R

# EXERCICE 35

J.F.C.



Exercice | S | **Changement de variable. Intégration par parties.**

$\alpha$ et $\beta$ sont deux réels strictement positifs.

Q1 Éudier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right) dt$.

Q2. Calculer $I$ lorsque $\beta = 2(1+\alpha)$... $\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)$.

---

**Q1.** $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in ]0,1]$, $f_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha \ln\left(\frac{t^\beta+1}{t^\beta}\right) = t^\alpha \ln(t^\beta+1) - t^\alpha \ln t^\beta = t^\alpha \ln(t^\beta+1) - \beta\, t^\alpha \ln t$.

$\lim\limits_{t\to 0^+} (t^\alpha \ln(t^\beta+1)) \underset{\alpha>0 \text{ et } \beta>0}{=} 0 \times \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}(t^\alpha \ln t) = 0$ par croissance comparée car $\alpha > 0$.

Alors $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{\alpha,\beta}(t) = 0$. Ainsi $f_{\alpha,\beta}$ est prolongeable par continuité en 0. Alors $\underline{\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)\,dt \text{ converge}}$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^\beta} = 0$ car $\beta > 0$. Alors $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^\alpha \frac{1}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{\beta-\alpha}} \geqslant 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$.

Ainsi $\underline{\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt \text{ converge si et seulement si } \beta-\alpha>1}$. Finalement :

$$\underline{\underline{\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right) dt \text{ converge si et seulement si } \beta-\alpha>1.}}$$

**Q2** On suppose ici que $\beta = 2(1+\alpha)$.

Alors $\beta - \alpha = 2+\alpha > 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right) dt$ converge.

Posons $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi(t) = t^{\alpha+1}$. $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi'(t) = (\alpha+1)t^\alpha$.

Donc $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi'(t) > 0$. $\varphi$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Ajoutons que $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Alors $\varphi$ définit une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

Alors le théorème de changement de variable sur les intégrales impropres permet de faire le changement de variable $u = t^{\alpha+1}$ et de dire que :

$$I = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} \ln\left(1+ \frac{1}{t^{2(1+\alpha)}}\right) dt = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) \frac{1}{\alpha+1}\, du = \frac{1}{\alpha+1} J \quad \text{avec } J = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du .$$

Calculons $J$ en intégrant par parties.

Posons $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi(t) = t$ et $\psi(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$. $\varphi$ et $\psi$ sont de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall t \in ]0,+\infty[$, $\varphi'(t) = 1$ et $\psi'(t) = \dfrac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}} = -\dfrac{2}{t} \times \dfrac{1}{t^2+1}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $x \in ]0,+\infty[$.

$$\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_1^x - \int_1^x t\left(-\frac{2}{t}\,\frac{1}{t^2+1}\right) dt = x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln 2 + 2\int_1^x \frac{dt}{t^2+1} .$$

$$\int_1^x \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt \overset{(1)}{=} x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln 2 + 2(\arctan x - \arctan 1) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln 2 + 2\arctan x - \frac{\pi}{2} .$$

et (2) $\displaystyle\int_x^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = -x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \ln 2 - 2\arctan x + \frac{\pi}{2}$.

$x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x \ln(x^2+1) - x\ln x^2\right) = 0$.

Alors en faisant tendre $x$ vers $+\infty$ dans (1) il vient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = -\ln 2 + 2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$.

En faisant tendre $x$ vers $0$ dans (2) il vient $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \ln 2 + \frac{\pi}{2}$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \pi$. $J = \pi$.

Donc $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} \ln\left(1+\frac{1}{t^{2(1+\alpha)}}\right) dt = \frac{\pi}{\alpha+1}$.

**Exercice.** Reprendre Q 1 avec $\alpha$ et $\beta$ quelconques.

R. **EXERCICE 36** J.F.C. 1

| Exercice | S | **Intégration par parties. Changement de variable..** |
|---|---|---|

$p$ et $q$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer l'existence de $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt$.

Q2. Calculer $I(p,q)$ en utilisant l'intégration par parties.

Q3. Retrouver le résultat de Q2 en utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln t$.

---

**Q1** $f_{p,q} : t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0,1]$.

1er cas.. $p \geqslant 1$. $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{p,q}(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} (t^p(\ln t)^q) = 0$ par croissance comparée.

Alors $f_{p,q}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc $\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt$ converge.

2ième cas.. $p=0$. $\lim\limits_{t\to 0^+} (\sqrt{t}\,|f_{p,q}(t)|) = \lim\limits_{t\to 0^+} |\sqrt{t}\,(\ln t)^q| = 0$ par croissance comparée.

Ainsi 1/ $|f_{p,q}(t)| \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

2/ $\forall t \in ]0,1]$, $|f_{p,q}(t)| \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$

3/ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives

montrent que $\int_0^1 |f_{p,q}(t)|\,dt$ converge. $\int_0^1 f_{p,q}(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

$I(p,q) = \int_0^1 t^p(\ln t)^q\,dt$ converge.

---

**Q2** Supposons que $q$ appartient à $\mathbb{N}^*$.

Posons $\forall t \in ]0,1]$, $u(t) = \frac{1}{p+1}\,t^{p+1}$ et $v(t) = (\ln t)^q$. $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $]0,1]$.

De plus $\forall t \in ]0,1]$, $u'(t) = t^p$ et $v'(t) = q \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^{q-1}$.

ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x \in ]0,1]$.

$$\int_x^1 t^p(\ln t)^q\,dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} \times q \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^{q-1}\,dt$$

R.

$$\int_x^1 t^p (\ln t)^q\, dt = -\frac{1}{p+1} x^{p+1} (\ln x)^q - \frac{q}{p+1} \int_x^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt.$$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left(x^{p+1} (\ln x)^q\right) = 0$ par croissance comparée. De plus $\int_0^1 t^p (\ln t)^q\, dt$ et

$\int_0^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt$ convergent. Alors en faisant tendre $x$ vers 0 il vient.

