Exercice **PC** **Intégration par parties.**

f est une application continue de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

---

f est continue sur $[1,+\infty[$. Soit F la primitive de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 ($\forall x\in[1,+\infty[$, $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$).

F est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et $t\mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x\in[1,+\infty[$.

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[F(t)\times\frac{1}{t}\right]_1^x - \int_1^x F(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \underset{F(1)=0}{=} \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt. \quad (1)$$

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge donc $F : x\mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$ que nous noterons L.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(F(x)\times\frac{1}{x}\right) = L\times 0 = 0$.

(1) montre alors que $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,dt$.

Nous allons montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,dt$ est absolument convergente en montrant que F est bornée sur $[1,+\infty[$ ou que $|F|$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

Lemme. Soit g une fonction numérique continue sur $[b,+\infty[$ et ayant une limite finie en $+\infty$. Alors : g est bornée sur $[b,+\infty[$.

Posons $\ell = \lim_{x\to+\infty} g(x)$. $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in[b,+\infty[$, $x>A \Rightarrow |g(x)-\ell|<\varepsilon$.

Pour $\varepsilon=1$. $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in[b,+\infty[$, $x>A\Rightarrow |g(x)-\ell|<1$.

Posons $c=\max(b+1,A)$. $c>b$ et $\forall x\in]c,+\infty[$, $|g(x)-\ell|<1$ ($c\geqslant A$).

$\forall x\in]c,+\infty[$, $-1<g(x)-\ell<1$; $\forall x\in]c,+\infty[$, $-1+\ell<g(x)<1+\ell$.

g est bornée sur $]c,+\infty[$.

R

g est continue sur le segment $[b, c]$ donc g possède un maximum M et un minimum m sur $[b, c]$.

$\forall x \in [b, c]$, $m \leq g(x) \leq M$.

Alors $\forall x \in [b, +\infty[$, $\min(-1+\varepsilon, m) \leq g(x) \leq \max(1+\varepsilon, M)$.

g est bornée sur $[b, +\infty[$ ▲ Fin de la preuve du lemme.

F est continue sur $[1, +\infty[$ et F admet une limite finie en $+\infty$.

Alors F est bornée sur $[1, +\infty[$. $|F|$ est majorée sur $[1, +\infty[$.

$\exists K \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [1, +\infty[$, $|F(x)| \leq K$.

Donc $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \left|\frac{F(x)}{x^2}\right| = \frac{|F(x)|}{x^2} \leq \frac{K}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{K}{x^2}$ dx converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{F(t)}{t^2}\right| dt$ converge. $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt$. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

Remarque. – En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (1) il vient : $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt$.

Exercice. – Généraliser ! Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f est une fonction numérique continue sur $[a, +\infty[$ et telle que $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\, dt$ converge.

Exercice **PC** **Intégration par parties.**

f est une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,dt$ convergent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,f''(t)\,dt$ est absolument convergente.

En déduire que $\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,dt$ converge (on pourra raisonner par l'absurde).

---

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ donc f et f'' sont continues sur $[0,+\infty[$.

Alors $f f''$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\forall t\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant \big(|f(t)|-|f''(t)|\big)^2 = f^2(t)+(f'')^2(t) - 2|f(t)|\,|f''(t)|.$

Ainsi $\forall t\in[0,+\infty[,\quad |f(t)f''(t)| = |f(t)|\,|f''(t)| \leqslant \frac{1}{2} f^2(t) + \frac{1}{2}(f'')^2(t).$

1) $\forall t\in[0,+\infty[,\quad 0\leqslant |f(t)f''(t)| \leqslant \frac{1}{2} f^2(t) + \frac{1}{2}(f'')^2(t).$

2) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}f^2(t)+\frac{1}{2}(f'')^2(t)\right)dt$ converge car $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty}(f'')^2(t)\,dt$ convergent.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_0^{+\infty}|f(t)f''(t)|\,dt$.

$\underline{\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

---

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ donc f' est continue sur $[0,+\infty[$. $(f')^2$ également.

Supposons que $\int_0^{+\infty}(f')^2(t)\,dt$ diverge. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x (f')^2(t)\,dt=+\infty$ car $(f')^2$ est positive sur $[0,+\infty[$.

f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$\forall x\in[0,+\infty[,\ \int_0^x (f')^2(t)\,dt = \int_0^x f'(t)f'(t)\,dt = \big[f(t)f'(t)\big]_0^x - \int_0^x f(t)f''(t)\,dt.$

$\forall x\in[0,+\infty[,\ \int_0^x (f')^2(t)\,dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\,dt.$

R.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) f'(x) = \int_0^x (f')^2(t)\,dt + f(0)f'(0) + \int_0^x f(t) f''(t)\,dt$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} \int_0^x (f')^2(t)\,dt = +\infty$ comme nous l'avons dit plus haut.

$x \mapsto \int_0^x f(t) f''(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$ car $\int_0^{+\infty} f(t) f''(t)\,dt$ converge.

Alors $\lim_{x \mapsto +\infty} (f(x) f'(x)) = +\infty$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $x \geqslant B \Rightarrow f(x) f'(x) \geqslant A$.

En particulier $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [0,+\infty[$, $x \geqslant B \geqslant \Rightarrow f(x) f'(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in [B,+\infty[$, $2 f'(x) f(x) \geqslant 1$.

Alors $\forall y \in [B,+\infty[$, $\int_B^y 2 f'(x) f(x) \geqslant \int_B^y 1\,dt = y - B$

$\forall y \in [B,+\infty[$, $[f^2(x)]_B^y \geqslant y - B$.

