R.

EXERCICE 1

Exercice **S** **Des calculs simples.**

Montrer l'existence et donner la valeur de :

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ $(\alpha > 0)$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + a}$ $(a > 0)$;

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(x\,e^t+1)\,(y\,e^t+1)}\,\mathrm{d}t$ $(x > 0$ et $y > 0)$ oral ESCP 2001 1.5.

* a) $f : t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$. Soit $x \in]0,1]$. Une intégration par partie simple donne : $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt = [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 t \times \frac{1}{t}\,dt = 0 - x\ln x - \int_x^1 1\,dt = -x\ln x - (1-x)$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 f(t)\,dt = -0-(1-0) = -1$. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ converge et vaut -1. A retenir

* b) $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$. Par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ existe et vaut également $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan t\,dt$ converge et vaut π.

* c) $f_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f_0(t)\,dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x 1\,dt\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\,dt$ diverge.

• Supposons $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f_\alpha(t)\,dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha x}\right)\right) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Finalement 1/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2/ $\displaystyle\forall \alpha \in]0,+\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$.

Se retrouve avec une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre α.

* d) $f_a : t \mapsto \dfrac{1}{e^t+a}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$$\forall x \in [0,+\infty[, \int_0^x f_a(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{e^t+a} = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+a\,e^{-t}}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^x \frac{a\,e^{-t}}{1+a\,e^{-t}}\,dt = -\frac{1}{a}\left[\ln\left(1+a\,e^{-t}\right)\right]_0^x$$

A retenir

R.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \int_0^x f_a(t)\,dt = -\frac{1}{a}\left[\ln(1+ae^{-x}) - \ln(1+a)\right] = \frac{1}{a}\left[\ln(1+a) - \ln(1+ae^{-x})\right].$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f_a(t)\,dt = \frac{1}{a}\left[\ln(1+a) - 0\right]$. $\underline{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+a} \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\ln(1+a).}$

e)

$\forall$ $f_{x,y} : t \mapsto \frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1er cas : $x=y$. Soit $A \in \mathbb{R}$. $\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \int_0^A \frac{e^t}{(xe^t+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{x(xe^t+1)}\right]_0^A$

$\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{xe^A+1}\right]$ ... et $\int_A^0 f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{xe^A+1} - \frac{1}{x+1}\right].$

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)$ et $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{x+1}\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$

$\int_0^{+\infty} f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{x(x+1)}$ et $\int_{-\infty}^0 f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}$ donc $\frac{1}{x}$.

2ième cas : $x \neq y$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xe^t+1} - \frac{1}{ye^t+1} = \frac{(y-x)e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)} = (y-x) f_{x,y}(t).$

Soit $A \in \mathbb{R}$. $(y-x)\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \int_0^A \frac{dt}{xe^t+1} - \int_0^A \frac{dt}{ye^t+1} = \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+e^{-t}}\,dt - \int_0^A \frac{e^{-t}}{y+e^{-t}}\,dt$

$(y-x)\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = -\left[\ln(x+e^{-t})\right]_0^A + \left[\ln(y+e^{-t})\right]_0^A = \left[\ln\left(\frac{y+e^{-t}}{x+e^{-t}}\right)\right]_0^A$

$\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{y-x}\left[\ln\left(\frac{y+e^{-A}}{x+e^{-A}}\right) - \ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\right]$. On a également :

$\int_A^0 f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{y-x}\left[\ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{y+e^{-A}}{x+e^{-A}}\right)\right] = \frac{1}{y-x}\left[\ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{ye^A+1}{xe^A+1}\right)\right].$

$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{y-x}\left[\ln\left(\frac{y+0}{x+0}\right) - \ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right)\right] = \frac{1}{y-x}\left[\ln\frac{y}{x} - \ln\frac{y+1}{x+1}\right].$

$\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 f_{x,y}(t)\,dt = \frac{1}{y-x}\left[\ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{y\times 0+1}{x\times 0+1}\right)\right] = \frac{1}{y-x}\ln\left(\frac{y+1}{x+1}\right).$

$\int_0^{+\infty} f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{y-x}\left[\ln\frac{y}{x} - \ln\frac{y+1}{x+1}\right]$.

$\int_{-\infty}^{0} f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{y-x}\ln\frac{y+1}{x+1}$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{y-x}\ln\frac{y}{x}$ ou $\frac{\ln y - \ln x}{y-x}$.

Ainsi $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}\,dt \text{ converge.}}}$

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}\,dt}} = \underline{\underline{\begin{cases}\frac{\ln y-\ln x}{y-x} & \text{si } x\neq y\\[4pt] \frac{1}{x} & \text{si } x=y\end{cases}}}.$$

<u>Exercice</u>. $(x,y)\to\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}\,dt$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$?

EXERCICE 2

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-4}}$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^3-t^2}}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-\frac{1}{t^2}}\right)\mathrm{d}t$; e) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$.

---

* a) $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-4}}$ est continue sur $]2,+\infty[$.

→ $f(t) \underset{2}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{t-2}\sqrt{t+2}} \underset{2}{\sim} \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{(t-2)^{1/2}}$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t\sqrt{t^2}}$ ou $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

→ $\forall t \in\,]2,+\infty[,\ f(t) \geqslant 0$

→ $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{4(t-2)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ convergent.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_2^3 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent. Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$ converge.

* b) $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^3-1}$ est continue sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

- $f(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{t-1}{t^3-1} = \dfrac{1}{t^2+t+1} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{3}$; $\displaystyle\lim_{t\to 1} f(t) = \frac{1}{3}$. f est prolongeable par continuité en 1.
- Ainsi $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt$ convergent.