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p (\ln t)^q\, dt = -\frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt = -\frac{q}{p+1} I(p,q-1).$$

donc si $q \in \mathbb{N}^*$ : $I(p,q) = -\dfrac{q}{p+1} I(p,q-1)$ et ceci pour tout $p$ dans $\mathbb{N}$. (*)

---

" $I(p,q) = \left(-\dfrac{q}{p+1}\right) I(p,q-1) = \left(-\dfrac{q}{p+1}\right)\left(-\dfrac{q-1}{p+1}\right) I(p,q-2) = \cdots = \left(-\dfrac{q}{p+1}\right)\left(-\dfrac{q-1}{p+1}\right) \times \cdots \times \left(-\dfrac{q-k+1}{p+1}\right) I(p,q-k)$ "

" $I(p,q) = (-1)^k \dfrac{1}{(p+1)^k} \dfrac{q!}{(q-k)!} I(p,q-k)$ ".

Montrons alors, par récurrence, que $\forall k \in [\![0,q]\!]$, $I(p,q) = (-1)^k \dfrac{1}{(p+1)^k} \dfrac{q!}{(q-k)!} I(p,q-k)$.

→ C'est clair pour $k=0$ car $(-1)^0 \dfrac{1}{(p+1)^0} \dfrac{q!}{(q-0)!} = 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour un élément $k$ de $[\![0,q-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

Par hypothèse de récurrence $I(p,q) = (-1)^k \dfrac{1}{(p+1)^k} \dfrac{q!}{(q-k)!} I(p,q-k)$.

Or d'après (*) $I(p,q-k) = -\dfrac{q-k}{p+1} I(p,q-k-1)$.

Alors $I(p,q) = (-1)^k \dfrac{1}{(p+1)^k} \dfrac{q!}{(q-k)!} \times \left(-\dfrac{q-k}{p+1}\right) I(p,q-k-1)$.

Donc $I(p,q) = (-1)^{k+1} \dfrac{1}{(p+1)^{k+1}} \dfrac{q!}{(q-(k+1))!} I(p,q-(k+1))$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in [\![0,q]\!]$, $I(p,q) = \dfrac{(-1)^k}{(p+1)^k} \dfrac{q!}{(q-k)!} I(p,q-k)$.

Ce qui donne pour $k=q$ : $I(p,q) = \dfrac{(-1)^q}{(p+1)^q} \dfrac{q!}{0!} I(p,0)$.

Or $I(p,0) = \int_0^1 t^p\, dt = \left[\dfrac{1}{p+1} t^{p+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$. Donc $I(p,q) = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} \times \dfrac{1}{p+1}$.

Finalement $I(p,q) = \dfrac{(-1)^q\, q!}{(p+1)^{q+1}}$.

(Q3) Posons $\forall t \in ]0,1[,\ \varphi(t) = -(p+1)\ln t$. $\varphi$ définit une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ et $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]0,1[$.

Le théorème de changement de variable sur les intégrales impropres de notre cours permet de faire le changement de variable $u = \varphi(t) = -(p+1)\ln t$ $(\dots t = e^{-\frac{u}{p+1}})$ et indique que $I(p,q) = \displaystyle\int_{+\infty}^{0} \left(e^{-\frac{u}{p+1}}\right)^p \left(-\frac{u}{p+1}\right)^q \left(-\frac{1}{p+1}\, e^{-\frac{u}{p+1}}\right) du$.

Alors $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-1)^q \frac{1}{(p+1)^{q+1}} \left(e^{-\frac{u}{p+1}}\right)^{p+1} u^q\, du$.

$I(p,q) = \dfrac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^q\, du = \dfrac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}}\, \Gamma(q+1) = \dfrac{(-1)^q\, q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Nous retrouvons $I(p,q) = \dfrac{(-1)^q\, q!}{(p+1)^{q+1}}$.

# EXERCICE 37



**Exercice** **S** **Intégration par parties. Changement de variable. Fonction bêta again.**

▶ *Très classique. À savoir faire.*

Q1. $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels.

Montrer que $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$ existe si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Q2. $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels strictement positifs.

a) Montrer que $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

b) Exprimer $B(\alpha,\beta+1)$ en fonction de $B(\alpha+1,\beta)$.

c) Montrer que $B(\alpha+1,\beta) + B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta)$.

d) Montrer alors que $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\,B(\alpha,\beta)$.

Q3. $p$ et $q$ sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que $B(p+1,q+1) = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

Q4. Calculer $B(x,n+1)$ pour $x$ dans $]0,+\infty[$ et $n$ dans $\mathbb{N}$.

Q5. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel $u$ tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$. *($< 1$ ok ?)*

En déduire, pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0,n]$, l'inégalité : $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction $\varphi$ définie sur $[0,\sqrt{n}[$ qui, à tout réel $t$ de $[0,\sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$

Établir, pour tout réel $t$ de $[0,\sqrt{n}]$, l'inégalité :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Montrer, en deux lignes, que ceci vaut encore pour $t$ dans $[0,n]$.

c) Justifier, pour tout réel $t$ de $[0,n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$

En déduire *proprement et simplement* que, pour tout réel $x$ strictement positif :

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.}$$

Q6. Montrer que : $\boxed{\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$.

*On trouve le résultat de Q5 dans HEC 1984, oral ESCP 2012 1.4. On trouve le résultat de Q6 dans HEC 2005 MI, oral ESCP 2012 1.4, dans le problème d'ECRICOME 1998.*

*Dans ESSEC 1994 MI on trouve* $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

**Q1** Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $\forall t\in\,]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$. $u_{\alpha,\beta}$ est continue sur $]0,1[$.

▲ • $u_{\alpha,\beta}(t)\underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}=\dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$.

• $\forall t\in\,]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)\geqslant 0$

• $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ converge si et seulement si $1-\alpha<1$ ou si et seulement si $\alpha>0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2}u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^{1-\alpha}}$. Donc $\displaystyle\int_0^{1/2}u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha>0$.

