R

Exercice **PC** **QSP HEC 2005. Intégrales impropres et séries. Utilisation du théorème fondamental sur la convergence des intégrales impropres de fonctions positives et sur la convergence des séries à termes positifs.**

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$. On pose $Y = \mathrm{Ent}\,(X)$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

Y prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = P(\mathrm{Ent}(X)=k) = P(k \leqslant X < k+1) = \int_k^{k+1} f(t)\,dt$.

Donc $E(Y)$ si et seulement si la série de terme général $k\,P(Y=k)$ est absolument convergente.

Mais, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k\,P(Y=k) \geqslant 0$. Ainsi $E(Y)$ existe si et seulement si la série de terme général $k\,P(Y=k)$ converge ou si et seulement si la série de terme général $k\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ converge.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\,P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt$

Comme la série de terme général $k\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Ainsi <u>$E(Y)$ existe si et seulement si $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.</u>

$E(X)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge ou si et seulement si $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

Or $\forall t \in [0, +\infty[$, $t f(t) \geqslant 0$. Donc $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée sur $[0,+\infty[$.

<u>$E(X)$ existe si et seulement si $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée sur $[0,+\infty[$.</u>

▲ <u>Supposons que $E(X)$ existe.</u> Alors $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ est convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_k^{k+1} k f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} t f(t)\,dt$

$\forall t \in [k, k+1]$, $k \leqslant t$ et $f(t) \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt = \int_0^{n+1} t f(t)\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt = E(X)$

$\forall t \in [0, +\infty[$, $t f(t) \geqslant 0$

R2

$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant E(X)$. (1)

La série de terme général $k\,P(Y=k)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. Donc la série de terme général $k\,P(Y=k)$ est convergente et même absolument convergente.

Ainsi $E(Y)$ existe. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1) il vient $E(Y) \leqslant E(X)$.

▲ Supposons que $E(Y)$ existe. Alors la série de terme général $k\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,P(Y=k) = E(Y)$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant E(Y)$. Montrons que $E(X)$ existe. Comme nous l'avons vu il suffit de montrer que $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. Posons $n = \mathrm{Ent}(x)$. $x < n+1$.

$$\int_0^x t f(t)\,dt \underset{\substack{\forall t \in [0,+\infty[,\ tf(t) \geqslant 0 \\ x < n+1}}{\leqslant} \int_0^{n+1} t f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} t f(t)\,dt \underset{\forall t \in [k,k+1],\ t \leqslant k+1 \text{ et } f(t) \geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} (k+1) f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

$$\int_0^x t f(t)\,dt \leqslant S_n + \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant E(Y) + \int_0^{n+1} f(t)\,dt \underset{\forall t \in [0,+\infty[,\ f(t) \geqslant 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}}{\leqslant} E(Y) + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = E(Y) + 1.$$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \int_0^x t f(t)\,dt \leqslant E(Y) + 1$. (2)

Donc $x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt$ est majorée par $E(Y)+1$ sur $[0,+\infty[$. Alors $E(X)$ existe.

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (2) il vient $E(X) \leqslant E(Y)+1$.

Ceci achève de montrer que X possède une espérance si et seulement si $Y = \mathrm{Ent}(X)$ possède une espérance.

Remarque .. En cas d'existence : $E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y)+1$.

R.2

EXERCICE 14

Exercice | PC | **Intégrale de Bertrand**

▶ *Apprendre le résultat et la pratique.*

Étudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (|\ln t|)^\beta}$.

(*) $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

__1er cas..__ $\alpha > 1$. Choisissons un élément δ de l'intervalle $]1,\alpha[$ (on peut prendre $\delta = \frac{1+\alpha}{2}$).

$\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \left(t^\delta f_{\alpha,\beta}(t)\right) = \lim\limits_{t\mapsto+\infty} \dfrac{1}{t^{\alpha-\delta}(\ln t)^\beta} = 0$ ($\alpha-\delta>0$) par croissance comparée (si $\beta<0$...). Alors :

1) $f_{\alpha,\beta}(t) = \underset{t\mapsto+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$; 2) $\forall t \in [2,+\infty[$, $f_{\alpha,\beta}(t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^\delta} \geqslant 0$; 3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\delta}$ converge car $\delta > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$

__2ème cas..__ $\alpha = 1$.

a) $\beta = 1$. $\forall A \in [2,+\infty[$, $\displaystyle\int_2^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \int_2^A \frac{1/t}{\ln t}\,dt = \left[\ln|\ln t|\right]_2^A = \ln|\ln A| - \ln|\ln 2|$.

Or $\lim\limits_{A\mapsto+\infty} (\ln|\ln A|) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\mapsto+\infty} \int_2^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = +\infty$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ diverge.

b) $\beta \neq 1$ $\forall A \in [2,+\infty[$, $\displaystyle\int_2^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \int_2^A \frac{1}{t}(\ln t)^{-\beta}\,dt = \left[\frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^A$.

$\forall A \in [2,+\infty[$, $\displaystyle\int_2^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{1-\beta}\left[(\ln A)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right]$.

Notons que $\lim\limits_{A\mapsto+\infty} (\ln A)^{1-\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\beta<0 \\ +\infty & \text{si } 1-\beta>0 \end{cases}$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\mapsto+\infty}\int_2^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \begin{cases} -\dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta>1 \\ +\infty & \text{si } \beta<1 \end{cases}$. $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si $\beta>1$ et diverge si $\beta<1$.

