INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des intégrales impropres...

★ et (★) mentionnent des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans la suite les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

L'écriture $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ signifie que a est un réel et que b est soit un réel strictement plus grand que a soit $+\infty$.

Le lecteur n'aura alors pas de mal pour comprendre les écritures $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

I PREMIERS ÉLÉMENTS

► 1. Définitions

Déf. 1 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

On dit que **l'intégrale impropre** (ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie L (à gauche) en b. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors L.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Déf. 2 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ et f est une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a, b]$.

On dit que l'intégrale **impropre** (ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** si la fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie L (à droite) en a. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors L.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

Déf. 3 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$.

On dit que l'intégrale **impropre** (ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** ou est **convergente** s'il existe un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vaut alors : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (et elle ne dépend pas de c...).

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**.

★ **P** Notons bien que, dans la situation précédente, **si l'une** des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

★★ $0 < a \leqslant +\infty$. Si f est continue sur $]-a, a[$, $x \to \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut avoir une limite finie quand x tend vers a (à gauche) sans que $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente (penser aux fonctions impaires).

Déf. 4 Plus généralement encore.

$-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \leqslant +\infty$. f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$.

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si, pour <u>tout</u> k dans $[\![0, n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans ce cas $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

★ **P** Ici encore la divergence de $\boxed{\text{l'une}}$ des intégrales $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ entraine la divergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Une convention Dans l'une des situations précédentes, si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par convention nous dirons que $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$; de même nous dirons que $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_b^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

▸ 2. Les faux problèmes. Une condition suffisante

Th. 1 Ici $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont } \textbf{deux réels.}}$ f est une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie à gauche en b (autrement dit si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$) :

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\overline{f}$ est le prolongement par continuité de f à $[a, b]$.

Th. 2 Ici $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont } \textbf{deux réels.}}$ f est une application continue de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie à droite en a (autrement dit si f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$) :

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\overline{f}$ est le prolongement par continuité de f à $[a, b]$.

▸ 3. Pour chasser les fausses idées

★★★ $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont } \textbf{deux réels.}}$ f est une application continue de $]a, b]$ (resp. $[a, b[$) dans $\mathbb{R}$.

L'existence d'une limite finie à droite en a (resp. à gauche en b) pour f n'est pas une condition nécessaire à l'existence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge sans que $t \to \frac{1}{\sqrt{t}}$ ait de limite finie en 0.

★★★ Si f est continue sur $[a, +\infty[$ l'existence d'une limite finie (même nulle) en $+\infty$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge et $t \to \dfrac{1}{t}$ admet pour limite 0 en $+\infty$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t$ converge et $t \to \cos t^2$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

En clair il convient de faire très attention dans ce type de problème où les erreurs sont fréquentes et grossières.

II LES PROPRIÉTÉS USUELLES

▶ 1. Relation de Chasles

Th. 3 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

c un élément de $[a, b[$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (en clair ces deux intégrales sont de même nature).

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Même type de résultat dans le cas $]a, b]$.

Th. 4 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. f est est une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

ii) Il existe un réel c_0 appartenant à $]a, b[$ tel que : $\displaystyle\int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

iii) Pour tout élément c de $]a, b[$: $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

En cas de convergence, pour tout élément c de $]a, b[$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 2. De la "linéarité"

Th. 5 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

α et β sont deux réels.

(★) SI $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **ET** $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ALORS $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t$ aussi et :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a un résultat analogue sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

• $\boxed{\bigstar\bigstar}$ On est prié d'être extrêmement prudent dans l'utilisation de ce résultat. Il faut absolument noter que l'égalité contenue dans le théorème est nourrie par la convergence des deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. L'intégrale impropre n'est pas aussi “linéaire” que l'on veut bien le dire...

• Ce résultat s'étend à une combinaison linéaire de fonctions.

Prop. 1 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

Considérons les trois intégrales $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

- Si deux sont convergentes la troisième aussi.
- Si l'une est convergente les deux autres sont de même nature.
- Si deux sont divergentes on ne peut rien dire à priori de la troisième.