▲ • $u_{\alpha,\beta}(t)\underset{1}{\sim}(1-t)^{\beta-1}=\dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$

• $\forall t\in\,]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)\geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{1/2}^1 u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{1}{(1-t)^{1-\beta}}\,dt$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}}$ converge si et seulement si $1-\beta<1$ ou si et seulement si $\beta>0$.

Donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta>0$.

Alors $\underline{\underline{B(\alpha,\beta)}}=\underline{\underline{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}}$ $\underline{\underline{\text{converge si et seulement si } \alpha>0 \text{ et } \beta>0}}$.

**Q2** a) $t\mapsto 1-t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $v=1-t$ dans ce qui suit.

Soit $(a,b)\in\,]0,1[^2$. $\displaystyle\int_a^b u_{\alpha,\beta}(t)\,dt=\int_{1-a}^{1-b}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}(-dv)=\int_{1-b}^{1-a}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}dv$.

$\lim_{a\to 0}(1-a)=1$ et $\lim_{b\to 1}(1-b)=0$ donc $\displaystyle\int_0^1 u_{\alpha,\beta}(t)\,dt=\int_0^1 u_{\beta,\alpha}(v)\,dv$ (les deux intégrales existent).

Donc $\underline{\underline{B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)}}$.

b) Soit $(a,b)\in\,]0,1[^2$. Une intégration par parties montre que

$$\int_a^b t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt=\left[t^{\alpha}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]\right]_a^b-\int_a^b\alpha t^{\alpha-1}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]dt$$

$$\int_a^b t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt = -\frac{1}{\beta}\, b^{\alpha}(1-b)^{\beta} + \frac{1}{\beta}a^{\alpha}(1-a)^{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int_a^b t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}\, dt.$$

$\lim\limits_{b\to 1}\left(-\frac{1}{\beta}b^{\alpha}(1-b)^{\beta}\right) = \lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{1}{\beta}a^{\alpha}(1-a)^{\beta}\right) = 0$. En faisant tendre a vers 0 et b vers 1 il vient alors $B(\alpha+1,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}\, dt = \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1)$.

Donc $\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1)}}$. et $\underline{\underline{B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)}}$.

c] $B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) = \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}[t+(1-t)]\, dt = B(\alpha,\beta)$.

$\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta)}}$.

d] $B(\alpha,\beta) = B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) \overset{b]}{=} B(\alpha+1,\beta)+\frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)$.

Ainsi $\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)}}$.

(Q3) Soit $q\in\mathbb{N}$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ B(p+2,q+1) = \frac{p+1}{p+q+2}B(p+1,q+1)$ ; $\forall p\in\mathbb{N},\ (p+q+2)B(p+2,q+1) = (p+1)B(p+1,q+1)$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ (p+q+2)\times\frac{(p+q+1)!}{(p+1)!}\times B(p+2,q+1) = \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!}(p+1)\, B(p+1,q+1)$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ \frac{(p+q+2)!}{(p+1)!}B(p+2,q+1) = \frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1)$.

Ainsi la suite $\left(\frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1)\right)_{p\geq 0}$ est constante.

$\forall p\in\mathbb{N},\ \frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1) = \frac{(q+1)!}{0!}B(1,q+1)$ ; $B(p+1,q+1) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}B(1,q+1)$.

$B(1,q+1) = \int_0^1 (1-t)^q\, dt = \left[-\frac{1}{q+1}(1-t)^{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$.

Ainsi $B(p+1,q+1) = \frac{p!\,(q+1)!}{(p+q+1)!}\,\frac{1}{q+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

$\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N},\forall q\in\mathbb{N},\ B(p+1,q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\, dt = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}}$.

**Q4** Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

$$B(\beta,\alpha+1)\underset{\text{Q2 a]}}{=} B(\alpha+1,\beta) \underset{\text{Q2 d]}}{=} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta) \underset{\text{Q2 a]}}{=} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\beta,\alpha).\qquad B(\beta,\alpha+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\beta,\alpha).$$

Soit $x\in]0,+\infty[$. $\forall n\in\mathbb{N},\ \underline{B(x,n+2)=\frac{n+1}{n+1+x}B(x,n+1)}$ d'après ce qui précède.

$$\text{"}\ B(x,n+1)=\frac{n}{n+x}B(x,n)=\frac{n}{n+x}\times\frac{n-1}{n-1+x}\times\cdots\times\frac{1}{1+x}\times B(x,1)\ \text{"}$$

Or $B(x,1)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-1}dt=\int_0^1 t^{x-1}dt=\left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1=\frac{1}{x}$. $\qquad \underline{B(x,1)=\frac{1}{x}}$.

Alors $\text{"}\ B(x,n+1)=\frac{n}{n+x}\times\frac{n-1}{n-1+x}\times\cdots\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{x}=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\ \text{"}$

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ B(x,n+1)=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

- $B(x,1)=\frac{1}{x}=\frac{0!}{\prod_{k=0}^{0}(x+k)}$ ; la propriété est vraie pour $n=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $n$ dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$B(x,n+2)=\frac{n+1}{n+1+x}B(x,n+1)\underset{\substack{\text{hypothèse de}\\ \text{récurrence}}}{=}\frac{n+1}{n+1+x}\times\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}=\frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(x+k)}.$$ Ceci achève la récurrence.

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ B(x,n+1)=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

---

**Q5** a] $\varphi: u\mapsto \ln(1-u)+u$ est dérivable sur $]-\infty,1[$.

$$\forall u\in]-\infty,1[,\ \varphi'(u)=\frac{-1}{1-u}+1=\frac{-1+1-u}{1-u}=-\frac{u}{1-u}.$$

$\forall u\in]-\infty,0],\ \varphi'(u)\geqslant 0$ et $\forall u\in[0,1[,\ \varphi'(u)\leqslant 0$.

$\varphi$ est croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,1[$.

Alors $\forall u \in ]-\infty, 1[$, $\psi(u) \leq \psi(0) = 0$. $\forall u \in ]-\infty, 1[$, $\ln(1-u) + u \leq 0$.

$\forall u \in ]-\infty, 1[$, $\ln(1-u) \leq -u$.