En résumé, si $\alpha = 1$: $\int_2^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

<u>3ième cas</u>.. $\alpha < 1$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1/t}{f_{\alpha,\beta}(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[t^{\alpha-1}(\ln t)^{\beta}\right] = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{1-\alpha}(\ln t)^{-\beta}} = 0.$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left[t^{1-\alpha}(\ln t)^{-\beta}\right] = +\infty.$

$1-\alpha>0$ croissance comparée... lorsque $\beta>0$

Alors 1) $\frac{1}{t} = o\left(f_{\alpha,\beta}(t)\right)$;

2) $\forall t \in [2,+\infty[$, $\frac{1}{t} \geq 0$ et $f_{\alpha,\beta}(t) \geq 0$;

3) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_2^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ diverge.

<u>Conclusion</u>.. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

<u>Pratiquement</u>

Si $\alpha < 1$ on montre la divergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ en notant que $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\right)$.

Si $\alpha > 1$ on choisit δ dans $]1, \alpha[$ et on montre la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ en montrant que $\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\delta}}\right)$.

(*) Si $\alpha = 1$ on étudie la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ en intégrant $\int_2^{A} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$.

(attention au cas $\beta = 1$).

(*) <u>Remarque</u>.. Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ la divergence est claire.

Si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$ on obtient facilement la divergence de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ en notant que $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\right)$.

(*) $g_{\alpha,\beta} : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Version 1. On se ramène à "$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$"

- **Version 1.1.** $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Cela justifie le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans ce qui suit.

Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$. $\frac{1}{x} \in [2, +\infty[$

$$\int_x^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \underset{\substack{u=\frac{1}{t}\,;\ t=\frac{1}{u}\,;\ dt=-\frac{1}{u^2}du}}{=} \int_{1/x}^{2} \frac{(-1/u^2)\,du}{(1/u)^\alpha |\ln \frac{1}{u}|^\beta} = \int_2^{1/x} \frac{du}{u^{2-\alpha}|-\ln u|^\beta} \overset{1/x \geq 2}{=} \int_2^{1/x} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}.$$

1er cas. $2-\alpha > 1$ ou $(2-\alpha = 1$ et $\beta > 1)$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$ converge.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \underset{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}{=} \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge.

2e cas. $2-\alpha < 1$ ou $(2-\alpha = 1$ et $\beta \leq 1)$.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$ diverge et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$ est positive sur $[2,+\infty[$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta} = \lim_{x\to 0^+} \int_2^{1/x} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta} = +\infty$.
$\uparrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ diverge.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ ou $(2-\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

R

• Version 1.2

Pour $\forall t \in]0, \frac{1}{2}[$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$. φ définit une bijection strictement décroissante de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $]2, +\infty[$ de classe C^1. Alors le théorème de changement de variable permet de dire que $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est de même nature que

$$\int_{+\infty}^{2} \frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{\left(\frac{1}{u}\right)^\alpha \left|\ln \frac{1}{u}\right|^\beta}$$ c'est à dire de même nature que $$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}$$

Ainsi d'après ce qui précède $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si

$2-\alpha > 1$ ou $(2-\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Donc $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Version 2 — C'est la version que l'on utilise dans la pratique.

1er cas. $\alpha < 1$. Soit δ un élément de $]\alpha, 1[$ (on peut prendre $\delta = \frac{\alpha+1}{2}$).

$$\lim_{t \mapsto 0^+} (t^\delta g_{\alpha,\beta}(t)) = \lim_{t \mapsto 0^+} \left(t^{\delta-\alpha} |\ln t|^{-\beta}\right) = 0$$

$\delta - \alpha > 0$

croissance comparée ... si $\beta < 0$

Alors 1) $g_{\alpha,\beta}(t) \underset{t \mapsto 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$;

2) $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$, $g_{\alpha,\beta}(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^\delta} \geq 0$;

3) $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\delta}$ converge car $\delta < 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{1/2} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge.

$2^{\text{ème}}$ cas.. $\alpha = 1$

a) $\beta = 1$. $\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$, $\int_x^{1/2} g_{1,1}(t)\,dt = \int_x^{1/2} \frac{1/t}{|\ln t|}\,dt = \int_x^{1/2} \frac{1/t}{-\ln t}\,dt = \left[-\ln|\ln t|\right]_x^{1/2}$.

$\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$, $\int_x^{1/2} g_{1,1}(t)\,dt = -\ln|\ln \frac{1}{2}| + \ln|\ln x|$.

Alors $\lim_{x \to 0^+} \int_x^{1/2} g_{1,1}(t)\,dt = +\infty$; $\int_0^{1/2} g_{1,1}(t)\,dt$ diverge.

b) $\beta \neq 1$. $\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$, $\int_x^{1/2} g_{1,\beta}(t)\,dt = \int_x^{1/2} \frac{1/t}{(-\ln t)^\beta}\,dt = \int_x^{1/2} \frac{1}{t}(-\ln t)^{-\beta}\,dt = \left[-\frac{(-\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_x^{1/2}$

$\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$, $\int_x^{1/2} g_{1,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{1-\beta}\left[-(-\ln 1/2)^{-\beta+1} + (-\ln x)^{-\beta+1}\right]$.

$\lim_{x \to 0^+} (-\ln x)^{-\beta+1} = \begin{cases} 0 \text{ si } -\beta+1<0 \\ +\infty \text{ si } -\beta+1>0 \end{cases}$. Alors $\lim_{x \to 0^+} \int_x^{1/2} g_{1,\beta}(t)\,dt = \begin{cases} +\infty \text{ si } -\beta+1>0 \\ -\frac{(-\ln 1/2)^{-\beta+1}}{1-\beta} \text{ si } -\beta+1<0 \end{cases}$

donc $\int_0^{1/2} g_{1,\beta}(t)\,dt$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$.

