HEC 2011 Sujet 113 - Exercice

Q1. Question de cours : Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles le même rang ?

Q2. Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) qui ont moins une valeur propre commune ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dans cette question j'ai remplacé le $\mathbb{R}$ *du texte par* $\mathbb{K}$. *Dans la correction je reste fidèle au texte original...*

a) Démontrer qu'il existe un élément α de $\mathbb{K}$ et deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que ${}^tAX = \alpha X$ et $BY = \alpha Y$.

b) En déduire qu'il existe une matrice carrée non nulle M telle que $MA = BM$.

c) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont une valeur propre commune et trouver une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

Q3. Dans cette question a est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

a) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que, si z est un nombre complexe qui n'est pas valeur propre de a et si le polynôme $P = (X - z)\,Q$ est un polynôme annulateur de a, Q est alors aussi un polynôme annulateur annulateur de a.

b) Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de a dont les seules racines sont les valeurs propres de a (*comment on cause à HEC ! !*).

Q4. Dans cette question, on examine la réciproque de la propriété trouvée en Q2 et on considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une matrice non nulle M telle que $MA = BM$.

a) Que peut-on dire des valeurs propres de A et de B lorsque M est inversible ?

b) Démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $MP(A) = P(B)M$.

c) Démontrer, à l'aide de Q3, que A et B ont nécessairement une valeur propre commune.

Q1 Le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes (resp. ses lignes). C'est aussi le rang de toute application linéaire "associée".

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Q2 a) Soit α une valeur propre commune à A et B.

$A-\alpha I_n$ n'est pas inversible donc ${}^tA-\alpha I_n = {}^t(A-\alpha I_n)$ n'est pas inversible.

Alors α est valeur propre de ${}^tA$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAX = \alpha X$.

$\alpha \in Sp\, B$ donc $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BY = \alpha Y$.

b) ${}^tAX = \alpha X$ donc ${}^tX A = \alpha\, {}^tX$. $Y\,{}^tX A = \alpha Y\,{}^tX$.

$BY = \alpha Y$; $BY\,{}^tX = \alpha Y\,{}^tX$.

Posons $M = Y\,{}^tX$. $MA = Y\,{}^tXA = \alpha Y\,{}^tX = BY\,{}^tX = BM$. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $MA = MA$.

Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{j_0} \neq 0$ et $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $y_{i_0} \neq 0$ car X et Y sont non nulles.

$M = Y\,{}^tX = (y_i x_j)_{\substack{1\le i\le n \\ 1 \le j \le n}}$ de plus $y_{i_0} x_{j_0} \neq 0$ donc $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $MA = BM$.

Remarque. Tout ceci vaut encore pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp\, A \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$.

Alors $Sp\, A = \{-1, 3\}$.

B est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

$Sp\, B = \{1, 3\}$

A et B ont une valeur propre commune 3.

${}^tA = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $X \neq 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ et ${}^tAX = AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $BY = 3Y$.

Posons alors $M = Y\,{}^tX$. D'après ce qui précède $MA = BM$.

$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $MA = BM$.

Remarque.. $MA = BM = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Q3) a) Pour simplifier posons $E = \mathbb{C}^n$. $a \in \mathcal{L}(E)$.

$z \in \mathbb{C}$ et $P = (X - z)\,Q$ est un polynôme annulateur de a. $P(a) = (a - z\,Id_E) \circ Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Supposons que z n'est pas valeur propre. Alors $a - z\,Id_E$ est un endomorphisme injectif de E.

$\forall x \in E$, $((a - z\,Id_E) \circ Q(a))(x) = 0_E$. $\forall x \in E$, $(a - z\,Id_E)(Q(a)(x)) = 0_E$.

Alors $\forall x \in E$, $Q(a)(x) \in \mathrm{Ker}(a - z\,Id_E)$. Or $\mathrm{Ker}(a - z\,Id_E) = \{0_E\}$ car $a - z\,Id_E$ est injectif.