Soit $t \in [0, n]$.

Si $t = n$ : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = 0 \leq e^{-t}$. Supposons que $t < n$. Alors $\frac{t}{n} < 1$.

Donc $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ ; $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$.

La croissance de la fonction exponentielle donne alors : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

$\forall t \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

b) $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $1 - \frac{t^2}{n} > 0$ et $1 - \frac{t}{n} > 0$.

$\varphi$ est alors clairement dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$.

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{-\frac{2t}{n}}{1 - \frac{t^2}{n}} - 1 - n\,\frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{t}{n}} = -\frac{2t}{n - t^2} - 1 + \frac{n}{n - t}.$$

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{1}{(n - t^2)(n - t)}\left[-2t(n - t) - (n - t^2)(n - t) + n(n - t^2)\right]$$

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{1}{(n - t^2)(n - t)}\left[-2tn + 2t^2 - n^2 + nt + nt^2 - t^3 + n^2 - nt^2\right]$$

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{(-t)}{(n - t^2)(n - t)}\left[t^2 - 2t + n\right] = \frac{(-t)\left((t-1)^2 + n - 1\right)}{(n - t^2)(n - t)}.$$

Or $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $-t \leq 0$, $(t-1)^2 + n - 1 \geq 0$, $n - t^2 > 0$, $n - t > 0$.

Donc $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $\varphi'(t) \leq 0$. $\varphi$ est décroissante sur $[0, \sqrt{n}[$.

Alors $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = \varphi(t) \leq \varphi(0) = 0$.

Donc $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t \leq \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. La croissance de la fonction exponentielle donne : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

$\forall t\in[0,\sqrt{n}[,\quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$

si $t\in[\sqrt{n},n]$ : $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leq 0$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\geq 0$. On a encore $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

Finalement $\forall t\in[0,n],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$

c) Soit $t\in[0,n]$.

$$e^{-t}-\frac{t^2}{n}e^{-t}=\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\underset{b)}{\leq}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\underset{a)}{\leq}e^{-t}$$

$\forall t\in[0,n],\quad e^{-t}-\frac{t^2}{n}e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}.$

Soit $x$ un réel strictement positif.

$\forall t\in]0,n],\ e^{-t}-\frac{t^2}{n}e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$ et $t^{x-1}\geq 0$.

Alors $\forall t\in]0,n],\quad e^{-t}t^{x-1}-\frac{1}{n}e^{-t}t^{x+1}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\leq e^{-t}t^{x-1}$ (*).

$\Gamma$ étant définie sur $]0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x+1}dt$ convergent.

Alors $\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt$ convergent.

Or $\forall t\in]0,n],\ 0\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\leq e^{-t}t^{x-1}$ et $\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ converge.

(*) donne alors : $\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt-\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt\leq\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt\leq\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt.$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt-\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt\right)=\Gamma(x)-0\times\Gamma(x+2)=\Gamma(x)$ et

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt=\Gamma(x)$. Il vient alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\Gamma(x)$.

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$

(Q6) Soit $x \in ]0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon \in ]0,n]$.

$t \mapsto \frac{t}{n}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \underset{u=\frac{t}{n}}{=} \int_{\varepsilon/n}^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\,du = n^x \int_{\varepsilon/n}^1 u^{x-1}(1-u)^{(n+1)-1}\,du.$$

$\lim_{\varepsilon\to0} \frac{\varepsilon}{n} = 0$, $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ et $\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{(n+1)-1}\,du$ convergent. Alors en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 il vient : $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{(n+1)-1}\,du = n^x B(x,n+1)$

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt = n^x B(x,n+1) \underset{Q4}{=} n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Alors $\Gamma(x) \underset{Q5}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{\ell=0}^{n}(x+\ell)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

# EXERCICE 35



**Exercice** **PC** **Intégration par parties. Changement de variable. Oral ESCP 1999 1-17.**

▶ *Classique. Bon entraînement*

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$ converge. On note $\ell$ sa valeur.

Q2. Soit $x$ un réel strictement positif. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ (on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \ln x\right)$.

Q3 a) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ existe et la calculer (en intégrant entre $x$ et $+\infty$ et en utilisant Q2).

Q4. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

*Thème abordé dans LYON 2009 Pb 1, oral ESCP 2001 1.10, 2005 1.3, 2010 1.2*

---

Q1. $f : t \to e^{-t}\ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $(-f(t)) = -e^{-t}\ln t \underset{0}{\sim} -\ln t$ et $-f$ est positive sur $]0,1]$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_0^1 (-f(t))\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)\,dt$ sont de même nature.

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 (-\ln t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\big[-t\ln t + t\big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(1+\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\big) = 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)\,dt$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

- $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) = e^{-t}\ln t \leqslant e^{-t}t$ ($\ln t \leqslant t-1 \leqslant t$ et $e^{-t}\geqslant 0$).

De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t\,dt$ converge car $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t\,dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt \text{ converge.}}$$

Q2. • $g : t \to \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant g(t)\leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.

Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

- $h : t \to \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et est prolongeable par continuité en 0 car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t} = 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

• Soit $\varepsilon$ et $A$ deux réels strictement positifs.

$t \to -e^{-t}$ et $t \to \ln t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc en intégrant par parties on obtient :

$$\int_\varepsilon^A e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \big[-e^{-t}\ln t\big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{(-e^{-t})}{t}\,\mathrm{d}t = -e^{-A}\ln A + e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre $A$ vers $+\infty$ on obtient : $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(e^{-A}\ln A) = 0$ par croissance comparée).

Soit $x$ un réel strictement positif.

$$\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon + \ln x - \ln\varepsilon + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = (e^{-\varepsilon}-1)\ln\varepsilon + \ln x + \int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent, et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\Big((e^{-\varepsilon}-1)\ln\varepsilon\Big) = 0$ (car $e^{-\varepsilon}-1 \underset{0}{\sim} -\varepsilon$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}(\varepsilon\ln\varepsilon) = 0$).

