EXERCICE 1

J.F.C.

Exercice **S** **Intégrale impropre comme somme de série.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Q1. $x \to \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $x \to e^x - 1$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R}^*$ donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\dfrac{\sin x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est prolongeable en une fonction } f \text{ continue sur } \mathbb{R}.\ f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}.}$$

sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin'(x)| = |\cos x| \leqslant 1$.

L'inégalité des accroissement finis donne alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin 0| \leqslant 1 \times |x - 0|$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

$x \to e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivéee seconde est positive. Sa courbe représentative est alors au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0 dont une équation est $y = x + 1$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 1 \leqslant e^x$. En particulier $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 < x \leqslant e^x - 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 < \dfrac{1}{e^x - 1} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ |f(x)| = \dfrac{|\sin x|}{|e^x - 1|} \leqslant \dfrac{|x|}{|e^x - 1|} = \dfrac{x}{e^x - 1} \leqslant \dfrac{x}{x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ |f(x)| \leqslant 1$.

Ceci vaut encore en 0. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x)| \leqslant 1$.

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$$

Exercice Retrouver ce résultat en remarquant que f est continue sur $[0, +\infty[$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.

Q2. g est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuté en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

$\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant |g(x)| = \dfrac{|\sin x|}{e^x - 1} \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Soit x un élément de $[1, +\infty[$. $2 \leqslant e^x$ donc $0 < e^x \leqslant 2\,e^x - 2 = 2\,(e^x - 1)$. Alors $\dfrac{1}{e^x - 1} \leqslant \dfrac{2}{e^x} = 2\,e^{-x}$. Ainsi :

$\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leqslant |g(x)| \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1} \leqslant 2\,e^{-x}$.

De plus $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge. $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2\,e^{-t}\, dt$ converge également. Les règles de comparaisons sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g(t)|\, dt$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente. Ce qui achève de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt \text{ converge.}}$$

Q3. Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $\varphi_p : x \to e^{-(p+1)x} \sin x$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ |\varphi_p(x)| = e^{-(p+1)x}\, |\sin x| \leqslant e^{-(p+1)x} = e^{-px}\, e^{-x} \leqslant e^{-x}$.

La convergence de $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ et les règles de comparaisons sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi_p(t)|\, dt$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_p(t)\, dt$ est absolument convergente donc convergente.

Soit A un réel strictement positif. Deux intégrations par parties simples donnent successivement :

$$\int_0^A e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = \Big[e^{-(p+1)t}\,(-\cos t)\Big]_0^A - \int_0^A \left(-(p+1)\, e^{-(p+1)t}\right)(-\cos t)\, dt.$$

$$\int_0^A e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = 1 - e^{-(p+1)A} \cos A - (p+1) \int_0^A e^{-(p+1)t} \cos t\, dt.$$

$$\int_0^A e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = 1 - e^{-(p+1)A} \cos A - (p+1) \left(\Big[e^{-(p+1)t} \sin t\Big]_0^A - \int_0^A \left(-(p+1)\, e^{-(p+1)t}\right) \sin t\, dt\right).$$

$$\int_0^A e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = 1 - e^{-(p+1)A} \cos A - (p+1)\, e^{-(p+1)A} \sin A - (p+1)^2 \int_0^A e^{-(p+1)t} \sin t\, dt.$$

$\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(e^{-(p+1)A} \cos A\right) = 0$ (car $\left|e^{-(p+1)A} \cos A\right| \leqslant e^{-(p+1)A}$). De même $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(e^{-(p+1)A} \sin A\right) = 0$

Ainsi en faisant tendre A vers l'infini on obtient : $I_p = 1 - (p+1)^2 I_p$ c'est à dire $I_p = \dfrac{1}{1 + (p+1)^2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ I_p = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{1 + (p+1)^2}.}$$

Q4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1+(p+1)^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2} = \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{n-1} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} \sin t\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1} \sin t\, dt.$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{e^t - 1} - \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\right) dt.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{e^t - 1} - \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\right) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$ convergent donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\, dt$ converge.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{e^t - 1} - \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\, dt$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\, dt$ et cecei pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Pour obtenir le résultat il ne reste plus qu'à montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \sin t}{e^t - 1}\, dt$ converge ver zéro.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. Donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-nt} f(t) \leqslant e^{-nt}$.