Ainsi $\forall x \in E$, $Q(a)(x) = 0_E$. $Q(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Q est un polynôme annulateur de a.

b) Le cours montre que a possède un polynôme annulateur non nul.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de a.

Posons encore $\mathcal{D} = \{\deg S \,;\, S \in \mathcal{S}\}$. $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc $\mathcal{D}$ possède un plus petit élément d_0. $\exists S_0 \in \mathcal{S}$, $\deg S_0 = d_0$.

S_0 est un polynôme annulateur de a donc $\mathrm{Sp}\,a \subset \{z \in \mathbb{C} \mid S_0(z) = 0\}$.

Réciproquement soit z_0 une racine de S_0. Montrons que $z_0 \in \mathrm{Sp}\,a$.

Supposons que z_0 n'est pas valeur propre de a. z_0 est racine de S_0 donc il existe un élément Q_0 de $\mathbb{C}[X]$ tel que $S_0 = (X - z_0)Q_0$.

D'après a) Q_0 est un polynôme annulateur de a. De plus $Q_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ car $S_0 \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

Alors $Q_0 \in \mathcal{S}$ donc $\deg Q_0 \in \mathcal{D}$. Or $\deg Q_0 = \deg S_0 - 1 = d_0 - 1$.

Donc $d_0 - 1 \in \mathcal{D}$ et d_0 est le plus petit élément de $\mathcal{D}$!! ceci est impossible.

Alors $z \in \mathrm{Sp}\,A$. Ceci achève de montrer que toute racine de S_0 est une valeur propre de a. Ainsi LES racines de S_0 sont LES valeurs propres de a.

Il existe un polynôme annulateur (non nul) de a dont LES racines sont LES valeurs propres de a.

S_0 n'est pas nul.

Remarques 1.. Supposons S_0 constant ! $\exists c \in \mathbb{C}^*$, $S_0 = c$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = S_0(a) = c\,Id_E$ et $c \neq 0$ donc $0_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$. Ceci est impossible car $\dim E \geqslant 1$. Alors $\deg S_0 \geqslant 1$. Comme $S_0 \in \mathbb{C}[X]$, S_0 a au moins une racine. Ainsi a admet au moins une valeur propre.

Plus généralement tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, possède au moins une valeur propre.

2.. Soit c_0 le coefficient du terme de plus haut degré. Posons $T_0 = \frac{1}{c_0} S_0$.

T_0 est le polynôme annulateur non nul unitaire de a de degré minimum.

T_0 est le polynôme minimal de a. Exercice.. Montrer l'unicité de T_0.

(Q4) a) Supposons M est inversible. $MA = BM$ donc $A = M^{-1}BM$.

Alors A et B sont semblables donc A et B ont les mêmes valeurs propres.

Soit $\hat{a}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

D'après la remarque 1, $\hat{a}$ admet au moins une valeur propre.

Ainsi A admet au moins une valeur propre α. α est également valeur propre de B.

Donc A et B ont au moins une valeur propre commune.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} \beta_k X^k$.

Commençons par démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $MA^k = B^k M$.

- La propriété est vraie pour $k=0$ car $A^0 = B^0 = I_n$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$MA^{k+1} = (MA^k)A = (B^k M)A = B^k(MA) = B^k(BM) = B^{k+1}M$.

$MA^{k+1} = B^{k+1}M$ et la récurrence s'achève.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $MA^k = B^k M$.