Ainsi en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on obtient $\ell = \ln x + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}.$$

• $h : t \to \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet sur $\mathbb{R}$ une primitive $\overline{H}$.

Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x = \ell + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ell + \overline{H}(x) - \overline{H}(0)$.

$\overline{H}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue en 0. Donc $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x\right) = \ell + \overline{H}(0) - \overline{H}(0) = \ell$.

$$\boxed{\lim_{x\to0}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x\right) = \ell}.$$

Q3. Soit $x$ un réel strictement positif. $t \to \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 ($e^{-at}-e^{-bt} = 1 - at - (1-bt) + \mathrm{o}(t) = (b-a)t + \mathrm{o}(t)$ au voisinage de 0 donc $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = b-a$).

Ainsi $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit $A$ un réel appartenant à $[x,+\infty[$ $\displaystyle\int_x^A \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^A \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^A \frac{e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

En posant $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde ($t \to at$ et $t \to bt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) on obtient :

$$\int_x^A \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{aA}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{bA}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\displaystyle\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $y$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, on obtient en faisant tendre $A$ vers $+\infty$, la convergence de

$\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ et l'égalité : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ converge.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \ln(ax) - \left(\int_{bx}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \ln(bx)\right) - \ln(ax) + \ln(bx).$$

En remarquant que $-\ln(ax)+\ln(bx) = \ln\dfrac{b}{a}$ et en faisant tendre $x$ vers zéro on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ell - \ell + \ln\frac{b}{a}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt \text{ converge et vaut } \ln\frac{b}{a}.}$$

**Exercice** $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs. $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ converge et vaut $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

Q4. $\varphi : t \to \dfrac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$.

$\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{\ln t}$ et $\varphi(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{t-1}{t-1} = 1$. Alors $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varphi(t) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{\ln t}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1}\varphi(t) = 1$.

Ainsi $\varphi$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Alors $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge.

$t \to -\ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Cela autorise le changement de variable $u = -\ln t$ (donc $t = e^{-u}$) dans ce qui suit. Soit $\varepsilon$ et $A$ deux éléments de $]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^A \varphi(t)\,dt = \int_{-\ln\varepsilon}^{-\ln A} \frac{e^{-u}-1}{-u}(-e^{-u})\,du = \int_{-\ln A}^{-\ln\varepsilon} \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,du.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{A\to 1}(-\ln A) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,du$ converge et vaut $\ln\dfrac{2}{1}$ ou $\ln 2$ (d'après Q3). Finalement

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt \text{ converge et vaut } \ln 2.}$$

---

EXERCICE 39

J.F.C.

Exercice **PC** **Changement de variable.**

$a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs.

$f$ est continue sur $]0,+\infty[$, admet une limite finie $\ell$ en 0 et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ converge et vaut $\ell\ln\dfrac{b}{a}$.

Application. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)-\arctan(2t)}{t}\,dt$ (attention piège à c.).

*Thème abordé dans oral ESCP 2001 1.10, 2010 1.2*

---

Notons que si $a=b$ le résultat est évident ($t\to\dfrac{f(at)-f(bt)}{t}$ est nulle sur $]0,+\infty]$...). Nous supposerons donc $a\neq b$.

Quitte à échanger $a$ et $b$ on peut toujours se ramener au cas où $a<b$. Désormais nous supposerons que $\boxed{a<b}$.

Soit $x$ un réel strictement positif.

$t\to a\,t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=at$ dans ce qui suit.

$\displaystyle\int_1^x\frac{f(at)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{ax}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

On obtient de la même manière : $\displaystyle\int_1^x\frac{f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_b^{bx}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\displaystyle\int_1^x\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{ax}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_b^{bx}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\quad(1).$

On a encore $\displaystyle\int_x^1\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{ax}^a\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{bx}^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\quad(2).$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge, (1) donne : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_b^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_b^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

$$\boxed{\text{Ainsi }\int_1^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t\text{ existe et vaut }\int_a^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\quad(3).}$$

Reprenons (2). $\displaystyle\int_x^1\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{ax}^a\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{bx}^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u+\int_{bx}^a\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{bx}^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\displaystyle\int_x^1\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u-\int_a^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u+\ell\int_{ax}^{bx}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u-\int_a^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

Or $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\Big[\ln|u|\Big]_{ax}^{bx}=\ln(bx)-\ln(ax)=\ln\left(\frac{b}{a}\right).$

Par conséquent $\displaystyle\int_x^1\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u+\ell\ln\left(\frac{b}{a}\right)-\int_a^b\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$

Dès lors montrons, en utilisant la définition, que $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u=0.$

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Posons $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$.

R. 



$\varepsilon'$ est strictement positif ($a < b$) et $\lim_{u\to 0} f(u) = \ell$. Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall u \in ]0,+\infty[$, $|u-0| < \eta \Rightarrow |f(u)-\ell| < \varepsilon'$.

Par conséquent $\forall u \in ]0,\eta[, -\varepsilon' < f(u) - \ell < \varepsilon'$. Donc $\forall u \in ]0,\eta[, -\varepsilon' \, \frac{1}{u} < \frac{f(u)-\ell}{u} < \varepsilon' \, \frac{1}{u}\cdot$

Soit $x$ un élément de $]0,+\infty[$ tel que $x < \frac{\eta}{b}\cdot$ Alors $0 < ax < bx < \eta$. Donc $\forall u \in [ax, bx]$, $-\varepsilon' \, \frac{1}{u} < \frac{f(u)-\ell}{u} < \varepsilon' \, \frac{1}{u}\cdot$

En intégrant il vient $-\varepsilon' \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u < \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u < \varepsilon' \int_{ax}^{bx} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ car $ax < bx$.