$\boxed{\bigstar}$ **P** En résumé on ne s'autorisera à scinder une intégrale impropre en deux qu'après avoir dit (et vérifié) qu'au moins deux intégrales sur trois convergent.

▶ 3. La croissance

Th. 6 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont des applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues.

1. Si f est positive sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2. ★ Si pour tout t dans $[a, b[$, $f(t) \leqslant g(t)$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ET $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a des résultats analogues sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

$\boxed{\bigstar\bigstar}$ Ici encore la prudence s'impose. Le passage de $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ à $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ne peut se faire qu'après avoir vérifié la convergence des DEUX intégrales.

Or le plus souvent le point de départ est l'inégalité sur les fonctions et la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. C'est alors ici qu'il faut se poser la question de la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ AVANT d'écrire l'inégalité entre les intégrales.

Il ne suffit donc pas pour majorer (resp. minorer) une intégrale impropre de majorer (resp. minorer) la fonction que l'on intègre.

PP Pour faire des majorations successives d'une intégrale impropre, il est fortement conseillé de revenir à une intégrale sur un segment, de faire les majorations sur cette intégrale et de passer à la limite en vérifiant la convergence de la dernière intégrale majorante.

▶ 4. Utilisation de la parité

Prop. 2 **P** f est une application continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire (resp. impaire) sur $\mathbb{R}$.

1. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
2. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Prop. 3 **P** f est une application continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est paire sur $\mathbb{R}$.

1. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Prop. 4 **P** f est une application continue sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

1. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.
2. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

★ On peut étendre ces résutats à des fonctions paires (resp. impaires) sur des intervalles symétriques par rapport à 0.

▶ 5. Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle

Th. 7 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ **continue** et de **signe constant** sur $[a, b[$.

Si $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ **converge et vaut 0**, f est nulle sur $[a, b[$.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

★ Ce résultat est explicitement au programme à partir des concours 2015.

▶ 6. Le reste

Th. 8 et **déf. 5** **SD** $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est le **reste** de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle admet donc 0 pour limite à gauche en b.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

★ **P** On est prié de savoir démontrer ce résultat. Pour cela écrire $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

▶ 7. Intégrales de Riemann

Th. 9 1. a et α sont deux réels. On suppose que a est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

Th. 10 1. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement positif.

$$\boxed{\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_b^{0} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

Th. 11 a, h et α sont trois réels. On suppose que h est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{a+h} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

$$\boxed{\int_{a-h}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

▶ 8. Encore une référence du programme

Th. 12 α est un réel.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si α est strictement positif.
- Si α est strictement positif : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$.

▶ 9. Pratique de l'intégration par parties

Th. 13 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. u et v sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

(★) On suppose que $\boxed{u\,v \text{ admet une limite finie à gauche en } b}$.

Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\boxed{\displaystyle\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}[u(x)\,v(x)] - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t}$.

On a des résultats analogues sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

$\boxed{\star\star}$ Il est impératif avant de faire une intégration par parties sur une intégrale impropre convergente de vérifier les hypothèses du théorème d'intégration par parties ; en particulier l'hypothèse de limite.

Sans cette hypothèse, $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ peut être convergente sans que $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ le soit (et réciproquement).

★★ Non seulement il faut être capable d'utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale impropre mais il faut être capable de justifier la convergence d'une intégrale impropre en utilisant une intégration par parties.

★★ **PP** Notons cependant que le programme dit : *"l'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite."* Je conseille fortement de suivre ce conseil.

▸ 10. Changements de variable

Th. 14 **Le résultat du programme** $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

f est une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. φ est une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Énoncé analogue lorsque φ est décroissante mais le dernier résultat devient $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

★★ Non seulement il faut être capable d'utiliser un changement de variable pour calculer une intégrale impropre mais il faut être capable de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant un changement de variable.