$\Pi P(A) = \Pi\left(\sum_{\ell=0}^{r} \beta_\ell A^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{r} \beta_\ell \Pi A^\ell = \sum_{\ell=0}^{r} \beta_\ell B^\ell \Pi = \left(\sum_{\ell=0}^{r} \beta_\ell B^\ell\right) \Pi = P(B)\Pi.$

$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \Pi P(A) = P(B)\Pi$.

c) Reprenons l'endomorphisme $\hat{a}$ de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Il existe un polynôme annulateur $\hat{S}_0$ de $\hat{a}$ tel que les racines de $\hat{S}_0$ coïncident avec les valeurs propres de $\hat{a}$. $\hat{S}_0$ est nécessairement non nul (!! car $\hat{a}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Supposons que $\hat{S}_0$ est constant. $\exists \hat{c} \in \mathbb{C}^*$, $\hat{S}_0 = \hat{c}$.
Alors $0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)} = \hat{S}_0(\hat{a}) = \hat{c}\, Id_{\mathbb{C}^n}$ donc $Id_{\mathbb{C}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ car $\hat{c} \neq 0$. Ceci est impossible car $\dim \mathbb{C}^n = n \geq 1$ (raisonnement déjà fait mais que je préfère refaire ici...).
Ainsi $\deg \hat{S}_0 \geq 1$. $\hat{S}_0$ est un polynôme annulateur de $\hat{a}$ donc de A. $\hat{S}_0(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
D'après b) $\Pi \hat{S}_0(A) = \hat{S}_0(B)\Pi$. Alors $\hat{S}_0(B)\Pi = \Pi \hat{S}_0(A) = \Pi 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
Si $\hat{S}_0(B)$ est inversible : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = (\hat{S}_0(B))^{-1} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = (\hat{S}_0(B))^{-1}\hat{S}_0(B)\Pi = \Pi$, donc $\Pi = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$!
Ainsi $\hat{S}_0(B)$ n'est pas inversible.
$\hat{S}_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg \hat{S}_0 \geq 1$ donc $\hat{S}_0$ est scindé.
$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists \gamma \in \mathbb{C}^*, \exists (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \mathbb{C}^p$, $\hat{S}_0 = \gamma(X-\gamma_1)(X-\gamma_2)\dots(X-\gamma_p)$.
$\hat{S}_0(B)$ n'est pas inversible donc $\gamma(B-\gamma_1 I_n)(B-\gamma_2 I_n)\dots(B-\gamma_p I_n)$ n'est pas inversible.
Or γ n'est pas nul donc $(B-\gamma_1 I_n)(B-\gamma_2 I_n)\dots(B-\gamma_p I_n)$ n'est pas inversible.
Or un produit de matrices inversibles est inversible. Par conséquent il existe $k_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que $B-\gamma_{k_0} I_n$ ne soit pas inversible. Alors γ_{k_0} est une valeur propre de B.
Mais γ_{k_0} est aussi un zéro de $\hat{S}_0$ donc une valeur propre de $\hat{a}$ ... et de A.
Donc γ_{k_0} est une valeur propre de A et de B.

A et B ont au moins une valeur propre commune.

Question 11 **S 113** On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.

Q1 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(S_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire N_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des X_k et dont la loi est donnée par :

$N_n(\Omega) = \{n, n+1\}$ et $P(N_n = n) = P(N_n = n+1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

a) $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ T_n(\omega) = S_{N_n(\omega)}$.

b) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité $P(T_n \geqslant n + \sqrt{n})$?

Cours *Rappeler la définition du rang d'une matrice. Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement le même rang ?*

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ou $X_k \hookrightarrow \Gamma(1,1)$ ou $X_k \hookrightarrow \gamma(1)$.

Le cours montre alors que : $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)$ ou $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Donc S_n suit la loi gamma de paramètres 1 et n ou la loi gamma de paramètre n.

b) $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, ayant même loi, d'espérance 1 et de variance 1.

Le théorème de la limite centrée montre alors que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leqslant x\right) = \phi(x)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \underset{S_n \hookrightarrow \Gamma(1,n)}{=} \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 1\right) = \phi(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n + \sqrt{n}) = \phi(1)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n > n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} (1-P(S_n \leq n+\sqrt{n})) = 1-\phi(1)$$

S_n est à densité.