Soit encore $-\varepsilon' \ln \frac{b}{a} < \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u < \varepsilon' \ln \frac{b}{a}$ ou $\left|\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon' \ln \frac{b}{a} = \varepsilon$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{b}$. $\forall x \in ]0,\alpha[$, $\left|\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon$. Alors $\forall x \in ]0,+\infty[$, $|x-0| < \alpha \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall x \in ]0,+\infty[$, $|x-0| < \alpha \Rightarrow \left|\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon$. Donc $\lim_{x\to 0} \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to 0} \left(\displaystyle\int_x^1 \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{x\to 0} \left(\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u + \ell \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) = \ln \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \ell \ln \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad (4).}$$

(3) et (4) montrent que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt \text{ existe et vaut } \ell \ln \frac{b}{a}\cdot}$$

Remarque Si $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ et si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge le résultat vaut encore et $\ell$ devient $f(0)$.

Application $\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\arctan t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{t}\cdot$

La positivité de $t \to \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{t}$ et la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ donne visiblement la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\,dt$.

Ce qui précède ne s'applique pas.

Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}\cdot$ Alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\arctan t - \arctan(2t)}{t} = \frac{\arctan \frac{1}{2t} - \arctan \frac{1}{t}}{t}$.

Dès lors posons : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(t) = \arctan \frac{1}{t}\cdot$

$f$ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim_{t\to 0+} \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}\cdot$ Ne reste plus qu'à montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Or $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\arctan \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. Ainsi $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}\cdot$ La positivité de $t \to \frac{1}{t^2}$, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.

Nous pouvons alors appliquer ce qui précède à $f$, $a = 2$ et $b = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{2t}\right) - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(2t)-f(t)}{t}\,dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t) - \arctan(2t)}{t}\,dt \text{ existe et vaut } -\frac{\pi}{2} \ln 2.}$$

---

EXERCICE 40

J.F.C.

Exercice | S | **Intégration par parties. Changement de variable. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.**

▶ *Bon entraînement.*

Q1. Montrer que si $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ : $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q2. Montrer que $I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

Q3. Montrer que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,dt$ converge. Montrer que la suite de terme général $I_n$ est constante.

Q4. Montrer que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$ converge. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$.

En déduire que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

*On calcule l'intégrale de Dirichlet dans LYON 1984, LYON 2004 PB 1, oral ESCP 2000 1-6, ESCP 2000 1-12, ESCP 2010 1.19*

---

Q1 Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Posons $I(\alpha)=\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,dt$.

$f$ et $g_\alpha : t\mapsto -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)$ sont de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et $\forall t\in[a,b]$, $g'_\alpha(t)=\sin(\alpha t)$.
Ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$I(\alpha)=\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,dt = \left[f(t)\left(-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\right)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\left(-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\right)dt$.

$I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\left[f(a)\cos(\alpha a)-f(b)\cos(\alpha b)+\int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,dt\right]$

$|I(\alpha)|=\frac{1}{|\alpha|}\left|f(a)\cos(\alpha a)-f(b)\cos(\alpha b)+\int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,dt\right|$

$|I(\alpha)|\leq\frac{1}{|\alpha|}\left[|f(a)\cos(\alpha a)|+|f(b)\cos(\alpha b)|+\left|\int_a^b f'(t)\cos(\alpha t)\,dt\right|\right]$

$|I(\alpha)|\leq\frac{1}{|\alpha|}\left[|f(a)|\,|\cos(\alpha a)|+|f(b)|\,|\cos(\alpha b)|+\int_a^b |f'(t)\cos(\alpha t)|\,dt\right]$ car $a\leq b$.

$|I(\alpha)|\leq\frac{1}{|\alpha|}\left[|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,|\cos(\alpha t)|\,dt\right]\leq\frac{1}{|\alpha|}\left[|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt\right]$ ... car $a\leq b$.

Posons $M=|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt$.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}^*$, $0\leq|I(\alpha)|\leq\frac{M}{|\alpha|}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{M}{|\alpha|}=0$. Alors $\lim_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$, par encadrement.

Notons que l'on a aussi $\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{M}{|\alpha|}=0$ donc $\lim_{\alpha\to-\infty}I(\alpha)=0$ (normal $I(-\alpha)=-I(\alpha)$...).

$$\lim_{\alpha \mapsto +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,dt = 0 \text{ et } \lim_{\alpha \mapsto -\infty} \int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,dt = 0.$$

Remarques. 1. On montre de la même manière que $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\alpha t)dt = 0$ et que $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \int_a^b f(t)\cos(\alpha t)dt = 0$.

2. ces résultats valent encore lorsque $f$ est simplement continue par morceaux sur $[a,b]$.

Q2 $g : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{t \mapsto 0} g(t) = 1$ car $\sin t \underset{0}{\sim} t$.

Alors $g$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ converge.

Posons $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos t$. $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ et $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \sin t$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty[$.

$$\int_{\pi/2}^x g(t)dt = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{t}\sin t\,dt = \left[\frac{1}{t}(-\cos t)\right]_{\pi/2}^x - \int_{\pi/2}^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)(-\cos t)\,dt.$$

$$\int_{\pi/2}^x g(t)dt = -\frac{\cos x}{x} - \int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{t^2}dt. \quad (*)$$

$$0 \leq \left|-\frac{\cos x}{x}\right| = \frac{|\cos x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \text{ et } \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{|x|} = 0.$$

$(*)$ montre alors que $x \mapsto \int_{\pi/2}^x g(t)dt$ a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \mapsto \int_{\pi/2}^x \frac{\cos t}{t^2}dt$ admet une limite finie en $+\infty$. En clair $\int_{\pi/2}^{+\infty} g(t)dt$ est de même nature que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$.

$$\forall t \in [\tfrac{\pi}{2}, +\infty[,\ 0 \leq \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| = \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \text{ et } \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge } (2>1\,!).$$

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_{\pi/2}^{+\infty}\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|dt$. Ainsi $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt$ est absolument convergente donc convergente. Ce qui donne la convergence de $\int_{\pi/2}^{+\infty}g(t)dt$ et achève de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty}g(t)dt$.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ n'est pas absolument convergente (on pourra utiliser $|\sin t|\geq \sin^2 t=\frac{1-\cos(2t)}{2}$).

Q3 Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $\forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h_n(t)=\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$.