$\forall A \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^A = \frac{1-e^{-nA}}{n}$. Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\frac{1-e^{-nA}}{n} = \frac{1}{n}\cdot$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{n}\cdot$ Alors $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, le théorème d'encadrement montre alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+p^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$. Concluons.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{1+n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t.}$$

EXERCICE 2

J.F.C.

Exercice **S** **Intégrale impropre comme somme de série.**

Q1. x est un réel strictement positif et p un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer l'existence et calculer $I_p(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{p-1}\, dt$.

Q2. p est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

a) Montrer que pour tout réel $t : e^t - 1 \geqslant t$.

b) Montrer que, pour tout élément q de $\mathbb{N}^*$, $u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt} t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt$ est une intégrale convergente.

Montrer que la suite de terme général u_q converge vers zéro.

c) Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt$.

On trouve cela dans LYON 1983, ESCP MI 1995, oral ESCP 2006 1.7. On trouve le cas $p = 2$ dans ECRICOME 2000 Ex 2, dans l'oral ESCP 1994 1.13

Q1 x est un réel strictement positif et p un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to e^{-xt}\, t^{p-1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit A un réel positif. $t \to xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u = xt$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A e^{-xt}\, t^{p-1}\, dt = \int_0^{xA} e^{-u} \left(\frac{u}{x}\right)^{p-1} \frac{1}{x}\, du = \frac{1}{x^p} \int_0^{xA} e^{-u}\, u^{p-1}\, du.$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} (xA) = +\infty$ et $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{p-1}\, du$ existe et vaut $(p-1)!$.

Alors : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-xt}\, t^{p-1}\, dt = \frac{1}{x^p} \times (p-1)!$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est dans } \mathbb{N}^* \text{ et si } x \text{ est un réel strictement positif, } I_p(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{p-1}\, dt \text{ existe et vaut } \frac{(p-1)!}{x^p}.}$$

Q2 a) $x \to e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est positive) donc sa courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x+1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$. Alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^t - 1 \geqslant t}.$$

b) Soit q un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrons la convergence de $u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt} t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt$.

$g_q : t \to \dfrac{e^{-qt}\, t^{p-1}}{e^t - 1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\forall t \in]0, +\infty[,\ e^t - 1 \geqslant t > 0$ donc $\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{e^t - 1} \leqslant \dfrac{1}{t}$ et $e^{-qt}\, t^{p-1} \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant g_q(t) = \dfrac{e^{-qt}\, t^{p-1}}{e^t - 1} \leqslant e^{-qt}\, t^{p-2} \quad (*)$.

D'après Q1, $I_{p-1}(q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-qt}\, t^{p-2}\, dt$ converge ($p - 1 \in \mathbb{N}^*$ et $q > 0$). Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-qt}\, t^{p-2}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-qt}\, t^{p-2}\, dt$ convergent .

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent alors de dire que : $\displaystyle\int_0^1 g_q(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_q(t)\, dt$ convergent. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_q(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } q \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_q = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt}\, t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t \text{ converge}}.$$

$(*)$ donne en intégrant $0 \leqslant u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt} t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t \leqslant I_{p-1}(q) = \frac{(p-2)!}{q^{p-1}}$.

$p-1$ est strictement positif donc $\displaystyle\lim_{q \to +\infty} \frac{(p-2)!}{q^{p-1}} = 0$. Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{q \to +\infty} u_q = \lim_{q \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt}\, t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = 0.}$$

c) Soit q un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{q} \frac{(p-1)!}{n^p} = \sum_{n=1}^{q} I_p(n) = \sum_{n=1}^{q} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{q} e^{-nt}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t.$

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{(p-1)!}{n^p} = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{q} (e^{-t})^n \right) t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \frac{1 - e^{-qt}}{1 - e^{-t}}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-qt}}{e^t - 1}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{q} \frac{(p-1)!}{n^p} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{p-1}}{e^t - 1} - \frac{t^{p-1}\, e^{-qt}}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{p-1}}{e^t - 1} - \frac{t^{p-1}\, e^{-qt}}{e^t - 1} \right) \mathrm{d}t$ et $u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\, e^{-qt}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ convergent.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{q} \frac{(p-1)!}{n^p} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t - u_q$.

Comme $\displaystyle\lim_{q \to +\infty} u_q = 0$, $\displaystyle\lim_{q \to +\infty} \sum_{n=1}^{q} \frac{(p-1)!}{n^p} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\lim_{q \to +\infty} \sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est dans } [\![2, +\infty[\![, \text{ la série de terme général } \frac{1}{n^p} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t.}$$

EXERCICE 3

J.F.C.

