0$ ou 1 ?

$$\text{Alors } \forall m \in \mathbb{N}^*, \pi^{m-1} = \lambda^{m-1} I + \frac{1}{n} [(\lambda + n\beta)^{m-1} - \lambda^{m-1}] J.$$

$$\lambda = \frac{2}{n-3} \text{ et } \beta = \frac{n-3}{n(n-3)}. \quad \lambda + n\beta = \frac{2}{n-3} + \frac{n-3}{n-3} = 1.$$

$$\text{Ainsi } \forall m \in \mathbb{N}^*, \pi^{m-1} = \left(\frac{2}{n-3}\right)^{m-1} I + \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{2}{n-3}\right)^{m-1}\right) J.$$

d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$q_m = {}^t A \pi^{m-1} U_1 = {}^t A \left(\lambda^{m-1} I + \frac{1}{n} (1 - \lambda^{m-1}) J \right) U_1.$$

$$q_m = \lambda^{m-1} {}^t A U_1 + \frac{1}{n} (1 - \lambda^{m-1}) {}^t A J U_1.$$

$$\text{Or } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{3}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } {}^t A U_1 = \frac{3}{n^2} (1 \dots 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{n^2} \times n = \frac{3}{n}.$$

$${}^t A J U_1 = \frac{3}{n} \frac{1}{n} (1 \dots 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{n^2} (1 \dots 1) \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \frac{3}{n^2} \times n^2 = 3.$$

$$\text{Alors } q_m = \lambda^{m-1} \times \frac{3}{n} + \frac{1}{n} (1 - \lambda^{m-1}) \times 3 = \frac{3}{n} (\lambda^{m-1} + 1 - \lambda^{m-1}) = \frac{3}{n}.$$

$$\text{Ainsi } \forall m \in \mathbb{N}^*, \underline{q_m = \frac{3}{n} !}$$