$\forall t \in [2,+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) = \dfrac{\ln t}{t^3-1} \leqslant \dfrac{t-1}{t^3-1} = \dfrac{1}{t^2+t+1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Remarque.. On pouvait également utiliser $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{t}\, f(t)\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^3-1}\sqrt{t}\ln t\right) = 0$ par croissance comparée.

donc $f(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, $\forall t \in\,]0,\tfrac{1}{2}]$, $f(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $-\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3-1}\,dt$ converge.

* c) $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^3-t^2}}$ est continue sur $]0,1[$.

- $f(t) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2-t^3}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{t^{2/3}}$; $-f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2/3}}$.

  De plus $\forall t \in]0,\frac{1}{2}]$, $\dfrac{1}{t^{2/3}} \geq 0$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{2/3}}$ converge ($\frac{2}{3} < 1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^{1/2} (-f(t))\,dt$. Donc $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

- $f(t) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-t}} \underset{1}{\sim} -\dfrac{1}{(1-t)^{1/3}}$; $-f(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{1/3}}$.

  De plus $\forall t \in [1/2, 1[$, $\dfrac{1}{(1-t)^{1/3}} \geq 0$ et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{1/3}}$ converge ($\frac{1}{3} < 1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_{1/2}^{1} (-f(t))\,dt$ donc $\int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3-t^2}}$ converge.

* d) $f : t \mapsto 1 - e^{-\frac{1}{t^2}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1$ car $\lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\infty$. f est donc prolongeable par continuité en 0.

  Ainsi $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

- $e^{-\frac{1}{t^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \left(-\frac{1}{t^2}\right)$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = 0$. Alors $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $(2>1)$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\underline{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt}$.

Finalement $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\frac{1}{t^2}})\,dt \text{ converge}}}$.

* e) $f : t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $e^{\sin t} \geqslant e^{-1}$ et $\frac{1}{t} \geqslant 0$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{e^{\sin t}}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0$.

De plus $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\underline{\underline{\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt \text{ diverge}}}$.

R

EXERCICE 3

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$; c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\ln t}}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t\sqrt{1+t^2}}\, dt$; e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1-t)}\, dt$.

* a) $f : t \mapsto t \sin \frac{1}{t^3}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |f(t)| = t\left|\sin \frac{1}{t^3}\right| \leq t$ et $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$. Alors $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$, par encadrement.

f est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

- $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^3} = 0$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t \times \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^2}$. De plus $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives

montrent que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} t \sin \frac{1}{t^3}\,dt$ converge.

* b) $f : t \mapsto \sin t \sin \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |f(t)| = |\sin t|\left|\sin \frac{1}{t^2}\right| \leq |\sin t|$ et $\lim\limits_{t\to 0} |\sin t| = 0$.

Par encadrement il vient $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0. $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

- $|f(t)| = |\sin t|\left|\sin \frac{1}{t^2}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} |\sin t| \times \left|\frac{1}{t^2}\right| = \frac{|\sin t|}{t^2}$.

$t^{3/2}|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{|\sin t|}{t^{1/2}}$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \frac{|\sin t|}{t^{1/2}} \leq \frac{1}{t^{1/2}}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{1/2}} = 0$.

Par encadrement $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{1/2}} = 0$. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(t^{3/2}|f(t)|\right) = 0$. Donc :

✓ $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ ✓ $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f(t)| \geq 0$ et $\frac{1}{t^{3/2}} \geq 0$ ✓ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que

R

$\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\int_0^{+\infty} \sin t \sin \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

* c) $f : t \mapsto \frac{1}{t^{\ln t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

$\forall t \in [e^2, +\infty[$, $2 = \ln e^2 \leq \ln t$ et $\ln t \geq 0$.

$\forall t \in [e^2, +\infty[$, $2 \ln t \leq (\ln t)(\ln t)$ ou $\forall t \in [e^2, +\infty[$, $\ln t^2 \leq \ln t^{\ln t}$.

Alors $\forall t \in [e^2, +\infty[$, $0 < t^2 = e^{\ln t^2} \leq e^{\ln t^{\ln t}} = t^{\ln t}$.

$\forall t \in [e^2, +\infty[$, $0 < \frac{1}{t^{\ln t}} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\ln t}}$ converge. Alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\ln t}}$ converge.

Exercice.. Etudier $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\ln t}}$.

* d) $f : t \mapsto \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $\forall t \in]0, 1]$, $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge $(\frac{1}{2} < 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

$\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

- $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \ln(1+\sqrt{t}) \leq \sqrt{t}$ et $t\sqrt{1+t^2} \geq t\sqrt{t^2} = t^2 > 0$.

$\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \ln(1+\sqrt{t}) \leq \sqrt{t}$ et $0 \leq \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{t^2}$

$\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leq f(t) \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge $(\frac{3}{2} > 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$ converge.

* e) $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1-t)}$ est continue sur $]0,1[$.

- $\lim\limits_{t \to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(1-t)} = 0$. Alors $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$.

f est prolongeable par continuité en 1 donc $\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ converge.

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{-t}$. $-f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\forall t \in]0,\frac{1}{2}]$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge

(car $\frac{1}{2} < 1$). Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{1/2} (-f(t))\,dt$ converge. Alors $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1-t)}\,dt$ converge.

R

EXERCICE 4

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre. Déjà Bertrand.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\ln t}$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$; d) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$;

e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\ln t}$; f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$; h) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$.

---

* a) $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}$ est continue sur $]0,\frac12]$.

Notons que $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{1}{\ln t} = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to0} \left(\sqrt{t}\,|f(t)|\right) = \lim_{t\to0} \frac{1}{|\ln t|} = 0$.