$\forall y \in [B,+\infty[$, $0 \leq y - B \leqslant f^2(y) - f^2(B) \leqslant f^2(y)$.

$\forall y \in [B,+\infty[$, $0 \leq y - B \leq f^2(y)$ et $\int_B^{+\infty} f^2(y)\,dy$ converge car $\int_0^{+\infty} f^2(y)\,dy$

converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent

alors que $\int_B^{+\infty} (y-B)\,dy$ converge. Posons $L = \int_B^{+\infty} (y-B)\,dy$.

$L \in \mathbb{R}$ et $L = \lim_{z \mapsto +\infty} \int_B^z (y-B)\,dy = \lim_{z \mapsto +\infty} \left[\frac{(y-B)^2}{2} \right]_B^z = \lim_{z \mapsto +\infty} \frac{(z-B)^2}{2} = +\infty$!!

Cette légère contradiction montre que $\int_0^{+\infty} (f')^2(t)\,dt$ ne peut pas être divergente.

$\int_0^{+\infty} (f')^2(t)\,dt$ converge.

Exercice **PC** **Intégration par parties. Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale impropre de fonction positive.**

f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose que $f(0)=0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f'(t)\right)^2 dt$ converge.

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ converge.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ converge (on pourra montrer que $A\to\displaystyle\int_1^A \frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ est majorée en utilisant une intégration par parties et ...).

Q1. $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f^2(t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2=\lim_{t\to0}\left(\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right)^2=\left(f'(0)\right)^2.$

Ainsi $t\to\dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1\frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ converge.

Q2. $t\to\dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Ainsi pour montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ converge, il suffit de montrer que $g: A\to\displaystyle\int_1^A\frac{f^2(t)}{t^2}\,dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

Soit A un élément de $[1,+\infty[$. $t\to-\dfrac{1}{t}$ et f^2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. En intégrant par parties il vient alors :

$$g(A)=\left[-\frac{1}{t}\,f^2(t)\right]_1^A-\int_1^A\left(-\frac{1}{t}\right)2\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{A}\,f^2(A)+f^2(1)+2\int_1^A\frac{f(t)}{t}\,f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f^2(1)+2\int_1^A\frac{f(t)}{t}\,f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué à la dernière intégrale donne :

$$g(A)\leqslant f^2(1)+2\sqrt{\int_1^A\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_1^A\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}\leqslant f^2(1)+2\sqrt{g(A)}\sqrt{\int_1^{+\infty}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}.$$

Posons $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t$. Alors $g(A)\leqslant f^2(1)+2\sqrt{g(A)}\,\sqrt{J}$. Envisageons deux cas.

Premier cas : $g(A)\geqslant 1$. Alors en divisant par $\sqrt{g(A)}$ on obtient : $\sqrt{g(A)}\leqslant\dfrac{f^2(1)}{\sqrt{g(A)}}+2\sqrt{J}\leqslant f^2(1)+2\sqrt{J}$.

$g(A)\leqslant\left(f^2(1)+2\sqrt{J}\right)^2$. $g(A)\leqslant\mathrm{Max}\left(\left(f^2(1)+2\sqrt{J}\right)^2,1\right)$!!

Deuxième cas : $g(A)<1$. Alors on a encore $g(A)\leqslant\mathrm{Max}\left(\left(f^2(1)+2\sqrt{J}\right)^2,1\right)$.

Ainsi g est majorée sur $[1,+\infty[$ ce qui achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 25

Exercice **S** **Changement de variable.**

Q1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-t}}$ $(u=\frac{1}{t})$.

Q2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ $(u=\sqrt{1-t})$.

Q3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$ $(u=t^4)$.

Q4. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(\cos t)^2}$ $(u=\tan t)$ contenu dans oral ESCP 2007 1.3.

Q5. $x\in]0,1[$. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$ $(u=\cdots)$ contenu dans oral ESCP 2011 1.8.

En plus Existence et calcul de :

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t$ $(u=\sqrt{1-t^2}$, R. : $-\ln 2)$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-t}}$ $(u=1/t$, R. : $2)$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ $(t=\tan\theta)$, R. : $\pi/4)$ d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$ $(u=\sin t$, R. : $-\ln 2)$

Q1 $f : t\mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-t}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.

• **V1** Posons $\forall t\in]1,+\infty[$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$. φ définit une bijection strictement décroissante de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$ et φ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

Alors, d'après le cours $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}}}$ et en cas de convergence ces intégrales sont égales.

Notons que $\displaystyle\int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}}}=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}}$.

$\forall x\in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^x\frac{du}{\sqrt{1-u}}=\left[-2\sqrt{1-u}\right]_0^x=2-2\sqrt{1-x}$. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_0^x\frac{du}{\sqrt{1-u}}=2$.

Alors $\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}}$ converge et vaut 2. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}}$ converge et vaut 2.

• **V2** $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci justifie le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$ dans ce qui suit.

Soit $x\in]1,+\infty[$

$$\int_2^x\frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}}=\int_{1/2}^{1/x}\frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}}}=\int_{1/x}^{1/2}\frac{du}{u\sqrt{\frac{1-u}{u^2}}}=\int_{1/x}^{1/2}\frac{du}{\sqrt{1-u}}=\left[-2\sqrt{1-u}\right]_{1/x}^{1/2}.$$

$u=\frac{1}{t}$; $t=\frac{1}{u}$; $dt=-\frac{1}{u^2}du$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}} = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$. ce qui donne aussi :

$$\int_x^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}} = \sqrt{2} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

Alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \int_2^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left(-\sqrt{2}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = -\sqrt{2}+2$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 1} \int_x^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}} = \lim\limits_{x\mapsto 1} \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = \sqrt{2}.$

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}}$ converge et vaut $-\sqrt{2}+2$ et $\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}}$ converge et vaut $\sqrt{2}$.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-t}}$ converge et vaut 2.