★★ Ce théorème est plus difficile à appliquer qu'il n'y parait...

★★ **Je conseille ne pas faire de changement de variable sur une intégrale impropre mais de revenir à des intégrales sur un segment.**

★★ Notons que le programme dit : *"les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats ."*

III LE CAS DES FONCTIONS POSITIVES

★★ **PP** Les résultats qui suivent concernent certes les fonctions positives mais ils permettent également de traiter le cas de fonctions négatives ; si une fonction est négative son opposée est positive !

★ On ne traitera le plus souvent que la “situation $[a, b[$”.

▶ 1. Le théorème fondamental

Th. 15 **SD** $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit f une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $[a, b[$.

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Th. 16 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soit f une application de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $]a, b]$.

- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x \to \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a, b]$.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\forall x \in]a, b],\ 0 \leqslant \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

★★ Ces résultats sont capitaux

P A noter que les derniers points de ces théorèmes sont des générateurs de limites intéressants.

★ Notons que dans ces deux résultats on parle de majoration... Revoir le théorème de la limite monotone.

▶ 2. Critère de comparaison 1 : majoration ou minoration

Th. 17 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose qu'il existe un élément c de $[a, b[$ tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)}$ (★★)

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Th. 18 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f et g sont deux applications de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues.

On suppose qu'il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in]a, c],\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)}$ (★★)

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

★★ Le principe des deux théorèmes précédents est **la comparaison des fonctions** pas des intégrales. Il ne faut donc pas les confondre avec le théorème fondamental.

▶ 3. Critère de comparaison 2 : les équivalents

Th. 19 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. Il existe un réel c tel que **l'une** des deux fonctions soit positive sur $[c, b[$ ★★
2. $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

▶ 4. La convergence absolue

Déf. 6 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Th. 20 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

ALORS : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (★)

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

★★ La réciproque est fausse ; une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente ; elle est alors semi-convergente. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et il convient de savoir le démontrer.

★★ $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

Il importe de se convaincre que l'inégalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ne peut être écrite que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Qu'on se le dise et que l'on se le vérifie.

PP $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

Si f garde un signe constant sur $[a, b[$ ou sur un voisinage de b, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

▶ 5. Critère de comparaison 3 : la négligeabilité

Th. 21 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[, \ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

★★★ Notons que des concours 2006 au concours 2014 le résulat du programme était :

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[, \ f(t) \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}} \ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Ce résultat est largement contenu dans le précédent. Dans les corrections jusqu'aux concours 2014 c'est celui qui est utilisé. Qu'on se le dise.

▶ 6. Un avertissement

★★★ Il est absolument indispensable de mentionner clairement l'hypothèse de posivité en utilisant ces critères de comparaison. Toute omission à ce niveau rendra nulle votre solution.

▶ 7. Des pratiques plus qu'usuelles de comparaison avec des fonctions qui définissent des intégrales de Riemann ("Pilotage Riemannien")

Prop. 5 **PP** a et α sont deux réels et f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

1. On suppose que $\alpha > 1$ et que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$. Alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
2. On suppose que $\alpha \leqslant 1$ et que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On a des résultats analogue en $]-\infty, b]$.

★ Ce résultat n'est pas franchement du cours mais doit être un réflexe. Une fois les hypothèses démontrées on termine en passant pas le critère 3 ou le critère 1.

Prop. 6 **PP** b et α sont deux réels et f est une application de $]0, b]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $]0, b]$.

1. On suppose que $\alpha < 1$ et que $\displaystyle\lim_{t \to 0} t^\alpha f(t) = 0$. Alors : $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
2. On suppose que $\alpha \geqslant 1$ et que $\displaystyle\lim_{t \to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$. Alors : $\displaystyle\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

On a des résultats analogues “sur” $[a,0[$, $]a,b]$ et $[a,b[$.

Ce résultat n'est pas franchement du cours mais doit être un réflexe. Une fois les hypothèses démontrées on termine en passant pas le critère 3 ou le critère 1.