1) $|f(t)| \underset{t\to0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; 2) $\forall t \in]0,\frac12]$, $|f(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$; 3) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge ($\frac12 < 1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt$ converge. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}\,\ln t}$ est absolument convergente donc convergente.

* b) $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,\frac12]$.

Ici c'est moins simple car $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge mais $\displaystyle\lim_{t\to0} |\ln t| = +\infty$.

Notons que $\frac12 < \frac34 < 1$!

$\displaystyle\lim_{t\to0} \left(t^{3/4}\,|f(t)|\right) = \lim_{t\to0} \frac{t^{3/4}\,|\ln t|}{t^{1/2}} = \lim_{t\to0} \left(t^{1/4}\,|\ln t|\right) = \lim_{t\to0} |t^{1/4}\ln t| = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $|f(t)| \underset{t\to0}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$; 2) $\forall t \in]0,\frac12]$, $|f(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^{3/4}} \geqslant 0$; 3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{3/4}}$ converge car $\frac34 < 1$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt$ converge.

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

* **c)** $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$.

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^2}$ diverge et $\displaystyle\lim_{t \mapsto 0} \ln t = -\infty$. Alors plus de doute !

$$\lim_{t \mapsto 0} \left(\frac{1/t^2}{-f(t)} \right) = \lim_{t \mapsto 0} \left(-\frac{1}{\ln t} \right) = 0 .$$ Alors :

1° $\dfrac{1}{t^2} \underset{t \mapsto 0}{=} o(-f(t))$; 2° $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et $-f(t) \geqslant 0$; 3° $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^2}$ diverge $(2 \geqslant 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2} (-f(t))\,dt$ diverge. $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ diverge également.

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ est divergente.

* **d)** $f : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Ici $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^2}$ diverge mais $\displaystyle\lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{\ln t} = 0$ ...

$$\lim_{t \mapsto 0} \frac{1/t}{1/t \ln t} = \lim_{t \mapsto 0} (t \ln t) = 0 .\quad \lim_{t \mapsto 0} \frac{1/t}{f(t)} = 0 \ ; \ \lim_{t \mapsto 0} \left(\frac{1/t}{-f(t)} \right) = 0.$$ Alors :

1° $\dfrac{1}{t} \underset{t \mapsto 0}{=} o(-f(t))$; 2° $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{t} \geqslant 0$ et $-f(t) \geqslant 0$; 3° $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t}$ diverge $(1 \geqslant 1 !)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2} (-f(t))\,dt$ diverge. Alors $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ diverge. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t \ln t}$ diverge.

* **e)** $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t} \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge mais $\displaystyle\lim_{t \mapsto +\infty} \frac{1}{\ln t} = 0$ ...

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1/t}{f(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1/t}{1/\sqrt{t}\ln t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0.$$

1) $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t))$; 2) $\forall t\in[2,+\infty[$, $\frac{1}{t}\geqslant 0$ et $f(t)\geqslant 0$; 3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge ($1\leqslant 1$!).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. Ainsi $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}$ diverge.

* f) $f : t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

$\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge. Aucun doute ici.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1/\sqrt{t}}{f(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln t} = 0$$

1) $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t))$; 2) $\forall t\in[2,+\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{t}}\geqslant 0$ et $f(t)\geqslant 0$; 3) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge ($\frac{1}{2}\leqslant 1$).

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge ; $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge.

* g) $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge mais $\lim_{t\to+\infty} (\ln t) = +\infty$ ...

Notons que $1 < \frac{3}{2} < 2$! $\lim_{t\to+\infty} \left(t^{3/2} f(t)\right) = \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$ par croissance comparée.

1) $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$; 2) $\forall t\in[2,+\infty[$, $f(t)\geqslant 0$ et $\frac{1}{t^{3/2}}\geqslant 0$; 3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge car $\frac{3}{2}>1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ; $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ converge.

R

$*$ 1) $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et $\displaystyle\lim_{t\mapsto+\infty} \frac{1}{\ln t} = 0$. Aucun doute ici.

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \left(\frac{f(t)}{1/t^2}\right) = \lim_{t\mapsto+\infty} \frac{1}{\ln t} = 0$$

$f(t) \underset{t\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; $\forall t \in [2, +\infty[$, $f(t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t}$ converge.

Exercice | **S** | **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})}\,dt$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1 - t\arctan\frac{1}{t}\right)dt$; d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t^2)\,\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

* a) $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$\sin t \underset{0}{\sim} t$ et $\ln t \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Montrons donc que $|f(t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$!!

$\forall t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{t}\,|f(t)| = \sqrt{t}\,|\ln(\sin t)| = \sqrt{t}\,\left|\ln\frac{\sin t}{t} + \ln t\right| = \left|\sqrt{t}\ln\frac{\sin t}{t} + \sqrt{t}\ln t\right|$.

$\lim\limits_{t\to 0}\left(\sqrt{t}\ln\frac{\sin t}{t}\right) = 0\times\ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t}\ln t) = 0$ (par croissance comparée).

Alors $\lim\limits_{t\to 0}\left(\sqrt{t}\,|f(t)|\right) = |0| = 0$!

1° $|f(t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ 2° $\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $|f(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ 3° $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}|f(t)|\,dt$ converge.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

* b) $f : t \to \dfrac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\forall t\in]0,1]$, $0 \leqslant |f(t)| = \dfrac{\left|\sin\frac{1}{t^2}\right|}{\ln(1+\sqrt{t})} \leqslant \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{t})}$.

Evitons d'utiliser deux critères de comparaison ...