Q2 $f : t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0,1[$.

$t\mapsto\sqrt{1-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$. Ceci justifie le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$ dans ce qui suit. Soit $x\in]0,1[$.

$$\int_{1/2}^x f(t)\,dt \underset{\substack{u=\sqrt{1-t}\\ t=1-u^2\\ dt=-2u\,du}}{=} \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{1-x}} \frac{\ln(1-u^2)}{u}(-2u\,du) = 2\int_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1/2}} [\ln(1-u)+\ln(1+u)]\,du.$$

$z\mapsto z\ln z - z$ est une primitive de $z\mapsto \ln z$ sur $]0,+\infty[$. Ceci donne sans trop de difficultés : $\int_{1/2}^x f(t)\,dt = 2\left[-(1-u)\ln(1-u) + 1-u + (1+u)\ln(1+u) - (1+u)\right]_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1/2}}$

Donc $\int_{1/2}^x f(t)\,dt = 2\left[(1+u)\ln(1+u) - (1-u)\ln(1-u) - 2u\right]_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1/2}}$

Donc $\int_{1/2}^x f(t)\,dt = 2g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 2g\left(\sqrt{1-x}\right)$ avec $g : u\mapsto (1+u)\ln(1+u)-(1-u)\ln(1-u)-2u$.

On a également $\int_x^{1/2} f(t)dt = -2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + 2g(\sqrt{1-x})$.

$\lim_{u\mapsto 0} g(u) = \lim_{u\mapsto 0} \left[(1+u)\ln(1+u)-(1-u)\ln(1-u)-2u\right] = 0$.

Alors $\lim_{x\mapsto 1} g(\sqrt{1-x}) = 0$. Donc $\lim_{x\mapsto 1}\int_{1/2}^{x} f(t)dt = \lim_{x\mapsto 1}\left(2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}})-2g(\sqrt{1-x})\right) = 2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

$\int_{1/2}^{1} f(t)dt$ converge et vaut $2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

croissance comparée ...

$\lim_{u\mapsto 1} g(u) = \lim_{u\mapsto 1} \left[(1+u)\ln(1+u)-(1-u)\ln(1-u)-2u\right] = 2\ln 2 - 0 - 2 = 2\ln 2-2$.

Alors $\lim_{x\mapsto 0} g(\sqrt{1-x}) = 2\ln 2-2$ donc $\lim_{x\mapsto 0}\int_x^{1/2} f(t)dt = \lim_{x\mapsto 0}\left(-2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}})+2g(\sqrt{1-x})\right) = -2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + 2(2\ln 2-2)$

Donc $\int_0^{1/2} f(t)dt$ converge et vaut $-2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + (2\ln 2-2)\times 2$

Finalement $\int_0^1 f(t)dt$ converge et vaut $-2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + 4\ln 2 - 4 + 2g(\sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ converge et vaut $4\ln 2-4$.

Q3 $f : t \mapsto \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$. $t\mapsto t^4$ définit une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ et $t\mapsto t^4$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Le théorème de changement de variable permet alors de dire que $I = \int_1^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}dt$ et de même nature que $J = \int_{1^4}^{+\infty} \frac{(\ln u^{1/4})(\frac{1}{4}du)}{(1+u)^3}$.

$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{16}\,\frac{\ln u}{(1+u)^3}du$. Etudions $K = \int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{(1+u)^3}du$.

Posons $\forall u\in[1,+\infty[$, $g(u) = \ln u$ et $h(u) = -\frac{1}{2}(1+u)^{-2}$.

g et h sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. De plus $\forall u\in[1,+\infty[$, $g'(u) = \frac{1}{u}$ et $h'(u) = (1+u)^{-3} = \frac{1}{(1+u)^3}$

ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x\in[1,+\infty[$.

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = \left[-\frac{1}{2}(1+u)^{-2}\ln u\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{2}(1+u)^{-2}\right)\times\frac{1}{u}\,du.$$

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{du}{u(1+u)^2}.$$

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{u+2}{(u+1)^2}\right)du.$$

petite ruse pour avoir la décomposition en éléments simples.

$$(1+u)^2 = 1+u(u+2)\ ;\ \frac{1}{u} = \frac{1}{u(1+u)^2} + \frac{u+2}{(1+u)^2}\ ;\ \frac{1}{u(1+u)^2} = \frac{1}{u} - \frac{u+2}{(1+u)^2}$$

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{u+1}{(u+1)^2} - \frac{1}{(u+1)^2}\right)du.$$

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left[\ln u - \ln(u+1) + \frac{1}{u+1}\right]_1^x.$$

$$\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -\frac{\ln x}{2(1+x)} + \frac{1}{2}\left[\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right].$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du = -0 + \frac{1}{2}\left[\ln 1 + 0 - \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{16}\,\frac{\ln u}{(1+u)^3}\,du$ converge et vaut $\frac{1}{32}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{32}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}\,dt$. R : $-\frac{1}{32}$

(Q4) $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+(\cos t)^2}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$t \mapsto \tan t$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Cela justifie le changement de variable $u = \tan t$ dans ce qui suit. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\int_0^x \frac{dt}{1+(\cos t)^2} \underset{\substack{u=\tan t\\ t=\arctan u\\ dt=\frac{du}{1+u^2}\\ 1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}}}{=} \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}}\,\frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\tan x} \frac{du}{u^2+2}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+(\cos t)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\tan x} \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt2}\right)^2+1} = \frac{\sqrt2}{2}\int_0^{\tan x} \frac{\frac{1}{\sqrt2}\,du}{\left(\frac{u}{\sqrt2}\right)^2+1} = \frac{\sqrt2}{2}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt2}\right]_0^{\tan x}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+(\cos t)^2} = \frac{\sqrt2}{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt2}.$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sqrt2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \frac{dt}{1+(\cos t)^2} = \frac{\sqrt2}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt2\,\pi}{4}.$

Alors $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+(\cos t)^2}$ converge et vaut $\frac{\sqrt2\,\pi}{4}$.