Finalement si $\alpha = 1$: $\int_0^{1/2} g_{1,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$

$3^{\text{ème}}$ cas.. $\alpha > 1$. $\lim_{t \to 0^+} \frac{1/t}{g_{\alpha,\beta}(t)} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha-1}(\ln t)^\beta\right) = 0$ $\begin{cases} \alpha-1>0 \\ \text{croissance comparée si } \beta>0. \end{cases}$

Alors 1) $\frac{1}{t} \underset{t \to 0^+}{=} o(g_{\alpha,\beta}(t))$

2) $\forall t \in]0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{t} \geq 0$ et $g_{\alpha,\beta}(t) \geq 0$

3) $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t}$ diverge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{1/2} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ diverge.

Finalement et pour la troisième fois : $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Pratiquement.

Si $\alpha < 1$ on montre la convergence de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ en choisissant γ dans $]\alpha, 1[$ et en prouvant que $\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \underset{t \to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.

Si $\alpha = 1$ on étudie la nature de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ en intégrant $\int_A^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$. (*)

(attention au cas $\beta = 1$)

Si $\alpha > 1$ on montre la divergence de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ en montrant que $\frac{1}{t} \underset{t \to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\right)$.

(*) Remarque : si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ la divergence est claire.

Si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$ on obtient facilement la divergence de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ en montrant que $\frac{1}{t} \underset{t \to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\right)$.

R 2

EXERCICE 15

Exercice | S | **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Bertrand toujours.**

p est dans $\mathbb{N}$ et x est dans $\mathbb{R}$. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^p\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$.

► *Sans doute utile pour parler des dérivées de la fonction* Γ.

$f : t \mapsto (\ln t)^p\, t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{\ln t}{t}\right)^p \frac{t^{x+p+1}}{e^t}\right) = 0\times 0 = 0$ par croissance comparée. Alors :

1) $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; 2) $\forall t \in [1,+\infty[,\ f(t) \geqslant 0$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

• Supposons que $x>0$. Notons que $f(t) \underset{0}{\sim} (\ln t)^p\, t^{x-1} = \dfrac{(\ln t)^p}{t^{1-x}}$.

$1-x<1$ car $x>0$. Soit δ un élément de $]1-x,1[$ (on peut prendre $\delta = \frac{1-x+1}{2}$).

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(t^\delta |f(t)|\right) = \lim_{t\to 0}\left(t^\delta |(\ln t)^p t^{x-1}|\right) = \lim_{t\to 0}\left| t^{\delta-(1-x)}(\ln t)^p\right| = 0$ par croissance comparée car $\delta-(1-x)>0$.

Alors 1) $|f(t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$; 2) $\forall t\in]0,1],\ |f(t)|\geqslant 0$ et $\frac{1}{t^\delta}\geqslant 0$; 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\delta}$ converge car $\delta<1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ converge. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Supposons $x\leqslant 0$.

1er cas $p=0$. 1) $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$; 2) $\forall t\in]0,1],\ \dfrac{1}{t^{1-x}}\geqslant 0$;

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ diverge car $1-x\geqslant 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ diverge.

R

<u>2ème cas..</u> $p \geq 1$. Posons $\forall t \in]0,1]$, $g(t) = (-\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}$.

$\lim\limits_{t \mapsto 0} \frac{1/t}{g(t)} = \lim\limits_{t \mapsto 0} \frac{1}{(-\ln t)^p t^x e^{-t}} = 0$ car $\lim\limits_{t \mapsto 0} (-\ln t)^p = +\infty$, $\lim\limits_{t \mapsto 0} t^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$, $\lim\limits_{t \mapsto 0} e^{-t} = 1$

Alors 1) $\frac{1}{t} = o(g(t))$; 2) $\forall t \in]0,1]$, $\frac{1}{t} \geq 0$ et $g(t) \geq 0$; 3) $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la divergence de $\int_0^1 g(t)\,dt$.

Notons que $\forall t \in]0,1]$, $(-1)^p g(t) = f(t)$. Alors $\int_0^1 f(t)\,dt$ diverge.

<u>Conclusion..</u> $\int_1^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge.

$\int_0^1 (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si $x>0$

$\int_0^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si $x>0$.

<u>Remarque..</u> $x \mapsto \int_0^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est la dérivée $p$ième de Γ.

<u>Exercice..</u> $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} |\ln t|^\beta t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

R.2

EXERCICE 16

Exercice **S** **Intégration par parties**

Q1. Existence et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$.

Q2. Existence et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt$.

Q3. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

Q1 $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Posons $\forall t\in]0,+\infty[$, $u(t) = -\dfrac{1}{1+t}$ et $v(t) = \ln t$.

u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[$, $u'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_1^x - \int_1^x\left(-\frac{1}{1+t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)dt.$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{\ln x}{1+x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,dt.$$

▼ __Remarque__. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{1+x}\right) = 0$ par croissance comparée donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t)}$ sont de même nature. On a aussi $\displaystyle\int_x^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = \frac{\ln x}{1+x} + \int_x^1\frac{dt}{t(1+t)}$.

avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+x} = -\infty$. Rien n'indique que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t(1+t)}$. En fait la première est convergente et la seconde divergente !

Donc le théorème d'intégration par parties sur les intégrales impropres peut s'appliquer sur $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ mais pas sur $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$. Il faut donc être très rigoureux dans son application. Le mieux étant de systématiquement revenir à une intégrale non impropre. ▲

Poursuivons le calcul...

$$\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \Big[\ln|t| - \ln|t+1|\Big]_1^x = \Big[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big]_1^x = \Big[\ln\frac{t}{t+1}\Big]_1^x.$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)} = \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{x}{x+1} + \ln 2.$$

Alors $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt \overset{①}{=} -\frac{\ln x}{1+x} + \ln\frac{x}{x+1} + \ln 2$. On a aussi

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt \overset{②}{=} \frac{\ln x}{1+x} - \ln\frac{x}{x+1} - \ln 2.$$

$\dfrac{\ln x}{1+x} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{1+x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$.