$\forall t \in]0,1]$, $0 \leqslant t^{3/4}|f(t)| \leqslant \dfrac{t^{3/4}}{\ln(1+\sqrt{t})}$.

$\dfrac{t^{3/4}}{\ln(1+\sqrt{t})} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^{3/4}}{\sqrt{t}} = t^{1/4}$; $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^{3/4}}{\ln(1+\sqrt{t})} = 0$. Alors par encadrement $\lim\limits_{t\to 0}\left(t^{3/4}|f(t)|\right) = 0$.

R

1) $|f(t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$; 2) $\forall t \in]0,1]$, $|f(t)| \geq 0$ et $\frac{1}{t^{3/4}} \geq 0$; 3) $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}}$ converge ($\frac{3}{4} < 1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^1 |f(t)|\,dt$. <u>$\int_0^1 f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.</u>

- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/t^2}{\ln(1+\sqrt{t})}$ car $\sin x \underset{0}{\sim} x$; $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{t})}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{t})} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} (t^2 f(t)) = 0$. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2|f(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |t^2 f(t)| = 0$.

1) $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; 2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $|f(t)| \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ($2>1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$. <u>$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.</u>

Finalement <u>$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})}\,dt$ converge.</u>

* c) $f : t \mapsto 1 - t\arctan\frac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |t\arctan\frac{1}{t}| = t\arctan\frac{1}{t} \leq \frac{\pi}{2}t$ et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi}{2}t = 0$.

  Par encadrement $\lim\limits_{t\to 0} \left(t\arctan\frac{1}{t}\right) = 0$; $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$.

  f est prolongeable par continuité en 0. <u>$\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.</u>

- Cherchons un équivalent de f en $+\infty$. Pour cela effectuons un DL 3 de arctan en 0. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}$.

  Alors arctan' est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

  La formule de Taylor-Young appliquée à arctan à l'ordre 3 en 0 donne :

  $\arctan x \underset{x\to 0}{=} \arctan 0 + x\arctan' 0 + \frac{x^2}{2}\arctan'' 0 + \frac{x^3}{6}\arctan''' 0 + o(x^3)$

R.

$\arctan 0 = 0$. $\arctan' 0 = 1$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\arctan'' t = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$; $\arctan'' 0 = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\arctan''' t = -\frac{2}{(1+t^2)^4}\left[(1+t^2)^2 - t \times 2 \times 2t \times (1+t^2)\right]$; $\arctan''' 0 = -2$

Alors $\arctan x \underset{x \mapsto 0}{=} x + \frac{x^3}{6}(-2) + o(x^3)$; $\arctan x \underset{x \mapsto 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$\arctan \frac{1}{t} \underset{t \mapsto +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$; $t \arctan \frac{1}{t} \underset{t \mapsto}{=} 1 - \frac{1}{3t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

$1 - t \arctan \frac{1}{t} \underset{t \mapsto +\infty}{=} \frac{1}{3t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; $1 - t\arctan \frac{1}{t} \underset{t \mapsto +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$.

1) $f(t) \underset{t \mapsto +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$; 2) $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{3t^2} \geq 0$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{3t^2}$ converge $(2 > 1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent

que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan \frac{1}{t}\right) dt$ converge.

* 4] $f : t \mapsto \frac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0, 1[$.

- $\ln(1-t^2) \underset{t \mapsto 0}{\sim} -t^2$. Alors $\frac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2} \underset{t \mapsto 0}{\sim} -\ln t^2 = -2\ln t$; $f(t) \underset{t \mapsto 0}{\sim} -2\ln t$.

$\sqrt{t}\,|f(t)| \underset{t \mapsto 0}{\sim} \sqrt{t}\,|-2\ln t| = 2|\sqrt{t}\ln t|$.

Or $\lim_{t \mapsto 0} (\sqrt{t} \ln t) = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{t \mapsto 0} (\sqrt{t}\,|f(t)|) = 0$.

1) $|f(t)| \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; 2) $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$, $|f(t)| \geq 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$; 3) $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent

que $\int_0^{1/2} |f(t)|\,dt$ converge. $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

- $\ln t^2 \underset{t\mapsto 1}{\sim} t^2-1$. $\dfrac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2} \underset{1}{\sim} \dfrac{(t^2-1)\ln(1-t^2)}{1^2} = -(1-t^2)\ln(1-t^2)$

$\lim\limits_{t\mapsto 1}(1-t^2)=0$ donc $\lim\limits_{t\mapsto 1}\left((1-t^2)\ln(1-t^2)\right)=0$; $\lim\limits_{t\mapsto 1}\dfrac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2}=0$.

$\lim\limits_{t\mapsto 1} f(t)=0$. f est prolongeable par continuité en 1. $\int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^1 \dfrac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$ converge.

R.

EXERCICE 6

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres.**

α est un réels Étudier la nature de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^\alpha}$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t-t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin t)^t - t^t}{(\tan t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

---

* a) $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\sin t \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$; $t - \sin t \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$; $t - \sin t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$.

$f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{t^{\alpha-3}}$. De plus $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{t^{\alpha-3}} \geqslant 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{6}\frac{1}{t^{\alpha-3}}\,dt$ ou que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-3}}$.

Donc $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ ou si et seulement si $\alpha < 4$.

- $\sin t \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$; $t - \sin t \underset{t\to+\infty}{\sim} t$; $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{\alpha-1}} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$ converge.

Donc $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ ou si et seulement si $\alpha > 2$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]2,4[$.

---

* b) $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^\alpha}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

<u>1er cas</u>. $\alpha > 1$. $1 + t \underset{t\to+\infty}{=} o(t^\alpha)$ donc $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge car $\alpha > 1$. Ainsi $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge.