(Q5) Soit $x\in]0,1[$. $f : t\mapsto e^{t^2\ln x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

L'idée consiste à se ramener à $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$

Pour avoir " $t^2\ln x$ " $=$ " $-\frac{u^2}{2}$ " il semble raisonnable de poser $u=\sqrt{-2\ln x}\,t$.

$x\in]0,1[$. $-2\ln x>0$. Posons $\alpha=\sqrt{-2\ln x}$. $\alpha>0$.

$t\mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Ceci justifie le changement de variable $u=\alpha t$ dans ce qui suit. Soit $z\in]0,+\infty[$.

$$\int_0^z f(t)\,dt = \int_0^z e^{t^2\ln x}\,dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{\alpha z} e^{\frac{u^2\ln x}{\alpha^2}}\,\frac{1}{\alpha}\,du \underset{\frac{\ln x}{\alpha^2}=-\frac12}{=} \int_0^{\alpha z} e^{-u^2/2}\,\frac{1}{\alpha}\,du.$$

$$\int_0^z f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha z} e^{-u^2/2}\,du.$$

Le cours de probabilité indique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$ existe et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$. Comme $u\mapsto e^{-u^2/2}$ est paire sur $\mathbb{R}$

$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ existe et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Or $\lim_{x\to+\infty} \alpha x = +\infty$ car $\alpha > 0$

Alors $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha x} e^{-u^2/2}\,du\right) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{-2\ln x}}\;\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln x}\,dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$.

$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$.

EXERCICE 26

J.F.C.

Exercice S **Changement de variable. Dans ESCP 2012 1.10.**

Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et montrer que la courbe représentative de F admet un axe de symétrie ($u = \frac{1}{t}$).

$f_x : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\to f_x(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$.

$\to f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^{x-1}}{t^2} = \dfrac{1}{t^{3-x}}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{3-x}} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 f_x(t)\,dt$ (resp. $\int_1^{+\infty} f_x(t)\,dt$) est de même nature que $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^{1-x}}$ (resp. $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{3-x}}$).

Ainsi $\int_0^1 f_x(t)\,dt$ (resp. $\int_1^{+\infty} f_x(t)\,dt$) est convergente si et seulement si $1-x<1$ (resp. $3-x>1$) ou si et seulement si $x>0$ (resp. $x<2$).

Ainsi $\int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \in]\quad[$.

<u>Le domaine de définition de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t^2}\,dt$ est $]0,2[$.</u>

Soit $x \in]0,2[$. Soit ε et A deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui justifie le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^A \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\,dt \underset{\substack{u=\frac{1}{t}\\ t=\frac{1}{u}\\ dt=-\frac{1}{u^2}du}}{=} \int_{1/\varepsilon}^{1/A} \frac{(1/u)^{x-1}}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{u^{1-x}}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{1}{u^2}\,du = \int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{u^{(2-x)-1}}{1+u^2}\,du \quad (1)$$

$x \in]0,2[$ donc $2-x \in]0,2[$ donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{u^{(2-x)-1}}{1+u^2}\,du$ converge.

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} A^{-1} = 0$. Donc en faisant tendre successivement ε vers 0 par valeurs supérieures et A vers $+\infty$ dans (1) il vient :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{(2-x)-1}}{1+u^2}\,du = F(2-x).$$

$\forall x \in]0,2[$, $2-x \in]0,2[$ et $F(2-x) = F(x)$.

<u>la courbe représentative de F dans un plan rapporté à un repère orthogonal admet la droite d'équation $x = 1$ comme axe de symétrie.</u>

R: EXERCICE 27

Exercice **S** **Changement de variable.**

n est un élément de $\mathbb{N}$ et α est un réel strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha t}\, dt$ existe et vaut $\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

$f : t \mapsto t^n e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Version 1. $t \mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u = \alpha t$ dans ce qui suit.

$$u = \alpha t\ ;\ t = \frac{1}{\alpha} u$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t^n e^{-\alpha t}\,dt \overset{*}{=} \int_0^{\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha} u\right)^n e^{-u} \frac{1}{\alpha}\,du = \int_0^{\alpha x} \frac{1}{\alpha^{n+1}} u^n e^{-u}\,du.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{\alpha x} u^{(n+1)-1} e^{-u}\,du.$$

Or $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(k) = (k-1)!$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(n+1)-1} e^{-u}\,du$ existe et vaut $n!$

Alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^{(n+1)-1} e^{-u}\,du = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. $\underline{\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\,dt \text{ existe et vaut } \frac{n!}{\alpha^{n+1}}}}$

Version 2.. Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{(n+1)-1} e^{-t/(1/\alpha)}}{(1/\alpha)^{n+1} \Gamma(n+1)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

g est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre $\frac{1}{\alpha}$ et $n+1$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 1. Mieux $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^{n+1} t^n e^{-\alpha t}}{n!}\,dt$ existe et vaut 1. Donc $\underline{\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\,dt \text{ existe et vaut } \frac{n!}{\alpha^{n+1}}}}$.