$\dfrac{x}{x+1} \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. Alors $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.

① donne alors $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = \ln 2$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ converge et vaut $\ln 2$.

$\forall x \in]0,1]$, $\dfrac{\ln x}{1+x} - \ln\dfrac{x}{x+1} = \left(\dfrac{1}{1+x} - 1\right)\ln x + \ln(x+1) = -\dfrac{x\ln x}{x+1} + \ln(x+1)$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{\ln x}{1+x} - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 0$. ② donne alors $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0}\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt = -\ln 2$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ converge et vaut $-\ln 2$.

<u>Remarque</u> .. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ existe et vaut 0 ... .

<u>Exercice</u> .. Déduire l'étude de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ de l'étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$ ou l'inverse $\left(u = \frac{1}{t}\ldots\right)$.

Q2 $f : t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Posons $\forall t \in [1,+\infty[$, $u(t) = -\dfrac{1}{t}$ et $v(t) = \arctan t$. u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t}\arctan t\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

$$\int_1^x f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt.$$ petite décomposition en éléments simples...

Or $\displaystyle\int_1^x\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \left[\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_1^x = \left[\ln\frac{|t|}{|1+t^2|^{1/2}}\right]_1^x = \left[\ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_1^x = \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\int_1^x f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\arctan x\right) = 0 \times \frac{\pi}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = \ln 1 = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Exercice .. Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^2}\,dt$.

(Q3) $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$.

Posons $\forall t \in]0,1[$, $u(t) = -\frac{1}{t}$ et $v(t) = \ln(1-t^2)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

De plus $\forall t \in]0,1[$, $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \dfrac{-2t}{1-t^2}$ ou $v'(t) = \dfrac{2t}{t^2-1}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $x \in]0,1[$.

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t}\ln(1-t^2)\right]_{1/2}^{x} - \int_{1/2}^{x}\left(-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)dt.$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{3}{4} + \int_{1/2}^{x}\frac{2}{t^2-1}\,dt.$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{3}{4} + \int_{1/2}^{x}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{3}{4} + \Big[\ln|t-1| - \ln|t+1|\Big]_{1/2}^{x}$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{3}{4} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln\left|\frac{1/2-1}{1/2+1}\right|$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + 2\ln\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \ln 3.$$ Posons $c = 2\ln\frac{3}{4} + \ln 3$.

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt \overset{①}{=} -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + c \quad \text{et} \quad \int_{x}^{1/2} f(t)\,dt \overset{②}{=} \frac{1}{x}\ln(1-x^2) - \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - c$$

$\frac{1}{x}\ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-x^2) = 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{1-x}{1+x} = \ln 1 = 0$.

Alors ② donne : $\lim\limits_{x\to 0}\int_{x}^{1/2} f(t)\,dt = -c$. $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge et vaut $-c$.

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -\frac{1}{x}\ln(1-x^2) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + c = -\frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1+x) + \ln(1-x) - \ln(1+x) + c.$$

$$\int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x) - \left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) + c = -\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} - \left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) + c.$$

$\lim\limits_{x\to 1}\big((1-x)\ln(1-x)\big) = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x) = 2\ln 2$

Alors $\lim_{x \to 1} \int_{1/2}^{x} f(t)\,dt = -2\ln 2 + C$. $\underline{\underline{\int_{1/2}^{1} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } -2\ln 2 + C}}$.

Finalement $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et vaut $-C - 2\ln 2 + C$ donc $-2\ln 2$.

$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt \text{ converge et vaut } -2\ln 2}}$.

R.

EXERCICE 17

Exercice **S** **Intégration par parties**

α est un réel strictement positif et β est un réel.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\,dt$.

$t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha x})$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}dt \overset{\alpha>0}{=} \frac{1}{\alpha}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

$f_{\alpha,\beta} : t \mapsto e^{-\alpha t}\sin(\beta t)$ et $g_{\alpha,\beta} : t \mapsto e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant |f_{\alpha,\beta}(t)| = |\sin(\beta t)|e^{-\alpha t} \leqslant e^{-\alpha t}$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant |g_{\alpha,\beta}(t)| = |\cos(\beta t)|e^{-\alpha t} \leqslant e^{-\alpha t}$.

La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_{\alpha,\beta}(t)|dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g_{\alpha,\beta}(t)|dt$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)dt$ sont absolument convergentes donc convergentes.

Soit $A \in [0,+\infty[$. $t \mapsto -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \sin(\beta t)$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$\displaystyle\int_0^A f_{\alpha,\beta}(t)dt = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]_0^A - \int_0^A\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\beta\cos(\beta t)\,dt$.

$\displaystyle\int_0^A f_{\alpha,\beta}(t)dt = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}\sin(\beta A) + \frac{\beta}{\alpha}\int_0^A e^{-\alpha t}\cos(\beta t)dt$. (1)

$0 \leqslant \left|-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}\sin(\beta A)\right| = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}|\sin(\beta A)| \leqslant \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}\right) = 0$.

Alors, par encadrement, il vient : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha A}\sin(\beta A)\right) = 0$. En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1) on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt$. (2)

R.