$h_n$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$h_n(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{(2n+1)t}{t}=2n+1$. $\lim\limits_{t\to 0}h_n(t)=2n+1$. Alors $h_n$ se prolonge en une fonction continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $\int_0^{\pi/2}h_n(t)dt$ converge.

<u>Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}dt$ converge.</u>

Soit $n\in\mathbb{N}$. $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\left[\sin((2n+3)t)-\sin((2n+1)t)\right]dt$

$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,2\cos\left(\frac{(2n+3)t+(2n+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+3)t-(2n+1)t}{2}\right)dt$

$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\,2\cos((2n+2)t)\sin t\,dt=2\int_0^{\pi/2}\cos((2n+2)t)\,dt=2\left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\pi/2}$

$I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n+1}\left[\sin((n+1)\pi)-\sin((2n+2)0)\right]=0$. $I_{n+1}=I_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=I_n$. <u>La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est constante.</u>

<u>Remarque</u>.. $I_0=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sin t}dt=\int_0^{\pi/2}1\,dt=\frac{\pi}{2}$. Alors <u>$\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{\pi}{2}$.</u>

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $\omega_n(t) = \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$.

$\omega_n$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. $\omega_n(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$ donc $\lim\limits_{t \to 0} \omega_n(t) = 2n+1$.

Alors $\omega_n$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\int_0^{\pi/2} \omega_n(t)\,dt$ converge.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\left[\dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}\right]dt$.

V1 Avec le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $\forall t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$. $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et

$\forall t \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(t) = -\dfrac{\cos t}{(\sin t)^2} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{t^2(\sin t)^2}\left((\sin t)^2 - t^2 \cos t\right)$.

$\varphi'(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^4}\left((\sin t)^2 - t^2\cos t\right)$.

$\sin t \underset{t \to 0}{=} t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)$ donc $(\sin t)^2 \underset{t \to 0}{=} t^2 - 2 \times t \times \dfrac{t^3}{6} + o(t^4) \underset{t \to 0}{=} t^2 - \dfrac{t^4}{3} + o(t^4)$.

$\cos t \underset{t \to 0}{=} 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $t^2 \cos t \underset{t \to 0}{=} t^2 - \dfrac{t^4}{2} + o(t^4)$.

Alors $(\sin t)^2 - t^2\cos t \underset{t \to 0}{=} t^2 - \dfrac{t^4}{3} - t^2 + \dfrac{t^4}{2} + o(t^4) \underset{t \to 0}{=} \dfrac{1}{6}t^4 + o(t^4)$.

donc $(\sin t)^2 - t^2 \cos t \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{6}t^4$. Ainsi $\varphi'(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^4} \times \dfrac{t^4}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Alors $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi'(t) = \dfrac{1}{6}$. Comme $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ nous pouvons

affirmer que $\varphi$ se prolonge en une fonction $\hat{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Alors $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\,\hat{\varphi}(t)\,dt$.

D'après Q1 $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin(\lambda t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt=0$. Comme $(\lambda_k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$ : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin((\lambda_n+1)t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt=0$. Ainsi $\underline{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(I_n-J_n)=0}$.

<u>V2</u> A la main ! Posons $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}$.

- $\psi$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$. Etudions la continuité de $\psi$ en $0$.

$$\frac{t-\sin t}{t\sin t}\underset{t\mapsto 0}{\sim}\frac{t-\sin t}{t^2}.\quad t-\sin t=t-\left(t-\frac{t^3}{6}\right)+o(t^3)\underset{t\mapsto 0}{=}\frac{t^3}{6}+o(t^3).$$

Alors $t-\sin t\underset{t\mapsto 0}{\sim}\dfrac{t^3}{6}$. $\dfrac{t-\sin t}{t\sin t}\underset{t\mapsto 0}{\sim}\dfrac{t^3/6}{t^2}=t/6$.

Alors $\lim\limits_{t\mapsto 0}\dfrac{t-\sin t}{t\sin t}=\lim\limits_{t\mapsto 0}\dfrac{t}{6}=0=\psi(0)$. Ainsi $\psi$ est continue en $0$.

<u>$\psi$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$</u>

- $\psi$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0}=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)=\frac{t-\sin t}{t^2\sin t}\underset{t\mapsto 0}{\sim}\frac{t^3/6}{t^2\times t}=\frac{1}{6}.$$

$\lim\limits_{t\mapsto 0}\dfrac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0}=\dfrac{1}{6}$. $\psi$ est dérivable en $0$ et $\psi'(0)=\dfrac{1}{6}$.

<u>$\psi$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.</u>

- $\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(t)=-\dfrac{\cos t}{(\sin t)^2}+\dfrac{1}{t^2}$. $\psi'$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(t)=\dfrac{1}{t^2(\sin t)^2}\left[(\sin t)^2-t^2\cos t\right]$

Or $\dfrac{1}{t^2(\sin t)^2}\left[(\sin t)^2-t^2\cos t\right]\underset{t\mapsto 0}{\sim}\dfrac{1}{6}$. Donc $\lim\limits_{t\mapsto 0}\dfrac{1}{t^2(\sin t)^2}\left[(\sin t)^2-t^2\cos t\right]=\dfrac{1}{6}=\psi'(0)$.

Ainsi $\varphi'$ est continue en 0.

Alors $\varphi'$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Finalement $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t) \left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right] dt = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\, \varphi(t)\, dt$.

$\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(\lambda t)\, \varphi(t)\, dt = 0$.

comme $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\, \varphi(t)\, dt = 0$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$.

Nous avons vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{\pi}{2}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - J_n\right) = 0$. donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $t \mapsto (2n+1)t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = (2n+1)t$ dans ce qui suit. Soit $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt = \int_{(2n+1)\varepsilon}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\frac{u}{2n+1}} \times \frac{1}{2n+1}\, du = \int_{(2n+1)\varepsilon}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt$ et $\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, du$ convergent. En faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 on obtient $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, du$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ converge donc $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\sin u}{u}\, du$. Comme $\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$ : $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\, du = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

R. 

EXERCICE 41 J.F.C.

**Exercice 22** **Changement de variable. Intégration par parties.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$ est de même nature que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}\,du$.