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \geq n+\sqrt{n}) = 1-\phi(1) = \phi(-1) \simeq 0,1587$$

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit F_{T_n} la fonction de répartition de T_n. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$(\{N_n=n\}, \{N_n=n+1\})$ est un système complet d'événements

Alors $P(T_n\leq x) = P(\{T_n\leq x\}\cap\{N_n=n\}) + P(\{T_n\leq x\}\cap\{N_n=n+1\})$

$P(T_n\leq x) = P(\{S_n\leq x\}\cap\{N_n=n\}) + P(\{S_{n+1}\leq x\}\cap\{N_n=n+1\})$.

$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ et N_n sont indépendantes donc S_n et N_n (resp. S_{n+1} et N_n) sont indépendantes.

Alors $F_{T_n}(x) = P(T_n\leq x) = P(S_n\leq x)P(N_n=n) + P(S_{n+1}\leq x)P(N_n=n+1)$.

$$F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[P(S_n\leq x) + P(S_{n+1}\leq x)\right].$$

Notons F_n et F_{n+1} les fonctions de répartition de S_n et S_{n+1}.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \frac{1}{2}\left[F_{S_n}(x) + F_{S_{n+1}}(x)\right]$.

F_{S_n} et $F_{S_{n+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.

Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{S_{n+1}}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n}}{n!} & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f_{S_n} (resp. $f_{S_{n+1}}$) est une densité continue sur $\mathbb{R}^*$ de S_n (resp. S_{n+1}). Alors F_{S_n} (resp. $F_{S_{n+1}}$) est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{S_n}(x) = f_{S_n}(x)$ et $F'_{S_{n+1}}(x) = f_{S_{n+1}}(x)$.

$F_{T_n} = \frac{1}{2}[F_{S_n} + F_{S_{n+1}}]$.

Alors F_{T_n} est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

ceci achève de montrer que T_n est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(F'_{S_n}(x) + F'_{S_{n+1}}(x)) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{T_n}(x) = \frac{1}{2}(f_{S_n}(x) + f_{S_{n+1}}(x))$.

g_{T_n} est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_{T_n} sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Alors g_{T_n} est une densité de T_n.

$E(S_n)$ (resp. $E(S_{n+1})$) existe et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_n}(t)\,dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{S_{n+1}}(t)\,dt$) converge et vaut n (resp. $n+1$).

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(n+(n+1))$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

$E(T_n)$ existe et vaut $\frac{2n+1}{2}$.

S_n et S_{n+1} possèdent un moment d'ordre 2 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$ convergent.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{1}{2}(f_{S_n}(t) + f_{S_{n+1}}(t))\right)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_n}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{S_{n+1}}(t)\,dt$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{T_n}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}(E(S_n^2) + E(S_{n+1}^2))$.

Alors T_n possède un moment d'ordre 2 qui vaut $\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]$

Ainsi <u>T_n possède une variance.</u>

$$V(T_n)=E(T_n^2)-(E(T_n))^2=\frac{1}{2}\left[E(S_n^2)+E(S_{n+1}^2)\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[V(S_n)+(E(S_n))^2+V(S_{n+1})+(E(S_{n+1}))^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2.$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}\left[n+n^2+(n+1)+(n+1)^2\right]-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

$$V(T_n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+(n+1))-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2=(n+1)^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=\left(n+1+n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1-n-\frac{1}{2}\right).$$

$$V(T_n)=(2n+3/2)(1/2)=n+\frac{3}{4}.$$

$$\boxed{V(T_n)=n+\frac{3}{4}.}$$

T_n est une variable aléatoire à densité.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P(T_n\geqslant n+\sqrt{n})=1-P(T_n<n+\sqrt{n})=1-P(T_n\leqslant n+\sqrt{n})$

$$P(T_n\geqslant n+\sqrt{n})=1-F_{T_n}(n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}\left[F_{S_n}(n+\sqrt{n})+F_{S_{n+1}}(n+\sqrt{n})\right]$$