Soit $A \in [0, +\infty[$. $t \mapsto -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \sin(\beta t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_0^A g_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\right)(-\beta \sin(\beta t))\,dt$$

$$\int_0^A g_{\alpha,\beta}(t)\,dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} \cos(\beta A) + \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^A e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\,dt. \quad (3)$$

$$\left|-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} \cos(\beta A)\right| = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} |\cos(\beta A)| \leq \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} \text{ et } \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A}\right) = 0.$$

Par encadrement il vient : $\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} \cos(\beta A)\right) = 0$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (3) il vient : $\int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ (4)

Avec celà il vient $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt\right]$.

$$\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt \; ; \; \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{\beta/\alpha^2}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

$$\int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right] = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

$$\underline{\underline{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\,dt = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}}$$

⚠ Remarque.. En faisant deux intégrations par parties à partir de $\int_0^A f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ on peut obtenir directement la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$.

Même chose pour $\int_0^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(t)\,dt$. Dans la pratique c'est comme cela que l'on procède.

R.

EXERCICE 18 Version 1

Exercice S Intégration par parties

α est un réel. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t\, dt$ et là calculer le cas échéant.

$f_\alpha : t \mapsto t^\alpha \ln t$ est continue sur $]0,1]$. Notons que c'est encore Bertrand... Version 2...

1er cas. $\alpha = -1$. $\forall x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = \int_x^1 \frac{1}{t} \ln t\, dt = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_x^1 = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = -\infty$. $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ diverge.

2ème cas. $\alpha \neq -1$. Posons $\forall t \in]0,1]$, $u(t) = \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v(t) = \ln t$.

u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$. De plus $\forall t \in]0,1]$, $u'(t) = t^\alpha$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $x \in]0,1]$.

$$\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{t}\,dt = -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int_x^1 t^\alpha\,dt.$$

$$\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\left[t^{\alpha+1}\right]_x^1 = -\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1}.$$

$$\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt \overset{1}{=} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\left(-\ln x + \frac{1}{\alpha+1}\right) - \frac{1}{(\alpha+1)^2} \text{ ou } \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt \overset{2}{=} -\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$$

a) $\alpha+1<0$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+1} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\ln x + \frac{1}{\alpha+1}\right) = +\infty$.

Alors 1 donne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = -\infty$ ($\alpha+1<0$...)

Donc $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ diverge.

b) $\alpha+1>0$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x^{\alpha+1}\ln x) = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} = 0$

Alors 2 donne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

$\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge et vaut $-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}$.

Résumons. 1) $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

2) Si $\alpha > -1$: $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

R.2

Exercice S **Intégration par parties**

α est un réel. Étudier l'existence de $\int_0^1 t^\alpha \ln t\, dt$ et là calculer le cas échéant.

Notons que c'est encore Bertrand avec "$\alpha \leftarrow -\alpha$" et "$\beta \leftarrow -1$". Pas de doute, cela converge si et seulement si $-\alpha < 1$ ou si et seulement si $\alpha > -1$. Prouvons le !

$f_\alpha : t \mapsto t^\alpha \ln t$ est continue sur $]0,1[$.

1er Cas.. $\alpha \leq -1$

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{1/t}{f_\alpha(t)} = \frac{1}{t^{\alpha+1}\ln t} = \frac{1}{\ln t} \times t^{-(\alpha+1)}.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln t} = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0} t^{-(\alpha+1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = -1 \\ 0 & \text{sinon (car } -(\alpha+1) > 0) \end{cases}$$

Alors $\lim_{t\to 0} \frac{1/t}{f_\alpha(t)} = 0$. On a aussi $\lim_{t\to 0} \frac{1/t}{-f_\alpha(t)} = 0$.

Donc 1°/ $\frac{1}{t} \underset{t\to 0}{=} o(f_\alpha(t))$; 2°/ $\forall t \in]0,1]$, $\frac{1}{t} \geq 0$ et $-f_\alpha(t) \geq 0$; 3°/ $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge car $1 \geq 1$! Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent $\int_0^1 (-f_\alpha(t))\,dt$ diverge. Donc $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ diverge.

2ème Cas.. $\alpha > -1$. Alors $-\alpha < 1$. Soit δ un élément de $]-\alpha, 1[$ (on peut prendre $\delta = \frac{1-\alpha}{2}$).

$$\lim_{t\to 0} \left[(-f_\alpha(t))\, t^\delta\right] = \lim_{t \to 0} \left(-t^{\alpha+\delta} \ln t\right) \underset{\substack{\alpha+\delta>0 \\ \text{croissance comparée}}}{=} 0. \text{ Alors :}$$

1°/ $-f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$; 2°/ $\forall t \in]0,1]$, $-f_\alpha(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^\delta} \geq 0$; 3°/ $\int_0^1 \frac{dt}{t^\delta}$ converge car $\delta < 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 (-f_\alpha(t))\,dt$ converge. Alors $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^1 t^\alpha \ln t\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Version 3.. Et si on posait $u = -(\alpha+1)\ln t$?!

R.

Supposons que : $\alpha > -1$.

Posons $\forall t \in]0,1]$, $u(t) = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$ et $v(t) = \ln t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \ln t\,dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \times \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{\alpha+1}\int_\varepsilon^1 t^\alpha\,dt$$

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \ln t\,dt = -\frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1$$

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha \ln t\,dt = -\frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\ln\varepsilon - \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2}\varepsilon^{\alpha+1}.$$

$\lim\limits_{\varepsilon \mapsto 0^+}(\varepsilon^{\alpha+1}\ln\varepsilon) = 0$ par croissance comparée $(\alpha+1>0)$ et $\lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0}\varepsilon^{\alpha+1} = 0$.