Q3. Montrer la convergence de $K$, $J$ et $I$.

Q4. Montrer que $t \to \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par $f$ n'ont pas la même limite).

Q5. Notons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ n'est pas absolument convergente.

---

Q1 Notons que $t \mapsto \sin t^2$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $x \in [1,+\infty[$.

$t \mapsto t^2$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = t^2$ dans ce qui suit.

$$\int_1^x \sin t^2\,dt \underset{\substack{u=t^2,\ t=\sqrt{u}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{u}}du}}{=} \int_1^{x^2} (\sin u)\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.$$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Ainsi $I = \int_1^{+\infty} \sin t^2\,dt$ est de même nature que $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$

Remarque.. En cas de convergence $I = \frac{1}{2}J$.

Q2 Posons $\forall u \in [1,+\infty[$, $v(u) = -\cos u$ et $w(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2}$.

$v$ et $w$ sont de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$ et

$\forall u \in [1,+\infty[$, $v'(u) = \sin u$ et $w'(u) = -\frac{1}{2}u^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u^{3/2}}$.

Soit $x \in [1,+\infty[$. En intégrant par parties il vient :

$$\int_1^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \left[-\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\right]_1^x - \int_1^x (-\cos u)\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^{3/2}}\right)du.$$

$$\int_1^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos u}{u^{3/2}}\,du.$$

$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos 1\right] = \cos 1$ donc $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos 1$ admet une limite finie en $+\infty$

Alors $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{3/2}}\,du$ donc que $K$.

**Q3** 1°/ $\forall u \in [1,+\infty[\,,\ 0 < \left|\dfrac{\cos u}{u\sqrt{u}}\right| \leq \dfrac{1}{u\sqrt{u}} = \dfrac{1}{u^{3/2}}$

2°/ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u\sqrt{u}}\right| du$ converge.

Alors $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u\sqrt{u}}\, du$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement <u>I, J et K sont convergentes</u>.

**Q4** Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \sin t^2$.

La caractérisation séquentielle de la notion de limite permet de dire que si $\varphi$ admet pour limite $L$ (finie ou infinie) lorsque $t$ tend vers $+\infty$ alors POUR TOUTE SUITE $(x_n)_{n \geq n_0}$ qui tend vers $+\infty$, la suite $(\varphi(x_n))_{n \geq n_0}$ tend vers $L$.

Pour montrer que $\varphi$ n'a pas de limite en $+\infty$ il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ qui tendent vers $+\infty$ telles que $(\varphi(u_n))_{n \geq n_0}$ et $(\varphi(v_n))_{n \geq n_0}$ n'aient pas la même limite.

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{2n\pi}$ et $v_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(u_n) = 0$ et $\varphi(v_n) = 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(v_n) = 1$.

Ainsi <u>$\varphi : t \mapsto \sin^2 t$ n'a pas de limite en $+\infty$</u>.

<u>Remarque</u>.. Soit $f$ une application continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui précède montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ n'est pas une condition nécessaire pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. Notons que cette condition n'est pas non plus suffisante (considérer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$). Exercice.. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

(Q5) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\int_1^{+\infty} \sin t^2\, dt$ soit absolument convergente.

Alors $\int_1^{+\infty} |\sin t^2|\, dt$ converge. $\int_0^{+\infty} |\sin t^2|\, dt$ également ! Posons $L = \int_0^{+\infty} |\sin t^2|\, dt$.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = \sqrt{2k\pi}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\sin t^2|\, dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha_{n+1}} |\sin t^2|\, dt = \int_0^{\alpha_{n+1}} |\sin t^2|\, dt.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x |\sin t^2|\, dt = L$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\alpha_{n+1}} |\sin t^2|\, dt = L$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi(n+1)} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\sin t^2|\, dt = L$. Ainsi la série de terme général $u_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\sin t^2|\, dt$ est convergente. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\sin t^2|\, dt = \int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{2k\pi + 2\pi}} |\sin t^2|\, dt \geqslant \int_{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}} |\sin t^2|\, dt$$ car $t \mapsto |\sin t^2|$ est positive sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{2k\pi} \leq \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}} \leq \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \leq \sqrt{2k\pi + 2\pi}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [\beta_k, \gamma_k]$ où $\beta_k = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}}$ et $\gamma_k = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$.

$t^2 \in [\beta_k^2, \gamma_k^2]$ donc $t^2 \in [2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$. Alors $t^2 - 2k\pi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi $|\sin t^2| = |\sin(t^2 - 2k\pi)| = \sin(t^2 - 2k\pi) \geqslant \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Donc $$\int_{\beta_k}^{\gamma_k} |\sin t^2|\, dt \underset{\beta_k \leq \gamma_k}{\geqslant} \int_{\beta_k}^{\gamma_k} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}(\gamma_k - \beta_k) \geqslant 0.$$

Donc $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq (\gamma_k - \beta_k) \leq 2 \int_{\beta_k}^{\gamma_k} |\sin t^2|\, dt \leq 2 \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\sin t^2|\, dt = 2u_k.$$

La convergence de la série de terme général $2u_k$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\gamma_k - \beta_k$ converge. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \gamma_k - \beta_k = \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}} = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2k\pi - \frac{\pi}{6}}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}}} = \frac{\pi/3}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{6}}}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \gamma_k - \beta_k = \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4k}} + \sqrt{1+\frac{1}{12k}}}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4k}} + \sqrt{1+\frac{1}{12k}}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Alors} \quad \gamma_k - \beta_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{2}} \times \frac{1}{k^{1/2}}.$$

Or la série de terme général $\frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k^{1/2}}$ est divergente car $1/2 \leq 1$ et à termes positifs. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la divergence de la série de terme général $\gamma_k - \beta_k$ !!

Ainsi $\int_1^{+\infty} \sin t^2 \, dt$ ne peut pas être absolument convergente.

$\int_1^{+\infty} \sin t^2 \, dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

**Exercice..** Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \sin t^\alpha \, dt$ et $\int_1^{+\infty} |\sin t^\alpha| \, dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.