$$P(T_n\geqslant n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n\leqslant n+\sqrt{n})-\frac{1}{2}P(S_{n+1}\leqslant n+\sqrt{n}).$$

$$P(T_n\geqslant n+\sqrt{n})=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leqslant 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leqslant\frac{n+\sqrt{n}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{2}P(S_n^*\leqslant 1)-\frac{1}{2}P\left(S_{n+1}^*\leqslant\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\begin{cases} S_n^*=\dfrac{S_n-n}{\sqrt{n}}\\[2mm] S_{n+1}^*=\dfrac{S_{n+1}-(n+1)}{\sqrt{n+1}}\end{cases}$$

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leqslant x)=\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leqslant x)=\phi(x)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_n^*\leqslant 1)=\phi(1)$. Ne reste plus qu'à trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(S_{n+1}^*\leqslant\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}=1$ car $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$ ... et que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(S_{n+1}^*\leqslant 1)=\phi(1)$

Montrons alors que $\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) = \phi(1)$ en utilisant la définition.

<u>Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.</u> Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

ϕ est continue en 1 donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-1| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{2}$. $1-\alpha \in \mathbb{R}$ et $|(1-\alpha)-1| = |\alpha| \underset{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}{=} \alpha < \eta$. Alors $|\phi(1-\alpha) - \phi(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $-\frac{\varepsilon}{2} < \phi(1-\alpha) - \phi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous retiendrons que $\underline{-\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) \overset{\boxed{(1)}}{<} \phi(1-\alpha)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq 1 \right)$.

Alors $\{S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\} \subset \{S_{n+1}^* \leq 1\}$ donc $P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^* \leq 1)$.

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} - 1\right| < \alpha$ car $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $1-\alpha < \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}} < 1+\alpha$.

donc $\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![$, $\{S_{n+1}^* \leq 1-\alpha\} \subset \{S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\}$ et $P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}})$.

Ainsi $\underline{\forall n \in [\![n_1, +\infty[\![, \quad P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \leq P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \leq P(S_{n+1}^* \leq 1)}$. $\boxed{(2)}$

$\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) = \phi(1-\alpha)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1}^* \leq 1) = \phi(1)$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) - \phi(1-\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n_3 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_3 \Rightarrow |P(S_{n+1}^* \leq 1) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Alors :

$\underline{\forall n \in [\![n_2, +\infty[\![, \quad \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \overset{\boxed{(3)}}{<} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha)}$ et $\underline{\forall n \in [\![n_3, +\infty[\![, \quad P(S_{n+1}^* \leq 1) \overset{\boxed{(4)}}{<} \phi(1) + \varepsilon}$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$.

$$\phi(1) - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} + \phi(1) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{<} \phi(1-\alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \underset{(3)}{<} P(S_{n+1}^* \leq 1-\alpha) \underset{(2)}{\leq} P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) \underset{(2)}{\leq} P(S_{n+1}^* \leq 1) \underset{(4)}{<} \phi(1) + \varepsilon$$

donc $\phi(1) - \varepsilon < P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) < \phi(1) + \varepsilon$ ou $|P(S_{n+1}^* \leq \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}) - \phi(1)| < \varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) - \phi(1) \right| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right) = \phi(1)$ ▲

Alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} P(S_n^* \leqslant 1) - \frac{1}{2} P\left(S_{n+1}^* \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\phi(1) - \frac{1}{2}\phi(1)$.

$$\underline{\underline{\lim_{n\mapsto+\infty} P(T_n \geqslant n+\sqrt{n}) = 1 - \phi(1) = \phi(-1)}}.$$

▲ On retrouve ce type de preuve dans HEC^{V} 2001 III Q 6 ou dans HEC $^{\text{nII}}$ ... HEC nII 2011 Q13

Remarque.- dans Q2 a] on pouvait penser à utiliser ~~les espérances conditionnelles~~ sauf que le résultat du cours porte sur les variables aléatoires discrètes.