Alors $\lim\limits_{\varepsilon\mapsto 0}\int_\varepsilon^1 t^\alpha \ln t\,dt = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

Nous retrouvons ainsi l'existence de $\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt$ et nous avons aussi sa valeur.

$$\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

<u>Remarque</u>.. Il est clair que nous aurions pu obtenir la nature de $\int_0^1 t^\alpha \ln t\,dt$ uniquement à partir de l'intégration par partie. Voir la version 1.

R.

Exercice **Moments d'une variable gaussienne.**

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que I_n existe pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q2. Montrer que si n est impair, I_n est nulle.

Q3 a) p est élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_{2p+2} en fonction de I_{2p}.

b) En déduire la valeur de I_{2p} pour tout élement p de $\mathbb{N}$ (on rappelle que $I_0 = \sqrt{2\pi}$).

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{t\to+\infty} (t^2 f_n(t)) = \lim_{t\to+\infty} (t^{n+2} e^{-t^2/2}) = \lim_{t\to+\infty} \left(2^{\frac{n+2}{2}} \frac{(t^2/2)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{t^2/2}} \right) = 0$ par croissance comparée.

Piste pour une V2 : si $t \geqslant 2$:

$0 \leq t^n e^{-t^2/2} \leq t^n e^{-t}$.

On termine en utilisant $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ ...

1) $f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t\to+\infty}$

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $f_n(t) \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent alors que $\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ ~~converge~~.

Alors $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge également.

Or $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$ a la parité de n. Dans ces conditions $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,dt$ converge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge.

$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,dt$ converge pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q2 Supposons que n est impair. Alors f_n est impaire sur $\mathbb{R}$.

Donc $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0$.

<u>Si $n \in \mathbb{N}$ et si n est impair : $I_n = 0$.</u>

Q3 a) Soit $p\in\mathbb{N}$. $I_{2p+2}=\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+2}e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}\left(t e^{-t^2/2}\right)dt$.

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $u(t)=t^{2p+1}$ et $v(t)=-e^{-t^2/2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $\forall t\in\mathbb{R}$, $u'(t)=(2p+1)t^{2p}$ et $v'(t)=t e^{-t^2/2}$.

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. En intégrant par parties il vient :

$$\int_A^B t^{2p+2}e^{-t^2/2}\,dt = \left[t^{2p+1}\left(-e^{-t^2/2}\right)\right]_A^B - \int_A^B (2p+1)t^{2p}\left(-e^{-t^2/2}\right)dt.$$

$$\int_A^B t^{2p+2}e^{-t^2/2}\,dt = -B^{2p+1}e^{-B^2/2} + A^{2p+1}e^{-A^2/2} + (2p+1)\int_A^B t^{2p}e^{-t^2/2}\,dt. \quad (1)$$

$\lim_{B\to+\infty}\left(B^{2p+1}e^{-B^2/2}\right) = \lim_{A\to-\infty}\left(A^{2p+1}e^{-A^2/2}\right)$ par croissance comparée.

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+2}e^{-t^2/2}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2/2}\,dt$ converge. Alors en faisant tendre A vers $-\infty$ puis B vers $+\infty$ dans (1) il vient $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+2}e^{-t^2/2}\,dt = (2p+1)\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2/2}\,dt$.

Finalement $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p+2}=(2p+1)I_{2p}$.

Remarques.. 1) On aurait pu simplifier un peu en remarquant que $I_{2p}=2\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2/2}\,dt$

2) On obtient encore plus facilement la relation en partant de I_{2p}.

b) « $I_{2p}=(2p-1)I_{2p-2}=(2p-1)(2p-3)\cdots\times 1\times I_0 = \dfrac{(2p)!}{(2p)(2p-2)\cdots 2}I_0 = \dfrac{(2p)!}{2^p\,p!}I_0$. »

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}$, $I_{2p}=\dfrac{(2p)!}{2^p\,p!}I_0$.

- C'est clair pour $p=0$.
- Supposons l'égalité vraie pour $p\in\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

$$I_{2p+2}=(2p+1)I_{2p}=(2p+1)\frac{(2p)!}{2^p\,p!}I_0=\frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)\ 2^p\,p!}I_0=\frac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!}I_0.$$

Ceci achève la récurrence.

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{2p}=\frac{(2p)!}{2^p\,p!}I_0=\frac{(2p)!}{2^p\,p!}\sqrt{2\pi}.$$

EXERCICE 20

Exercice **PC** **Intégration par parties. Endomorphisme de polynômes.**

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t)\, dt$.

Montrer que u est un endomorphisme de E.

Contenu dans oral ESCP 2001 2.14

---

* Montrons que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $u(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Commençons par montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u(X^k) \in \mathbb{R}[X]$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}$, $\int_x^A e^{-t}dt = e^{-x} - e^{-A}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{A \to +\infty} \int_x^A e^{-t}dt = e^{-x}$.

Donc $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ existe et vaut e^{-x} pour tout réel x.

Ainsi $e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ existe et vaut 1 pour tout réel x.

$u(X^0)$ existe et vaut X^0. La propriété est vraie pour $k=0$.

• Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} dt$ converge car $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Alors $\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} dt$ converge. Posons $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(t) = -e^{-t}$ et $g(t) = t^{k+1}$.

f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus $\forall t \in [0, +\infty[$, $f'(t) = e^{-t}$ et $g'(t) = (k+1)t^k$.

Ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_x^A e^{-t} t^{k+1} dt = \left[-e^{-t} t^{k+1}\right]_x^A - \int_x^A (-e^{-t})(k+1) t^k dt = -\frac{A^{k+1}}{e^A} + e^{-x} x^{k+1} + (k+1)\int_x^A e^{-t} t^k dt$$

$\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} dt$ et $\int_x^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ convergent. De plus $\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{A^{k+1}}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée.