IV LES DENSITÉS DU PROGRAMME AU SERVICE DE CALCUL D'INTÉGRALES IMPROPRES

▶ 1. Avec la loi exponentielle

Prop. 7 λ est un réel strictement positif.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda^3}}$.

★ Ces résultats s'obtiennent en utilisant la densité usuelle d'une loi exponentielle ainsi que l'espérance et la variance d'une telle loi.

▶ 2. Avec la loi normale

Prop. 8 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ convergent.

$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ (!!)}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}}$.

★ Ces résultats s'obtiennent en utilisant la densité usuelle d'une loi normale centrée réduite ainsi que l'espérance et la variance d'une telle loi.

Notons que par parité on a : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

Une simple intégration par parties donne : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1}$.

Prop. 9 **SD** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \text{ (!!)}}$ $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

★ Ces résultats s'obtiennent en utilisant la densité usuelle d'une loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{2}$ ainsi que l'espérance et la variance d'une telle loi. On peut aussi les déduire du premier résultat en faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$.

Notons que par parité on a : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$.

▶ 3. La fonction gamma (!)

Th. 22

1. Si x est un réel strictement positif $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge.
2. **SD** $\Gamma : x \to \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ admet pour domaine de définition $]0, +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

★ La fonction Γ n'apparaît pas dans le chapitre "intégrales sur un intervalle quelconque". Elle apparaît dans le chapitre "variables aléatoires à densité" avec x strictement positif. Les résultats 1, 3 et 4 sont clairement du programme. Ce n'est pas tout à fait le cas pour 2, non ?

Cor. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = n!}$

Remarque **PP** Les résultats précédents permettent de retrouver les résultats suivants :

• Si x et α sont des réels strictement positifs, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}}$ (poser $u = \alpha t$).

• Si p appartient à $\mathbb{N}$ et si α est un réel strictement positif, $\int_0^{+\infty} t^p\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_0^{+\infty} t^p\, e^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{p!}{\alpha^{p+1}}}$.

V SAVOIR FAIRE

SF 1 **Montrer la convergence d'une intégrale impropre "simple".**

SF 2 **Calculer des intégrales impropres "simples".**

SF 3 **Utiliser la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale impropre de fonction positive.**

SF 4 **Utiliser les critères de comparaison pour les fonctions positives.**

SF 5 **PAR CŒUR :**

▲ Convergence de :

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$

$\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$

$\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ avec $\alpha \in]0, +\infty[$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at+b)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(at+b)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ avec a non nul et $\alpha > 0$

▲ n appartient à $\mathbb{N}$ et α est un réel strictement positif. Existence et calcul de :

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^n\,\ln t\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\,\sin t\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\,\cos t\,\mathrm{d}t}$

▲ α et β sont deux réels. Nature de :

$\boxed{\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(|\ln t|)^\beta}}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha\,(1-t)^\beta\,\mathrm{d}t}$

$\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t}$ $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^x\, t^y\, e^{-t}\,\mathrm{d}t}$

SF 6 **Utiliser l'intégration par parties pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

SF 7 **Utiliser un changement de variable pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

SF 8 **Utiliser les densités de probabilité du programme pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

SF 9 **Majorer, minorer, encadrer une intégrale impropre.**

SF 10 **Étudier une suite ou une série définie par une intégrale impropre.**

SF 11 **Étudier une fonction définie par une intégrale impropre.**

SF 12 **Dériver sous le signe somme.**

SF 13 **Écrire une intégrale impropre comme somme d'une série.**

SF 14 **Permuter une somme infinie et une intégrale impropre ou intégrer une série de fonction sur un intervalle quelconque.**

SF 15 **Comparer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ et la nature de la série de terme général $\mathbf{f}(\mathbf{n})$.**

SF 16 **Comparer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ et la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+1} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ ou $\displaystyle\int_{\mathbf{a_k}}^{\mathbf{a_{k+1}}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ avec $(\mathbf{a_k})$ suite croissante qui tend vers $+\infty$.**

SF 17 **Utiliser des intégrales impropres pour encadrer (ou trouver un équivalent) des sommes partielles d'une série.**

SF 18 **Utiliser des intégrales impropres pour encadrer (ou trouver un équivalent) du reste d'une série convergente.**

VI DES FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Travailler sur une intégrale impropre sans avoir parlé de son existence.