<u>2ème cas..</u> $\alpha = 1$. $f_\alpha(t) = \frac{1}{1+2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{t}$, $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{2}\frac{1}{t} \geqslant 0$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ diverge.

<u>3ème cas..</u> $\alpha < 1$. $1 + t^\alpha \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$ donc $1 + t + t^\alpha \underset{t\to+\infty}{\sim} t$.

$f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t} \geqslant 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent la divergence de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$.

Finalement $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

* c) $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $(1+t^\alpha) \geqslant 1$ et $1+t^2 > 0$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $(1+t^2)(1+t^\alpha) \geqslant 1+t^2 > 0$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.

. $\forall t \in]0,1]$, $0 \leqslant f_\alpha(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ converge !

. $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant f_\alpha(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ converge.

R

* d) $f_\alpha : t \mapsto e^{t-t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1er cas. $\alpha > 1$

$\forall t \in [1,+\infty[,\ t^2 f_\alpha(t) = e^{2\ln t + t - t^\alpha} = e^{-t^\alpha\left[-\frac{2\ln t}{t^\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} + 1\right]}$

$\lim_{t\mapsto+\infty}\left(-\frac{2\ln t}{t^\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}+1\right) = 1$ et $\lim_{t\mapsto+\infty} t^\alpha = +\infty$.

A $\lim_{t\mapsto+\infty}\left(-t^\alpha\left[-\frac{2\ln t}{t^\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}+1\right]\right) = -\infty$. Alors $\lim_{t\mapsto+\infty}\left(t^2 f_\alpha(t)\right) = 0$.

$f_\alpha(t) \underset{t\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $\forall t\in[1,+\infty[,\ \frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge.

$\lim_{t\mapsto 0} f_\alpha(t) = \lim_{t\mapsto 0} e^{t-t^\alpha} = 1$. f_α est prolongeable par continuité en 0.

Donc $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ converge. Finalement $\underline{\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt \text{ converge}}$.

2ème cas. $\alpha = 1$ $\quad \forall t\in[1,+\infty[,\ f_\alpha(t) = e^0 = 1 = \frac{1}{t^0}$.

Donc $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ diverge. Alors $\underline{\int_0^{+\infty} f_\alpha(t) \text{ diverge}}$.

3ème cas. $\alpha < 1$. $\quad \lim_{t\mapsto+\infty}(t-t^\alpha) = \lim_{t\mapsto+\infty}\left(t\left(1-\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right)\right) = +\infty$ donc $\lim_{t\mapsto+\infty} f_\alpha(t) = +\infty$.

Alors $\frac{1}{t^0} \underset{t\mapsto+\infty}{=} o(f_\alpha(t))$, $\forall t\in[1,+\infty[,\ \frac{1}{t^0}\geqslant 0$ et $f_\alpha(t)\geqslant 0$ et

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^0}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives

montrent que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ diverge. Ainsi $\underline{\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt \text{ diverge}}$.

Donc $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} e^{t-t^\alpha}dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}}$.

R

Remarque. — $\lim_{t\to 0} f_\alpha(t) = \lim_{t\to 0} e^{t-t^\alpha} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha > 0 \\ e^{-1} \text{ si } \alpha = 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$.

Dans tous les cas f_α est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 e^{t-t^\alpha}\,dt$ converge.

* c) $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{(\sin t)^t - t^t}{(\tan t)^\alpha}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{4}]$.

$\lim_{t\to 0} (\sin t)^t = \lim_{t\to 0} e^{t\ln \sin t} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{t}{\sin t}\sin t \ln(\sin t)} = e^{1\times 0} = 1$.

$\lim_{t\to 0} t^t = \lim_{t\to 0} e^{t\ln t} = e^0 = 1$.

De plus $(\tan t)^\alpha \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha$.

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}]$, $(\sin t)^t - t^t = e^{t\ln(\sin t)} - e^{t\ln t} = e^{t\ln t}\left[e^{t\ln(\sin t) - t\ln t} - 1\right]$.

$\lim_{t\to 0} e^{t\ln t} = 1$ et $\lim_{t\to 0} (t\ln(\sin t) - t\ln t) = \lim_{t\to 0} \left[\frac{t}{\sin t}\sin t \ln(\sin t) - t\ln t\right] = 1\times 0 - 0 = 0$.

Alors $(\sin t)^t - t^t \underset{t\to 0}{\sim} 1\times(t\ln(\sin t) - t\ln t) = t\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ … car $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc $(\sin t)^t - t^t \underset{t\to 0}{\sim} t\times\left(\frac{\sin t}{t} - 1\right) = \sin t - t$.

$\sin t - t = t - \frac{t^3}{6} - t + o(t^3) = -\frac{t^3}{6} + o(t^3)$; $\sin t - t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$. $(\sin t)^t - t^t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$.

Alors $-f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{-t^3/6}{t^\alpha} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{t^{\alpha-3}}$ et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}]$, $\frac{1}{6}\,\frac{1}{t^{\alpha-3}} \geq 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{\pi/4} (-f_\alpha(t))\,dt$ est de même nature que $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{6t^{\alpha-3}}$. Or cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ donc si et seulement si $\alpha < 4$.

Ainsi $\int_0^{\pi/4} (-f_\alpha(t))\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 4$. Il en est de même pour $\int_0^{\pi/4} f_\alpha(t)\,dt$.

$\int_0^{\pi/4} \dfrac{(\sin t)^t - t^t}{(\tan t)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 4$.

R

EXERCICE 7

Exercice | S | **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Oral ESCP 2001 1.11**

α et β sont deux réels. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,dt$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,dt$.

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de coordonnées (α,β) tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,dt$ converge.