Exercice **PC** **Intégrale impropre comme somme de série.**

Q1. Trouver le domaine de définition des trois fonctions suivantes :

$$\boxed{f : x \to \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t} \quad \boxed{g : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}} \quad \boxed{h : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t}$$

Q2. x est un réel strictement positif. Pour tout réel t strictement positif $\varphi(t) = \dfrac{t^x}{e^t - 1}$.

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout rél t strictement positif :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}t^x e^{-kt} + \varphi(t)e^{-nt}$$

.

Q3. On se propose de montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge vers zéro en utilisant la définition. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer que l'on peut trouver un réel α strictement positif tel que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon/2$.

b) Montrer que φ est bornée sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ (utiliser sa limite en $+\infty$).

En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge vers zéro. Conclure proprement.

Q4. Montrer en utilisant ce qui précède que, pour tout réel x strictement positif : $f(x) = g(x+1)h(x+1)$.

C'est à dire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \zeta(x+1)\,\Gamma(x+1)$ où $\zeta = g$...

On trouve cela dans l'oral ESCP 1997 1.17 et 2007 1.17 ! !

À noter que l'ensemble des énoncés de l'oral ESCP 2007 coïncide avec l'ensemble des énoncés de 1997. Sidérant non ?

Q1 • le cours indique que le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

• Si x est un réel, le cours indique encore que la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi le domaine de définition de g est $]1, +\infty[$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^x}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

→ $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t^x}{t} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $\forall t \in]0, 1]$, $\dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$. Ainsi $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ ou si et seulement si $x > 0$.

→ $t^2\varphi(t) = \dfrac{t^{x+2}}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t^{x+2}}{e^t}$. Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty}(t^2\varphi(t)) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^{x+2}}{e^t} = 0$ donc $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- $\forall t \in [1, +\infty[,\ \varphi(t) \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

La règle de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montre que $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite $x \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\varphi : t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1}$

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} t^x e^{-kt} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{-t})^{k+1}\right) t^x \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-t} \neq 1}}{=} e^{-t} \frac{1 - (e^{-t})^n}{1 - e^{-t}} t^x = \frac{1 - e^{-nt}}{e^t(1 - e^{-t})} t^x$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} t^x e^{-kt} = \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1} t^x = \varphi(t) - \varphi(t) e^{-nt}.$$ Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} t^x e^{-kt} + \varphi(t) e^{-nt}.$$

(Q3) a) $\lim_{z \mapsto 0} \int_0^z \varphi(t)\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in]0, +\infty[, |z| < \eta \Rightarrow \left|\int_0^z \varphi(t)\,dt - 0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\alpha = \frac{\eta}{2}$. $|\alpha| < \eta$ et $\alpha \in]0, +\infty[$ donc $\left|\int_0^\alpha \varphi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall t\ ]0, +\infty[,\ \varphi(t) \geq 0$ donc $\int_0^\alpha \varphi(t)\,dt \geq 0$ car $\alpha \geq 0$.

Ainsi $0 \leq \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt = \left|\int_0^\alpha \varphi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$ ... ou $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \left|\int_0^\alpha \varphi(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

b) $\lim_{t \mapsto +\infty} \varphi(t) \underset{\substack{\uparrow \\ e^t - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^t}}{=} \lim_{t \mapsto +\infty} \frac{t^x}{e^t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{croissance comparée.}}}{=} 0$

Alors en utilisant la définition : $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [A, +\infty[$, $|\varphi(t)| \leq 1$!

Posons $\delta = \max(\alpha, A)$. $\forall t \in [\delta, +\infty[$, $|\varphi(t)| \leq 1$. ou $\frac{1}{2}$ ou 64 ou ...

φ est donc bornée sur $[\delta, +\infty[$. φ est continue sur le segment $[\alpha, \delta]$ donc φ est bornée également sur $[\alpha, \delta]$.

Finalement φ est bornée sur $[\alpha, +\infty[$.

Ainsi $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [\alpha, +\infty[$, $|\varphi(t)| \leq M$. $\forall t \in [\alpha, +\infty[$, $0 \leq \varphi(t) \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\forall t \in [\alpha, +\infty[$, $0 \leq \varphi(t) e^{-nt} \leq M e^{-nt}$.