R. EXERCICE 28

Exercice **Changement de variable.**

Q1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Q2. α est un réel. Etudier la nature de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,dt$ (faire très simple).

Q3. α est un réel tel que J converge. Montrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\,du$ existe et vaut J.

En déduire la valeur de J (calculer $2J$! !).

Q1 $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x.$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}.$

Alors $\underline{I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}.$

Q2 $\underline{\forall \alpha}$ $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1) $\forall t \in]0,1],\ 0 \leq f_\alpha(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leq f_\alpha(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ convergent d'après Q1.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge.

$\underline{J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \text{ converge.}}$

Q2 $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$$\lim_{t\to 0^+} (1+t^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha>0 \\ 2 & \text{si } \alpha=0 \\ +\infty & \text{si } \alpha<0 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{t\to 0} f_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha>0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha=0 \\ 0 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}.$$

Dans les trois cas f_α est prolongeable par continuité en 0.

Ainsi $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ converge.

$$\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{t^\alpha} & \text{si } \alpha>0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \alpha=0 \\ 1 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Donc 1.. $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{t^{\alpha+2}} & \text{si } \alpha>0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} & \text{si } \alpha=0 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } \alpha<0 \end{cases}$. $\qquad (*)$

2.. $\forall t \in [1,+\infty[$, $f_\alpha(t) \geq 0$

3.. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\,dt$ converge dans le cas où $\alpha>0$ (et même si $\alpha>-1$),

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergent.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent dans les trois cas que $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge.

(*) <u>Remarque</u>.. Ce regroupement n'est pas du meilleur goût mais il permet d'aller un peu plus vite...

Finalement $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge donc J existe.

Q3 Notons que $g_\alpha : u \mapsto \dfrac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

On peut aisément obtenir l'existence de K en remarquant que : $\forall u \in]0,+\infty[,\ 0 \leq g_\alpha(u) \leq \frac{1}{1+u^2}$.
Ici nous allons utiliser le changement de variable "$t = \frac{1}{u}$" pour montrer que K existe... et qu'elle vaut J. Soit $x \in]0,+\infty[$
$u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ ce qui autorise le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans ce qui suit.

$$\int_1^x g_\alpha(u)\,du = \int_1^x \frac{u^\alpha\,du}{(1+u^2)(1+u^\alpha)} \underset{\substack{t=1/u \\ u=1/t \\ du=-\frac{1}{t^2}dt}}{=} \int_1^{1/x} \frac{(1/t)^\alpha}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{1/x}^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \quad (1)$$

On a aussi $\displaystyle\int_x^1 g_\alpha(u)\,du = \int_1^{1/x} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ (2).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ converge ; (1) montre alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\alpha(u)\,du$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ converge ; (2) montre alors que $\displaystyle\int_0^1 g_\alpha(u)\,du$ converge et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(u)\,du$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(u)\,du + \int_1^{+\infty} f_\alpha(u)\,du$ donc J.

Finalement $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha\,du}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$ converge et vaut J.

$$2J = J + J = J + K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} + \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\,dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^\alpha)\,dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = I = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $J = K = \frac{\pi}{4}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\,dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$.

R.

EXERCICE 29

J.F.C.

Exercice **S** **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ converge.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2\,t))\, dt$ convergent et sont égales à I.

Q3. Montrer $I = J = K = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$ (on pourra faire intervenir $I + J$)

On trouve cela dans ESCP MI 1995. Dans oral ESCP 2004 on étudie $x \to \displaystyle\int_0^x \ln\left(2 \sin\frac{t}{2}\right) dt$.

Q1 $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{t}\ln(\sin t) = \sqrt{t}\left[\ln t + \ln \frac{\sin t}{t}\right] = \sqrt{t}\ln t + \sqrt{t} \ln \frac{\sin t}{t}$.

$\sin t \underset{0}{\sim} t$

$\lim\limits_{t\to 0^+} (\sqrt{t}\ln t) = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\sqrt{t} \ln \frac{\sin t}{t}\right) = 0 \times \ln 1 = 0$.

Alors $\lim\limits_{t\to 0^+} (\sqrt{t} f(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+} (\sqrt{t}\ln(\sin t)) = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} |\sqrt{t} f(t)| = 0$. $\lim\limits_{t\to 0^+} (\sqrt{t}\,|f(t)|) = 0$.

Alors 1) $|f(t)| \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$;

2) $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $|f(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge ($\frac{1}{2} < 1$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f(t)|\, dt$. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ converge.

Q2 $g : t \mapsto \ln(\cos t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Ceci justifie le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ dans ce qui suit. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\int_0^x \ln(\cos t)\, dt \underset{u = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\pi/2}^{\pi/2 - x} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) = \int_{\frac{\pi}{2} - x}^{\pi/2} \ln(\sin u)\, du.$$

$\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - x) = 0^+$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$ converge.

Alors $\lim_{x \mapsto \frac{\pi}{2}^-} \int_0^x \ln(\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,du$.

Ainsi $\underline{\underline{\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt \text{ converge et vaut } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt}}$. $\underline{\underline{J \text{ converge et vaut } I}}$.

$h : t \mapsto \ln(\sin 2t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad h(t) = \ln(\sin 2t) = \ln(2 \cos t \sin t) = \ln 2 + \ln \cos t + \ln \sin t$.