★ Utiliser la linéarité sans précaution.

★ Majorer sans précaution ; en particulier oublier de parler de la convergence de l'intégrale majorante.

★ Utiliser les critères de comparaison sans faire aucune mention de signe.

★ Confondre la comparaison des intégrales avec la comparaison des fonctions.

★ Utiliser le théorème d'intégration par parties sans faire la vérification de limite.

★ Faire un changement de variable sur une intégrale dont on n'a pas montré la convergence ou dont on veut montrer la convergence.

★ Parler de (ou étudier) la convergence d'une intégrale non impropre.

★ Dire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou le contraire).

★ Dire que la suite $\left(\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (ici le contraire est vrai).

★ Dire que, comme la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sans vérifier que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

★ Dire que $x \to \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

VII COMPLÉMENTS

▸ 1. Les intégrales de Bertrand

Prop. 10 **SD** α et β sont deux réels. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La pratique pour $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

Si $\beta = 0$, c'est du cours. Supposons $\beta \neq 0$.

Si $\alpha < 1$, on fait diverger en montrant que $\dfrac{1}{t} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Même chose si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$.

Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ on intègre... (attention au cas $\beta = 1$).

Si $\alpha > 1$, on choisit γ dans $]1, \alpha[$ et on fait converger en montrant que $\dfrac{1}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Prop. 11 **SD** α et β sont deux réels. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha(|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La pratique pour $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^\alpha(|\ln t|)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

Si $\beta = 0$, c'est du cours. Supposons $\beta \neq 0$.

Si $\alpha > 1$, on fait diverger en montrant que $\dfrac{1}{t} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}(|\ln t|)^{\beta}}\right)$ au voisinage de 0. Même chose si $\alpha = 1$ et $\beta < 0$.

Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ on intègre... (attention au cas $\beta = 1$ et à la valeur absolue).

Si $\alpha < 1$, on choisit γ dans $]\alpha, 1[$ et on fait converger en montrant que $\dfrac{1}{t^{\alpha}\,(|\ln t|)^{\beta}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^{\gamma}}\right)$ au voisinage de 0.

▶ 2. La fonction Bêta

Prop. 12 x et y sont deux réels.

$B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

La fonction $(x,y) \to \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ est **la fonction bêta**.

Prop. 13 x et y sont deux réels strictement positifs.

$\boxed{B(x,y) = B(y,x)}$ $\boxed{B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)}$ $\boxed{B(x+1,y) = \dfrac{x}{(x+y)}\,B(x,y)}$

Prop. 14 p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. $\boxed{B(p+1,q+1) = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.}$

Prop. 15 x et y sont deux réels strictement positifs. $\boxed{B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$

★ On retrouve cette fonction au niveau des variables aléatoires réelles à densité qui suivent une loi bêta.

▶ 3. La fonction Γ again

Prop. 16 $\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$

Remarque **P** Ce résultat s'obtient sans difficulté en utilisant $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}$ et le changement de variable $u = \sqrt{2\,t}$.

Prop. 17 La fonction Γ est l'unique application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :

- $\Gamma(1) = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- $x \to \ln\Gamma(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prop. 18 La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma^{(r)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^r\,t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Prop. 19 Pour tout réel strictement positif x on a :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = e^{-\gamma x}\,\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{x/n}}{1+x/n}$$

γ est la constante d'Euler.

Prop. 20 Si x et y sont deux réels strictement positifs :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot$$

▶ 4. L'intégrale de Dirichlet

Prop. 21 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}\cdot$

▶ 5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$

Prop. 22 α est un réel.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\alpha > 1$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}}\cdot$

▶ 6. Dérivation

Th. 23 **SD** 1. f est une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\varphi : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a, +\infty[$ et, pour tout élément x de $[a, +\infty[: \varphi'(x) = -f(x)$.