2) $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_\alpha^A e^{-nt} dt = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-nA}}{-n} - \frac{e^{-n\alpha}}{-n} \right] = \frac{1}{n} e^{-n\alpha}$

donc $\int_\alpha^{+\infty} e^{-nt} dt$ converge. $\int_\alpha^{+\infty} (M e^{-nt}) dt$ également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montre la convergence de l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt$.

de plus $0 \leq \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt \leq \int_\alpha^{+\infty} M e^{-nt} dt = M \frac{1}{n} e^{-n\alpha} \overset{n\alpha \geq 0}{\leq} \frac{M}{n}$ et ceci

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{M}{n} = 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt = 0$.

La suite de terme général $\int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt$ converge vers 0.

La définition montre alors qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p \Rightarrow \left| \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in]0, \alpha]$, $0 \leq \varphi(t) e^{-nt} \leq \varphi(t)$ et $\int_0^\alpha \varphi(t) dt$ converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrer la convergence de $\int_0^\alpha \varphi(t) e^{-nt}\, dt$.

De plus $0 \le \int_0^\alpha \varphi(t) e^{-nt}\, dt \le \int_0^\alpha \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \int_0^\alpha \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \in [\![p, +\infty [\![$

$$\left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| = \left| \int_0^\alpha \varphi(t) e^{-nt}\, dt + \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| \le \left| \int_0^\alpha \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| + \left| \int_\alpha^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nous avons donc montré que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq p \Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt \right| < \varepsilon.$$

ce qui permet de dire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt = 0$.

Remarque.. Notons que nous avons prouvé que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt$ converge.

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Q2 donne :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^x e^{-kt})\, dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt$$ CAR TOUTES les intégrales convergent.

donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t} t^x\, dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, dt = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t} t^x\, dt = f(x)$.

1) la série de terme général $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t} t^x\, dt$ converge.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty} I_k = f(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. $t \mapsto (k+1)t$ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ strictement croissante et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Ceci autorise le changement de variable $u=(k+1)t$ dans ce qui suit.

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t}\, t^x \, dt \underset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1}{k+1}u\right)^x \frac{1}{k+1}\, du = \frac{1}{(k+1)^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x \, du .$$

$$(*)\ \begin{cases} u=(k+1)t \\ t=\frac{1}{k+1}u \\ dt=\frac{1}{k+1}du \end{cases}$$

Finalement $I_k = \frac{1}{(k+1)^{x+1}}\Gamma(x+1)$ et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Donc $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{x+1}}\right)\Gamma(x+1) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{x+1}}\right)\Gamma(x+1) = g(x+1)\,\Gamma(x+1).$$

Ainsi $\underline{\underline{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = g(x+1)\,\Gamma(x+1).}}$

$\underline{\underline{\text{ou}}}$ $\underline{\underline{\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\, dt = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+1}}\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^x \, dt\right).}}$

Remarque g est la fameuse fonction zêta (ζ)

prononcez aussi dzêta, dzeta, dzéta, ...

R

EXERCICE

J.F.C.

Exercice **S** **Intégrale impropre comme somme de série.**

Q1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha t}\, dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ (on se ramènera à Γ).

Q2. Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k (\ln t)^k\, dt$ converge et vaut : $\displaystyle\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ (on pourra penser à poser $u = -\ln t$).

Q3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

On trouve cela dans ECRICOME 1997 Ex 2. Dans ECRICOME 1994 Ex 2 on trouve $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$ *ainsi que dans l'oral ESCP 1998 1.16*

En plus Pour mettre tout le monde d'accord, montrer que pour tout réel α strictement positif :

$$\int_0^1 t^{\alpha t}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, \alpha^{k-1}}{k^k} \quad !$$

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto t^n e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

V1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ce qui autorise le changement de variable $u = \alpha t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x t^n e^{-\alpha t} dt \underset{\substack{u=\alpha t,\ t=\frac{1}{\alpha}u;\ dt=\frac{1}{\alpha}du}}{=} \int_0^{\alpha x} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{\alpha x} u^n e^{-u} du = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{\alpha x} u^{(n+1)-1} e^{-u} du.$$

$\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(n+1)-1} e^{-u} du$ converge et vaut $(n+1-1)!$ De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\alpha x) \overset{\alpha>0}{=} +\infty$

Alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^{n+1}} n!$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

V2 $t \mapsto \alpha t$ définit une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Le théorème de changement de variable sur les intégrales impropres permet de dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{1}{\alpha} du$ et qu'en cas de convergence ces deux intégrales sont égales.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$ converge et vaut $\Gamma(n+1)$ donc $n!$ Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} \frac{1}{\alpha} du$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{\alpha^{n+1}} \times n!$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Exercice.. Proposer une troisième version utilisant une certaine densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\frac{1}{\alpha}$ et $n+1$.