$f_{\alpha,\beta} : t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t^\beta}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$$\lim_{t\to+\infty} t^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta>0 \\ 1 & \text{si } \beta=0 \\ 0 & \text{si } \beta<0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} t^\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta>0 \\ 1 & \text{si } \beta=0 \\ +\infty & \text{si } \beta<0 \end{cases}$$

1er cas.. $\beta>0$

- $1 \underset{t\to+\infty}{=} o(t^\beta)$ donc $1+t^\beta \underset{t\to+\infty}{\sim} t^\beta$. Alors $\dfrac{t^\alpha}{1+t^\beta} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\beta-\alpha}}$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{\beta-\alpha}} \geqslant 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$. Ainsi $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta-\alpha>1$.

- $t^\beta \underset{t\to 0}{=} o(1)$; $1+t^\beta \underset{t\to 0}{\sim} 1$. Alors $\dfrac{t^\alpha}{1+t^\beta} \sim t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.

$f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\forall t\in]0,1]$, $\dfrac{1}{t^{-\alpha}} \geqslant 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^{-\alpha}}$. Alors $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $-\alpha<1$ ou si et seulement si $\alpha>-1$.

2ème cas.. $\beta=0$. $\forall t\in]0,+\infty[$, $f_{\alpha,\beta}(t) = \dfrac{1}{2}\,t^\alpha = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{t^{-\alpha}}$.

Alors $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $-\alpha>1$ et $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $-\alpha<1$ ou si et seulement si $\alpha>-1$.

Remarque.. le cas $\beta=0$ rejoint le cas $\beta>0$... comme il pourra rejoindre le cas $\beta<0$...

R

<u>3ème cas</u>.- $\beta<0$ • $t^\beta \underset{t\mapsto+\infty}{=} o(1)$ car $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} t^\beta=0$. Alors $1+t^\beta \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} 1$.

donc $f_{\alpha,\beta} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} t^\alpha=\frac{1}{t^{-\alpha}}$. De plus $\forall t\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{-\alpha}}\geq 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{-\alpha}}$.

Donc <u>$\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)dt$ converge si et seulement si $-\alpha>1$ ou si et seulement si $\alpha<-1$</u>

• $\lim\limits_{t\mapsto 0} t^\beta=+\infty$ donc $1\underset{t\mapsto 0}{=}o(t^\beta)$; $1+t^\beta \underset{t\mapsto 0}{\sim} t^\beta$.

Donc $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\mapsto 0}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^\beta}=\frac{1}{t^{\beta-\alpha}}$ et $\forall t\in]0,1]$, $\frac{1}{t^{\beta-\alpha}}\geq 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)dt$ est de même nature que $\int_0^1\frac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$.

Donc <u>$\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)dt$ converge si et seulement si $\beta-\alpha<1$.</u>

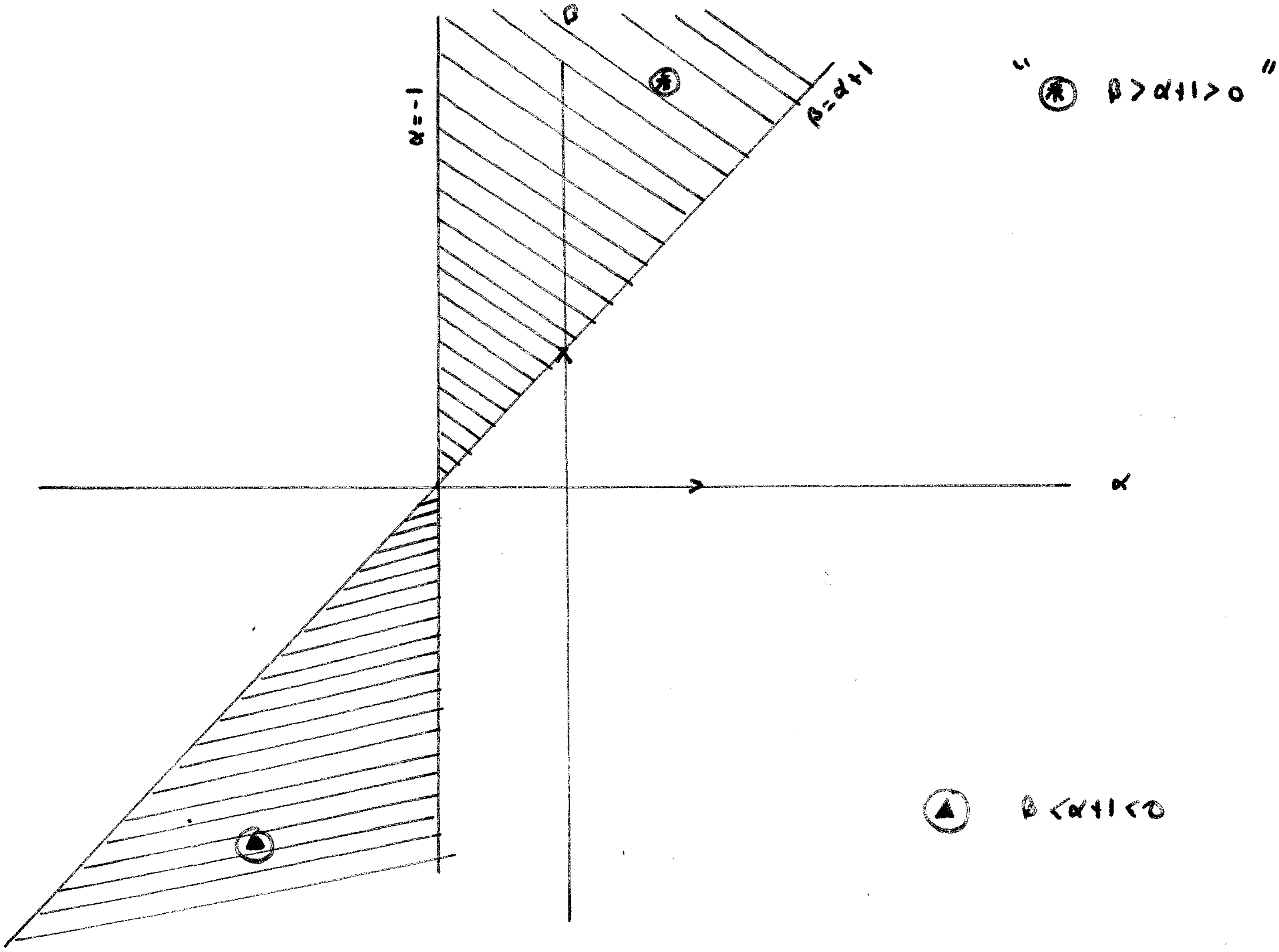
<u>Conclusion</u>.- <u>$\int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt$ converge si et seulement si ($\beta\geq 0$ et $\beta-\alpha>1$) ou ($\beta<0$ et $\alpha<-1$).</u>