Comme $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$, $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt$ et $\int_0^{\pi/2} \ln 2\,dt$ convergent, $\int_0^{\pi/2} h(t)\,dt$ converge comme somme de trois intégrales convergentes. $\underline{\underline{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,dt \text{ converge}}}$. $\underline{\underline{K \text{ converge}}}$.

<u>Remarque</u>.. $K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + J + I$.

$\underline{K = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I}$.

$t \mapsto 2t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = 2t$ dans ce qui suit. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\int_x^{\pi/4} \ln(\sin 2t)\,dt \underset{u=2t}{=} \int_{2x}^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2} \int_{2x}^{\pi/2} \ln(\sin u)\,du.$$

En faisant tendre x vers 0 il vient $\int_0^{\pi/4} \ln(\sin 2t)\,dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,du = \frac{1}{2} I$.

On a aussi $\int_{\pi/4}^x \ln(\sin 2t)\,dt = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2x} \ln(\sin u)\,du$. $u \mapsto u - \frac{\pi}{2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons alors effectuer le changement de variable $v = u - \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\pi/4}^x \ln(\sin 2t)\,dt = \frac{1}{2} \int_0^{2x - \frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right) dv = \frac{1}{2} \int_0^{2x - \frac{\pi}{2}} \ln(\cos v)\,dv.$$

$\lim\limits_{x\mapsto\pi/2}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt$ et $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos v)\,dv$ convergent. Alors en faisant tendre x vers $\frac{\pi}{2}$ il vient : $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\cos v)\,dv=\frac{1}{2}J=\frac{1}{2}I$.

Finalement $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=\int_0^{\pi/4}\ln(\sin 2t)\,dt+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I=I$.

Ainsi $\underline{\underline{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=I}}$

Q3 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=I$ et $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$.

Par conséquent $I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$. $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Alors $\underline{\underline{I=J=K=-\frac{\pi\ln 2}{2}}}$.

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,dt=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\,dt=-\frac{\pi\ln 2}{2}}}.$$

R.

EXERCICE 30

Exercice | S | Changement de variable.

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2-1})^n}$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{n^2-1}$ ($u = \ t + \sqrt{t^2-1}$...)

Figure dans l'oral ESCP 1994 1.3

$f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(t+\sqrt{t^2-1})^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Posons $\forall t \in]1, +\infty[$, $\varphi(t) = t + \sqrt{t^2-1}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall t \in]1, +\infty[$, $\varphi'(t) = 1 + \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{t+\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} > 0$.

φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

De plus $\lim\limits_{t \to 1} \varphi(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Alors φ définit une bijection strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.

Soit $u \in]0, +\infty[$. Posons $t = \varphi^{-1}(u)$. $\varphi(t) = u$. $t + \sqrt{t^2-1} = u$; $\sqrt{t^2-1} = u - t$

$t^2 - 1 = (u-t)^2 = u^2 - 2tu + t^2$; $2tu = u^2+1$; $t = \dfrac{u^2+1}{2u}$.

$\forall u \in]1, +\infty[$, $\varphi^{-1}(u) = \dfrac{u^2+1}{2u} = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$. φ^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$\forall u \in]1, +\infty[$, $(\varphi^{-1})'(u) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{u^2}\right)$.

Tout ce qui précède permet de dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est de même nature que

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^n}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\right) du$ ou que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^{n+2}}\right) du$.

$n \geqslant 2$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^n}\,du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{n+2}}\,du$ convergent.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^{n+2}}\right) du$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^n} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{n+2}}$.

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^n} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{n+2}}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^n} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{du}{u^n} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A u^{-n}\,du = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\right) = \frac{1}{n-1}.$$

De même $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{n+2}} = \frac{1}{(n+2)-1} = \frac{1}{n+1}$.

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1-(n-1)}{n^2-1} = \frac{1}{n^2-1}$.

Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^n}$ converge et vaut $\dfrac{1}{n^2-1}$.

R

EXERCICE 31

J.F.C.

Exercice | S | **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ existe et vaut 0.

Q2. a est un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{\pi \ln a}{2a}$.

Q1 $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$t^{3/2} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{3/2}\dfrac{\ln t}{t^2} = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(t^{3/2}f(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$;

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $f(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^{3/2}} \geqslant 0$;

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge car $\dfrac{3}{2} > 1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Ceci autorise le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans ce qui suit. Soit $x \in]0,1]$

$$\int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = \int_{1/x}^{1} \frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^{1/x}\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+u^2}\,du = -\int_1^{1/x}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du.$$

$\begin{cases} u = \frac{1}{t} \\ t = \frac{1}{u} \\ dt = -\frac{1}{u^2}\,du \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du$ converge. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et vaut $\displaystyle -\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du$ ou $\displaystyle -\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ ou $\displaystyle -\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\displaystyle -\int_1^{+\infty} f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ donc 0.

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ existe et vaut 0.

Q2 $g_a : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+a^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Pour changer un peu utilisons le théorème de changement de variable sur les intégrales impropres. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $\varphi(t) = \frac{1}{a} t$.

φ définit une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Le changement de variable $u = \frac{1}{a} t$ permet alors de dire

que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{(au)^2+a^2}\,a\,du$. En cas de convergence ces deux intégrales sont égales.

a $\forall u \in]0,+\infty[$, $\dfrac{\ln(au)}{(au)^2+a^2}\,a = \dfrac{\ln a + \ln u}{a(u^2+1)} = \dfrac{\ln a}{a}\,\dfrac{1}{u^2+1} + \dfrac{1}{a}\,\dfrac{\ln u}{u^2+1}$.

a $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_0^x = \arctan x$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{du}{u^2+1} = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{(au)^2+a^2}\,a\,du$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{(au)^2+a^2}\,a\,du = \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = \frac{\ln a}{a} \times \frac{\pi}{2}$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi \ln a}{2a}$.