2. Plus généralement $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\varphi : x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a, b[$ et, pour tout élément x de $[a, b[: \varphi'(x) = -f(x)$.

Remarque **P** Ce résultat s'obtient sans difficulté en écrivant : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b < +\infty)$.

▶ 7. Comparaison de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ et de la nature de la série de terme général $\mathbf{f}(\mathbf{n})$

Th. 24 **SD** a est un entier et f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

★★ Ce résultat figurait au programme des concours jusqu'en 2014.

P Ce résultat est par exemple utile pour étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}\cdot$

Th. 25 a est un élément de $\mathbb{N}$ et f une fonction **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

Pour tout n dans $[\![a,+\infty[\![$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=a}^{n} f(k)$ et $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ (si la série converge).

1. La suite de terme général $S_n-\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est décroissante et convergente.
2. La suite de terme général $S_n-\displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante et convergente.
3. Si l'intégrale (ou la série) est divergente : $S_n \sim \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Si l'intégrale (ou la série) est convergente : $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

► 8. Comparaison de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ et de la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ ou $\displaystyle\int_{\mathbf{a_k}}^{\mathbf{a_{k+1}}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}$ avec $(\mathbf{a_k})$ suite croissante qui tend vers $+\infty$

Prop. 23 f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On suppose que f garde un signe constant au voisinage de $+\infty$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Prop. 24 f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

$(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$.

• On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

La suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et à pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

•. On suppose que f **garde un signe constant sur** $[\mathbf{a},+\infty[$.

Si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Si la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

▶ 9. Davantage sur le critère "des équivalents" et "de négligabilité"

Prop. 25 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose que :

1. Il existe un réel c tel que $\boxed{\text{l'une des deux fonctions soit positive sur } [c,b[}$ ★★
2. $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.

• Si l'une des deux inégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge l'autre aussi et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Si l'une des deux inégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge l'autre aussi et :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a un résultat analogue sur $]a,b]$.

Prop. 26 $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c,b[,\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

• On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tout élément x de $[a,b[$ $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ au voisinage de b.

• On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ au voisinage de b.

On a un résultat analogue sur $]a,b]$.

★ On remarquera que les seconds points des deux résultats précédents sont de nature différente.

VIII ENCORE QUELQUES CONSEILS

▶ La seule manière d'avoir les idées claires sur le sujet est de très bien savoir son cours.

▶ Être croyant c'est bien, être pratiquant c'est mieux ! Il faut donc faire beaucoup d'exercices.

▶ La première étape de l'étude d'une intégrale impropre consiste à parler de la continuité de la fonction qui intervient. Cela permet la localisation de tous les "problèmes".

▶ Pour l'étude de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (le problème étant uniquement en b).

▷ Commencer par dire que f est continue sur $[a,b[$.

- ▷ Essayer de trouver une fonction g simple et équivalente à f en b, ne serait-ce que pour connaître le “poids” de f en b et pour commencer à se faire une idée de la nature de l'intégrale. Si g garde un signe constant au voisinage de b il ne reste plus qu'à obtenir la nature de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cas contraire on peut penser à montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donnera la convergence absolue donc la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si ce n'est pas le cas il faudra jouer plus fin.

- ▷ Si la fonction est positive au voisinage de b on pourra penser à la majorer (resp. minorer) par une fonction d'intégrale convergente (resp. divergente).
- ▷ Si la fonction est positive au voisinage de b, penser encore à voir si $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée ou non (ne pas confondre cette démarche avec la précédente).
- ▷ Dans les cas plus difficiles ne pas oublier que l'intégration par parties peut renforcer certaines puissances du dénominateur... (penser à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$)
- ▷ Ces remarques se transposent sans difficulté dans les autres cas.