<u>$\int_0^1\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt$ converge si et seulement si ($\beta\geq 0$ et $\alpha>-1$) ou ($\beta<0$ et $\beta-\alpha<1$).</u>

Alors $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^\beta}dt$ converge si et seulement si $\begin{cases}\beta\geq 0\\ \beta-\alpha>1\\ \alpha>-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}\beta<0\\ \alpha<-1\\ \beta-\alpha<1\end{cases}$

Notons que $\begin{cases}\beta\geq 0\\ \beta-\alpha>1\\ \alpha>-1\end{cases} \Leftrightarrow \beta>\alpha+1>0$ et $\begin{cases}\beta<0\\ \alpha<-1\\ \beta-\alpha<1\end{cases} \Leftrightarrow \beta<\alpha+1<0$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,dt$ converge si et seulement si $\beta > \alpha+1 > 0$ ou $\beta < \alpha+1 < 0$



<u>Remarque</u>.. L'étude de $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ pouvait se déduire de l'étude de $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ et inversement...

$$\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f_{\beta-\alpha-2,\beta}(t)\,dt.$$

R

EXERCICE 8

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres.**

α et β sont deux réels strictement positifs. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,dt$.

$f_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\beta} = 0$ car $\beta>0$. Alors $f_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta}) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^\alpha \times \frac{1}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}$.

  De plus $\forall t\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{\beta-\alpha}} \geq 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$.

  Donc $\underline{\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt \text{ converge si et seulement si } \beta-\alpha>1}$.

- $\forall t\in]0,1]$, $f_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha \ln \frac{t^\beta+1}{t^\beta} = t^\alpha \ln(t^\beta+1) - t^\alpha \ln t^\beta = t^\alpha \ln(1+t^\beta) - \beta\, t^\alpha \ln t$.

  $\lim_{t\to0} t^\alpha = 0$ ($\beta>0$), $\lim_{t\to0} \ln(1+t^\beta) = 0$ ($\beta>0$) et $\lim_{t\to0} (t^\alpha \ln t) = 0$ (croissance comparée). Alors $\lim_{t\to0} f_{\alpha,\beta}(t) = 0$.

  $f_{\alpha,\beta}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc $\underline{\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt \text{ converge}}$.

Finalement $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,dt \text{ converge si et seulement si } \beta-\alpha>1}$.

<u>Exercice</u>.. Traiter le cas où α et β sont quelconques.

R. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,dt$ converge si et seulement si $(\beta>0 \text{ et } \beta-\alpha>1)$ ou $(\beta\leq0 \text{ et } \alpha<-1)$.

R. $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,dt$ converge si et seulement si $(\beta>0 \text{ et } \alpha>-1)$ ou $(\beta\leq0 \text{ et } \beta-\alpha<1)$

R. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,dt$ converge si et seulement si $\beta>\alpha+1>0$ ou $\beta<\alpha+1<0$.

R.

EXERCICE 9

Exercice **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Fonction bêta.**

▶ *Incontournable.*

α et β sont deux réels. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$.

$f_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$.

$f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $\forall t \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{t^{1-\alpha}} \geqslant 0$.

$f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{\beta-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$ et $\forall t \in \left[\frac{1}{2},1\right[$, $\dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}} \geqslant 0$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que : 1°) $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$.

2°) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}}$.

Or le cours indique que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ converge si et seulement si $1-\alpha<1$ donc si et seulement si $\alpha>0$. De même $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}}$ converge si et seulement si $1-\beta<1$ donc si et seulement si $\beta>0$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$) converge si et seulement si $\alpha>0$ (resp. $\beta>0$).

Donc $\displaystyle\int_0^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha>0$ et $\beta>0$.

EXERCICE 10

J.F.C.

Exercice Nature de $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt$.

$f : t \mapsto (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta$ est continue sur son domaine de définition qui est $]0,1[$. Notons que f est positive sur $]0,1[$.

* $f(t) \underset{0}{\sim} (-\ln t)^\alpha$. $\sqrt{t}\, f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}\,(-\ln t)^\alpha$. $\lim\limits_{t \to 0} (\sqrt{t}\, f(t)) = \lim\limits_{t \to 0} (\sqrt{t}\,(-\ln t)^\alpha) = 0$

par croissance comparée.

Alors 1) $f(t) \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

2) $\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $f(t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$.

3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge car $1/2 < 1$!