EXERCICE 32

J.F.C.

Exercice S **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ converge.

Q2. x est un élément de $]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$ existe et vaut $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt = \ln 2$. En déduire I.

Thème abordé dans EDHEC 1996 ex1.

Q1 $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$.

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln t}(t-1)\right) = 0\times(-1) = 0 \ ; \ \lim_{t\to 0^+} f(t) = 0.$$

$$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{\ln t} \sim \frac{t-1}{t-1} = 1 \ ; \ \lim_{t\to 1} f(t) = 1.$$

f est donc prolongeable par continuité en 0 et 1. Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ converge.

Q2 Soit $x \in]0,1[$. $g : t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ et $h : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ sont continues sur $]0,1[$.

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(t \times \frac{1}{\ln t}\right) = 0\times 0 = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\ln t} = 0.$$

g et h sont prolongeables par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ convergent.

$t \mapsto t^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u = t^2$ dans ce qui suit. Soit $\varepsilon \in]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^x \frac{t}{\ln t}\, dt \underset{\substack{u=t^2 \\ t=\sqrt{u} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}du}}{=} \int_{\varepsilon^2}^{x^2} \frac{\sqrt{u}}{\ln\sqrt{u}}\, \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du = \int_{\varepsilon^2}^{x^2} \frac{du}{2\ln\sqrt{u}} = \int_{\varepsilon^2}^{x^2} \frac{du}{\ln u}.$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{du}{\ln u}$ convergent. Donc en faisant tendre ε vers 0 il vient :

$$\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln u}\, du = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

Alors $$\int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

$\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ existe et vaut $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$.

Donc $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$.

$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$

$\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} = \ln|\ln x^2| - \ln|\ln x| = \ln(2|\ln x|) - \ln|\ln x| = \ln \frac{2|\ln x|}{|\ln x|} = \ln 2$.

$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \ln 2$.

Posons $\forall t \in]0,1[$, $\varphi(t) = \frac{t-1}{t\ln t}$. φ est continue sur $]0,1[$.

$\varphi(t) \underset{t\mapsto 1}{\sim} \frac{t-1}{t(t-1)} = \frac{1}{t}$; $\lim_{t\mapsto 1} \varphi(t) = 1$. φ se prolonge en une fonction continue $\hat{\varphi}$ de $]0,1]$. Soit $\hat{\Phi}$ une primitive de $\hat{\varphi}$ sur $]0,1]$. $\hat{\Phi}$ est en particulier continue en 1.

$\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt = \int_x^{x^2} \hat{\varphi}(t)\,dt = \hat{\Phi}(x^2) - \hat{\Phi}(x)$.

Alors $\lim_{x\mapsto 1^-} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt = \hat{\Phi}(1^2) - \hat{\Phi}(1) = 0$.

Donc $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \lim_{x\mapsto 1^-} \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \lim_{x\mapsto 1^-} \left[\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt + \ln 2\right] = 0 + \ln 2 = \ln 2$.

Finalement $\underline{\underline{I = \ln 2}}$. $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$.

<u>Exercice</u> .. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Montrer que $\forall \alpha \in]-1,+\infty[$, $\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt = \ln(\alpha+1)$.

EXERCICE 33

J.F.C.

Exercice **PC** **Changement de variable.**

Q1. α est un réel. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Q2 $\alpha \in]-1, +\infty[$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\, dt = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Calculer $\displaystyle\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{t \ln t}\, dt$ et en déduire que $I_\alpha = \ln(\alpha+1)$

Q1. Posons $\forall t \in]0,1[,\ f(t) = \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}$. f est continue sur $]0,1[$.

$f(t) = \dfrac{e^{\alpha \ln t} - 1}{\ln t} \underset{1}{\sim} \dfrac{\alpha \ln t}{\ln t} = \alpha$. Alors $\displaystyle\lim_{t \to 1} f(t) = \alpha$.

f est donc prolongeable par continuité en 1 et ainsi $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\, dt$ converge.

★ Si $\alpha = 0$, f est nulle sur $]0,1[$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ converge.

★ Supposons que $\alpha > 0$. $\displaystyle\lim_{t \to 0}(t^\alpha - 1) = -1$ et $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln t} = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(t) = 0$.

f est prolongeable par continuité en 0. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ converge.

★ Supposons maintenant α strictement négatif et posons $\beta = -\alpha$. Alors β est strictement positif.

$\displaystyle\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$, par conséquent $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{\ln t} = \dfrac{1}{t^\beta \ln t}$.

$-f(t) \underset{t \to 0}{\sim} -\dfrac{t^\alpha}{\ln t} = \dfrac{1}{t^\beta(-\ln t)}$ et $\forall t \in]0,1[,\ \dfrac{1}{t^\beta(-\ln t)} \geqslant 0$.

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (-f(t))\, dt$ ou $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ est alors de même nature que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\beta(-\ln t)}\, dt$. Maintenant c'est Bertrand.

Posons $\forall t \in]0,1[,\ g(t) = \dfrac{1}{t^\beta(-\ln t)}$ et étudions la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\, dt$.

- 1^er^ cas : $\beta < 1$. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1}{(-\ln t)} = 0$. Alors $g(t) = \dfrac{1}{t^\beta(-\ln t)} = o\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ au voisinage de 0.

Or g et $t \to \dfrac{1}{t^\beta}$ sont positives sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\beta}\, dt$ converge ($\beta < 1$). Alors les règles de comparaisons sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_0^{1/2} g(t)\, dt$.