[$u(X^k)$ existe !

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient : $\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} dt = e^{-x} x^{k+1} + (k+1) \int_x^{+\infty} e^{-t} t^k dt$.

Alors $e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{k+1} dt = x^{k+1} + (k+1)\, e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} t^k dt$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

donc $u(X^{k+1})$ existe et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(X^{k+1})(x) = x^{k+1} + (k+1)u(X^k)(x)$.

comme $u(X^k) \in \mathbb{R}[X]$: $\underline{u(X^{k+1}) \in \mathbb{R}[X]}$ et $\underline{u(X^{k+1}) = X^{k+1} + (k+1)u(X^k)}$.

ceci achève la récurrence.

<u>Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $u(X^k)$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.</u>

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $\int_x^{+\infty} e^{-t} t^k \, dt$ converge.

Alors $1)$ $\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) \, dt$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales impropres convergentes.

$2)$ $\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) \, dt = \sum_{k=0}^{r} a_k \int_x^{+\infty} e^{-t} t^k \, dt$.

donc $e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) \, dt$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{r} a_k \left(e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} t^k \, dt \right)$.

Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$1)$ $u(P)(x)$ existe

$2)$ $u(P)(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k \, u(X^k)(x)$.

comme pour tout k dans $[\![0, r]\!]$, $u(X^k)$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, $u(P)$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ comme combinaison linéaire de $r+1$ éléments de $\mathbb{R}[X]$.

<u>$u(P)$ existe et $u(P) \in \mathbb{R}[X]$, pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$.</u>

<u>u est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.</u>

* Montrons la linéarité (... que nous avons déjà implicitement utilisée).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda P + Q)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} (\lambda P + Q)(t) \, dt = e^x \int_x^{+\infty} (\lambda e^{-t} P(t) + e^{-t} Q(t)) \, dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda P+\varphi)(x) = \lambda e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t)\,dt + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(\lambda P+\varphi)(x) = \lambda u(P)(x) + u(\varphi)(x) = (\lambda u(P)+u(\varphi))(x)$.

Ainsi $u(\lambda P+\varphi) = \lambda u(P) + u(\varphi)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,\varphi) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, $u(\lambda P+\varphi) = \lambda u(P) + u(\varphi)$. $\underline{u \text{ est linéaire.}}$

Finalement $\underline{\underline{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}}$.

Remarque.. Nous avons vu que $u(X^0) = X^0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u(X^{k+1}) = X^{k+1} + (k+1)\,u(X^k)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)!} u(X^{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!} X^{k+1} + \frac{1}{k!} u(X^k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)!} u(X^{k+1}) - \frac{1}{k!} u(X^k) = \frac{1}{(k+1)!} X^{k+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{n!} u(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{(k+1)!} u(X^{k+1}) - \frac{1}{k!} u(X^k)\right] + \frac{1}{0!} u(X^0).$$

$$\frac{1}{n!} u(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} X^{k+1} + \frac{1}{0!} X^0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k. \quad u(X^n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k.$$

Notons que ceci vaut encore pour $n=0$ car $u(X^0) = X^0$ et $0! \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} X^k = X^0$.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(X^n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k.}}$$

Exercice.. Q1.. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer u^{-1}.

Q2.. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \geqslant 0$

Q3.. Trouver les valeurs propres de u.

R.

EXERCICE 21

Exercice **PC** **Intégration par parties. Intégrale de Dirichlet.**

► *Très classique. le tout est à savoir faire.*

α, β, et γ sont trois réels. On suppose que α est non nul.

Q1. a) Montrer que si $\gamma > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,dt$ est absolument convergente.

b) Montrer que si $0 < \gamma \leqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente (on pourra remarquer que $|\sin u| \geqslant \dfrac{1-\cos(2u)}{2} \geqslant 0$).

c) Conclure cette première question.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Q3. γ est un réel strictement négatif. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\,dt$ divergent (considérer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}+k\pi}^{\frac{\pi}{3}+k\pi} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,dt$ et...).

Et si $\gamma = 0$?

Q4. Faire le point sur la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\,dt$.

Q1. $t \to \dfrac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

a) Supposons $\gamma > 1$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\right| = \dfrac{|\sin(\alpha t+\beta)|}{t^\gamma} \leqslant \dfrac{1}{t^\gamma}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge car $\gamma > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\right| dt$ converge.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,dt$ est donc absolument convergente.

b) Supposons que $0 < \gamma \leqslant 1$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[$, $u(t) = \dfrac{1}{t^\gamma}$ et $v(t) = -\dfrac{\cos(\alpha t+\beta)}{\alpha}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $u'(t) = -\dfrac{\gamma}{t^{\gamma+1}}$ et $v'(t) = \sin(\alpha t+\beta)$.

Ceci suffit pour justifier l'inégration par parties suivante Soit A un élément de $[1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,dt = \left[\frac{1}{t^\gamma}\left(-\frac{\cos(\alpha t+\beta)}{\alpha}\right)\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}}\right)\left(-\frac{\cos(\alpha t+\beta)}{\alpha}\right) dt.$$

$$\int_1^A \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,dt = -\frac{1}{A^\gamma}\,\frac{\cos(\alpha A+\beta)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\int_1^A \frac{\cos(\alpha t+\beta)}{t^{\gamma+1}}\,dt.$$

Notons que $\left|-\dfrac{1}{A^\gamma}\,\dfrac{\cos(\alpha A+\beta)}{\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\alpha|\,A^\gamma}$.

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{|\alpha|\,A^\gamma} = 0$ ($\gamma > 0$), on obtient par encadrement : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{A^\gamma}\,\frac{\cos(\alpha A+\beta)}{\alpha}\right) = 0$.