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

* $f(t) \underset{1}{\sim} (-(t-1))^\alpha (1-t)^\beta = (1-t)^{\alpha+\beta}$.

1) $f(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$.

2) $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, $\dfrac{1}{(1-t)^{-\alpha-\beta}} \geqslant 0$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$ sont de même nature.

Le cours indique que $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$ converge si et seulement si $-\alpha-\beta < 1$

Alors $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ converge si et seulement si $-\alpha-\beta < 1$ ou si et seulement si $\alpha+\beta > -1$

Finalement $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta > -1$.

R.

EXERCICE 11

Exercice **En vue des produits scalaires usuels.**

▶ *Incontournable.*

Q1. Soit f une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

Q2. R appartient à $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\,e^{-t^2}\,dt$ convergent.

Q1 $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. $|f|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc $|f|$ possède un maximum sur ce segment que nous noterons M.

$t\geq 0$ et $M\geq 0$: $\dfrac{M}{\sqrt{1+t}} \leq M$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \geq 0$

- $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leq |g(t)| = \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{M}{\sqrt{1+t}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \leq M\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = M\,\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}.$

  $\forall t \in [0,1[,\ 0 \leq |g(t)| \leq M \times \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 M \times \frac{1}{(1-t)^{1/2}}\,dt$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

  Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 |g(t)|\,dt$. $\underline{\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt \text{ est absolument convergente donc convergente}}$.

- $\forall t \in]-1,0],\ 0 \leq |g(t)| = \dfrac{|f(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{M}{\sqrt{1-t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \leq M\,\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} = M \times \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}.$

  $\dfrac{M}{\sqrt{1-t}} \leq M$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 0$ ($t\leq 0$ et $M \geq 0$)

  $\forall t \in]-1,0],\ 0 \leq |g(t)| \leq M \times \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

  Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_{-1}^0 |g(t)|\,dt$. $\underline{\displaystyle\int_{-1}^0 g(t)\,dt \text{ est absolument convergente donc convergente}}$.

Finalement $\displaystyle\int_{-1}^1 g(t)\,dt$ converge. $\underline{\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge}}$.

Exercice Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $(f,g) \to \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est un produit scalaire sur E.

R

(Q2) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $R = \sum_{\ell=0}^{r} a_\ell X^\ell$.

- $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $k+1 \in D_\Gamma$

Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^{(k+1)-1} e^{-t} dt$ converge.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.

Alors $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} R(t) e^{-t} dt \text{ converge}}}$ comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. $\lim_{t \to +\infty} \left(t^2 (t^k e^{-t^2}) \right) = \lim_{t \to +\infty} \dfrac{(t^2)^{\frac{k+2}{2}}}{e^{t^2}} = 0$ par croissance comparée.

Alors $\exists\gamma$ $t^k e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; 2γ $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^k e^{-t^2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$; 3γ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$.

$t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (ce qui aurait dû être dit au début !) donc $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ est convergente. Comme $t \mapsto t^k e^{-t}$ est paire sur $\mathbb{R}$ si k est pair et impaire sur $\mathbb{R}$ si k est impair, $\int_{-\infty}^{0} t^k e^{-t^2} dt$ converge.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge.

Alors $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} R(t) e^{-t^2} dt \text{ converge}}}$ comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes.

<u>Exercice..</u> Q1. Montrer que " $(P, Q) \to \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ " est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$... ou sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$).

Q2.. Montrer que " $(P, Q) \to \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt$ " est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$... ou sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$).

R.

EXERCICE 12

Exercice | S | **En vue des produits scalaires usuels again.**

E est l'ensemble des applications continues de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt$ converge. $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

Q1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ est absolument convergente.

Q2. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (pour les opérations usuelles sur les fonctions numériques...)

Q1 Soient f et g deux éléments de E. fg est continue sur $[a,b[$.

$\forall t\in[a,b[,\ 0\leqslant (|f(t)|-|g(t)|)^2 = f^2(t)+g^2(t)-2|f(t)g(t)|$.

$\forall t\in[a,b[,\ 0\leqslant |(fg)(t)| \leqslant \frac{1}{2}f^2(t)+\frac{1}{2}g^2(t)$. De plus $\int_a^b \left(\frac{1}{2}f^2(t)+\frac{1}{2}g^2(t)\right)dt$ converge car $\int_a^b f^2(t)\,dt$ et $\int_a^b g^2(t)\,dt$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_a^b |(fg)(t)|\,dt$. Ainsi $\int_a^b (fg)(t)\,dt$ est absolument convergente donc elle est convergente.

Ceci achève de montrer que fg est un élément de E.

Si f et g sont deux éléments de E, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ converge.

Q2 Soit E' l'espace vectoriel des applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$.

- $E\subset E'$
- Posons $\forall t\in[a,b[,\ f_0(t)=0$. f_0 est une application continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et $\int_a^b f_0^2(t)\,dt$ converge. Ainsi $f_0\in E$. Donc E n'est pas vide.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(f,g)\in E^2$. $\lambda f+g$ est continue sur $[a,b[$.

$\forall t\in[a,b[,\ (\lambda f+g)^2(t)=\lambda^2 f^2(t)+2\lambda f(t)g(t)+g^2(t)$. Or $\int_a^b f^2(t)\,dt$ et $\int_a^b g^2(t)\,dt$ convergent.

Q1 montre que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ converge également.

Alors $\int_a^b (\lambda f+g)^2(t)\,dt$ converge comme combinaison linéaire de trois intégrales convergentes.

A $\lambda f+g\in E$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall (f,g)\in E^2,\ \lambda f+g\in E$.

Ceci achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

Donc E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.