- 2^ème^ cas : $\beta = 1$. Soit ε un élément de $]0,1[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^{1/2} g(t)\, dt = \int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{(-t \ln t)}\, dt = \Big[-\ln|\ln t|\Big]_\varepsilon^{1/2}$.

$\displaystyle\int_\varepsilon^{1/2} g(t)\, dt = -\ln|\ln(1/2)| + \ln|\ln(\varepsilon)|$. Alors $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1/2} g(t)\, dt = +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} g(t)\, dt$ diverge.

- 3^ème^ cas : $\beta > 1$.

$\displaystyle\lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t\, g(t)}\right) = \lim_{t \to 0}(-t^{\beta-1} \ln t) = 0$ par croissance comparée car $\beta - 1 > 0$. Ainsi $\dfrac{1}{t} = o\big(g(t)\big)$ au voisinage de 0.

Or g et $t \to \dfrac{1}{t}$ sont positives sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Alors les règles de comparaisons sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent la divergence de $\displaystyle\int_0^{1/2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{1/2} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta < 1$, donc si et seulement si $\alpha > -1$, dans le cas où α est strictement négatif. Il en est de même de $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il résulte de tout ce qui précède que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha > -1.}$$

Q2. Ici $\alpha > -1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^\alpha}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ (la première intégrale converge d'après ce qui précède et la troisième également car la fonction concernée est prolongeable par continuité en 0... alors la seconde n'a plus qu'à converger !).

Soit ε un réel appartenant à $]0, 1[$.

$t \to t^{\alpha+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. Ceci justifie le changement de variable $u = t^{\alpha+1}$ (ou $t = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$) dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^x \frac{t^\alpha}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon^{\alpha+1}}^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\alpha+1}\,\frac{1}{\ln u^{\frac{1}{\alpha+1}}}\,\mathrm{d}u = \int_{\varepsilon^{\alpha+1}}^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha+1} = 0$, on obtient : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$

Alors $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$

$$\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|\ln t|\big]_x^{x^{\alpha+1}} = \ln|\ln x^{\alpha+1}| - \ln|\ln x| = \ln\left|\frac{(\alpha+1)\ln x}{\ln x}\right| = \ln|\alpha+1| = \ln(\alpha+1).$$

$$\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{t-1+1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{t-1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{t-1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t + \ln(1+\alpha).$$

La fonction $h : \to \dfrac{t-1}{t\,\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable en une fonction continue $\widehat{h}$ sur $]0, 1]$ car $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t\,\ln t} = 1$.

Soit H une primitive de $\widehat{h}$ sur $]0, 1]$. H est dérivable donc continue sur $]0, 1]$. En particulier H est continue en 1.

$$\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{t-1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t + \ln(1+\alpha) = H(x^{\alpha+1}) - H(x) + \ln(1+\alpha).$$

Or H est continue en 1 donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} H(x^{\alpha+1}) = \lim_{x\to 1} H(x) = H(1)$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = H(1) - H(1) + \ln(1+\alpha)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall \alpha \in]-1, +\infty[,\ \int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+\alpha).}$$

R.

EXERCICE 34

J.F.C.

Exercice **S** **Changement de variable éventuel. Utilisation des densités usuelles.**

▶ *Technique à dominer.*

a, b et c sont trois réels. On suppose que a est strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Figure dans HEC MII 2004

Version 1

$f : t \to e^{-(at^2+bt+c)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t\in\mathbb{R},\ at^2+bt+c = a\left(t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) = a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ at^2+bt+c = \frac{\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\,e^{-\frac{\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}}.$$

Posons $m=-\dfrac{b}{2a}$, $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$ et $K=e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$. Notons que σ est strictement positif et que $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=K\,e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}$.

On a encore $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=(K\sqrt{2\pi}\,\sigma)\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Or $g : t\to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m et σ^2.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $K\sqrt{2\pi}\,\sigma$.

Or $\sqrt{2\pi}\,\sigma=\sqrt{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot$ Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $K\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ ou $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Version 2

Rappelons que le cours nous indique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$ car $t\to\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité.

$f : t \to e^{-(at^2+bt+c)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t\in\mathbb{R},\ at^2+bt+c = a\left(t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) = a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ at^2+bt+c = \frac{(\sqrt{2\,a})^2}{2}\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{\left(\sqrt{2a}\,t+\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t) = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}\,e^{-\frac{\left(\sqrt{2a}\,t+\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}}.$$

R.

Soit A un réel. $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_0^A e^{-\frac{\left(\sqrt{2a}\,t+\frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

$t \to \sqrt{2a}\,t + \dfrac{b}{\sqrt{2a}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u = \sqrt{2a}\,t + \dfrac{b}{\sqrt{2a}}$ dans ce qui suit.

$\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{\frac{b}{\sqrt{2a}}}^{\sqrt{2a}\,A+\frac{b}{\sqrt{2a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \quad (1).$

On a également : $\displaystyle\int_A^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{\sqrt{2a}\,A+\frac{b}{\sqrt{2a}}}^{\frac{b}{\sqrt{2a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \quad (2).$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\sqrt{2a}\,A + \frac{b}{\sqrt{2a}}\right) = +\infty$ et $\displaystyle\int_{\frac{b}{\sqrt{2a}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge. (1) montre alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{\frac{b}{\sqrt{2a}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\left(\sqrt{2a}\,A + \frac{b}{\sqrt{2a}}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{b}{\sqrt{2a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge. (2) montre alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{\frac{b}{\sqrt{2a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \times \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$

Remarque La démarche est à savoir par coeur (pas le résultat).