Donc : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{A^\gamma}\,\frac{\cos(\alpha A+\beta)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\alpha}\right) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\alpha}$. De plus $\dfrac{\gamma}{\alpha}$ n'est pas nul.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha\, t+\beta)}{t^\gamma}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, t+\beta)}{t^{\gamma+1}}\, dt$ sont de même nature.

Montrons l'absolue convergence de la seconde.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant \left|\dfrac{\cos(\alpha\, t+\beta)}{t^{\gamma+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\gamma+1}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\gamma+1}}\, dt$ converge ($\gamma+1>1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives prouvent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(\alpha\, t+\beta)}{t^{\gamma+1}}\right| dt$. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\, t+\beta)}{t^{\gamma+1}}\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève de monter que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha\, t+\beta)}{t^\gamma}\, dt$ est convergente.

Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\, dt$ n'est pas absolument convergent c'est à dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t}\right| dt$ diverge.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ |\sin(\alpha t+\beta)|\geqslant|\sin(\alpha t+\beta)|^2=\sin^2(\alpha t+\beta)=\dfrac{1-\cos(2(\alpha t+\beta))}{2}\geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^\gamma}\geqslant 0$.

Alors $\forall t\in[1,+\infty[,\ \left|\dfrac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\right|\geqslant \dfrac{1}{2\,t^\gamma}-\dfrac{\cos(2(\alpha t+\beta))}{2\,t^\gamma}\geqslant 0 \quad (*)$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\,t^\gamma}\, dt$ diverge ($\gamma\leqslant 1$). $\forall t\in[1,+\infty[,\ \dfrac{\cos(2(\alpha t+\beta))}{2\,t^\gamma}=\dfrac{\cos(2\alpha t+2\beta)}{2\,t^\gamma}=\dfrac{\sin\left(2\alpha t+2\beta+\frac{\pi}{2}\right)}{2\,t^\gamma}$.

Or ce qui précède montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(2\alpha t+2\beta+\frac{\pi}{2}\right)}{2\,t^\gamma}\, dt$ converge (remplacer α par 2α et β par $2\beta+\dfrac{\pi}{2}$).

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2(\alpha t+\beta))}{2\,t^\gamma}\, dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\,t^\gamma}\, dt$ diverge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2\,t^\gamma}-\frac{\cos(2(\alpha t+\beta))}{2\,t^\gamma}\right) dt$ diverge.

$(*)$ et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\right| dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\, dt$ est convergente sans être absolument convergente.

c) Concluons cette première question.

$$\boxed{\text{Si } \gamma>0,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha\, t+\beta)}{t^\gamma}\, dt \text{ est convergente.}}$$

$$\boxed{\text{Si } \gamma>0,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha\, t+\beta)}{t^\gamma}\, dt \text{ est absolument convergente si et seulement si } \gamma>1.}$$

Q2. En appliquant ce qui précède avec $\alpha=1$, $\beta=0$ et $\gamma=1$ on peut affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

$t\to\dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

Donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin t}{t}\, dt$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt$ est absolument convergente. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ converge. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\, dt$ est absolument convergente ce qui n'est pas.

R.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \text{ est convergente mais n'est pas absolument convergente.}}$$

Q3. Ici γ est strictement négatif. Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, dt$ converge.

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin t = \sin(t - 2\,k\pi) \geqslant \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ car sin est croissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

De plus si $t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $t \geqslant 1$ donc $\frac{1}{t^\gamma} = t^{-\gamma} \geqslant 1$ car $\gamma < 0$.

Alors $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{t^\gamma} \geqslant 1$. Donc $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{\sin t}{t^\gamma} \geqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\displaystyle\int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$ car $2\,k\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t - \int_1^{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t = \int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{12}$.

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{12}$ donc $0 \geqslant \frac{\pi}{12}$! !

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t$ diverge.

Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, dt$ converge.

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos t = \cos(t - 2\,k\pi) \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ car cos est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

De plus si $t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $t \geqslant 1$ donc $\frac{1}{t^\gamma} = t^{-\gamma} \geqslant 1$ car $\gamma < 0$.

Alors $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos t \geqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{t^\gamma} \geqslant 1$. Donc $\forall t \in \left[2\,k\pi + \frac{\pi}{6}, 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{\cos t}{t^\gamma} \geqslant \frac{1}{2}$.

Alors $\displaystyle\int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$ car $2\,k\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant 2\,k\pi + \frac{\pi}{3}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t - \int_1^{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t = \int_{2\,k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\,k\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{12}$.

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{12}$ donc $0 \geqslant \frac{\pi}{12}$! !

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t$ diverge.

Supposons $\gamma = 0$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t = \int_1^x \sin t\, \mathrm{d}t = \cos 1 - \cos x$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t = \int_1^x \cos t\, \mathrm{d}t = \sin x - \sin 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2n\pi) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ainsi cos n'a pas de limite en $+\infty$. Donc $x \to \cos 1 - \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, \mathrm{d}t$ diverge.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2n\pi) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin(2n\pi) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ainsi sin n'a pas de limite en $+\infty$. Donc $x \to \sin x - \sin 1$ n'a pas de limite en $+\infty$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, dt$ diverge.

$$\boxed{\text{Si } \gamma \leqslant 0,\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, dt \text{ divergent.}}$$

Q4. Notons que si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, $\sin(\alpha\, t + \beta) = \sin t$ et si $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(\alpha\, t + \beta) = \cos t$.

Alors ce qui précède montre que :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, dt \text{ convergent si et seulement si } \gamma > 0.}$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\, dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\, dt \text{ sont absolument convergentes si et seulement si } \gamma > 1.}$$