R

Q2 Soit $k \in \mathbb{N}$. $t \mapsto t^k (\ln t)^k$ est continue sur $]0,1]$.

V1 Soit $x \in]0,1]$. $t \mapsto -\ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ ce qui autorise le changement de variable $u = -\ln t$ dans ce qui suit.

$$\int_x^1 t^k (\ln t)^k \, dt \underset{\substack{u=-\ln t \\ t=e^{-u} \\ dt=-e^{-u}du}}{=} \int_{-\ln x}^0 (e^{-u})^k (-u)^k (-e^{-u}) \, du = (-1)^k \int_0^{-\ln x} u^k e^{-(k+1)u} \, du.$$

$k \in \mathbb{N}$ et $k+1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\int_0^{+\infty} u^k e^{-(k+1)u} du$ existe et vaut $\frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$ d'après Q1.

Comme $\lim_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$ alors $I_k = \int_0^1 t^k (\ln t)^k dt$ converge et vaut $\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$.

V2 $t \to -\ln t$ définit une bijection strictement croissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Ceci permet de faire le changement de variable $u = -\ln t$ dans ce qui suit. ← programme oblige !!

$$\int_0^1 t^k (\ln t)^k dt \underset{\substack{u=-\ln t \\ t=e^{-u} \\ dt=-e^{-u}du}}{=} \int_{+\infty}^0 (e^{-u})^k (-u)^k (-e^{-u}) du = (-1)^k \int_0^{+\infty} u^k e^{-(k+1)u} du.$$

$k \in \mathbb{N}$ et $k+1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\int_0^{+\infty} u^k e^{-(k+1)u} du$ converge et vaut $\frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$ d'après Q1.

Ainsi $I_k = \int_0^1 t^k (\ln t)^k dt$ converge et vaut $\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$.

Existence.. Sans utiliser Q1 retrouver l'existence de I_k pour tout k dans $\mathbb{N}$.
En utilisant le principe d'intégration par parties, retrouver la valeur de I_k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

(Q3) Eloignez les enfants ce qui suit est torride.

" $\int_0^1 t^t dt = \int_0^1 e^{t\ln t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\ln t)^k}{k!} dt \overset{!}{\underset{(*)}{=}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 t^k (\ln t)^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$. "

Ne reste plus qu'à justifier cela. En fait essentiellement (*).

Posons $\forall t \in [0,1]$, $u(t) = \begin{cases} t\ln t & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. u est clairement continue sur $]0,1]$

et $\lim_{t \to 0} t\ln t = 0 = u(0)$ donc u est continue en 0. L'utilisation de u permet de travailler tranquillement sur des intégrales non généralisées.

$\forall t \in]0,1]$, $t^t = e^{t\ln t} = e^{u(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u(t))^k}{k!}$.

Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(u(t))^k}{k!} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u(t))^k}{k!} dt$.

Posons $J = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u(t))^k}{k!} dt$. $J = \int_0^1 e^{u(t)} dt = \int_0^1 t^t dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $J_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(u(t))^k}{k!} dt$.

$|J - J_n| = \left| \int_0^1 e^{u(t)} dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(u(t))^k}{k!} dt \right| = \left| \int_0^1 \left(e^{u(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u(t))^k}{k!} \right) dt \right|$

$|J - J_n| \leq \int_0^1 \left| e^{u(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u(t))^k}{k!} \right| dt$.

---

exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp^{(k)}(t) = e^t$. $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\exp^{(\ell)}(0) = 1$.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp à l'ordre n on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{z \in \widehat{[0,x]}} |\exp^{(n+1)}(z)|$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{z \in [0,x]} e^z$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\max_{z \in [0,x]} e^z = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ $\max_{z \in [0,x]} e^z = e^{\max(0,x)} \leq e^{|x|}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$

Alors $\forall t \in [0,1]$, $\left|e^{u(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u(t))^k}{k!}\right| \leq \frac{|u(t)|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u(t)|}$

Ainsi $|J - J_n| \leq \int_0^1 \left|e^{u(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u(t))^k}{k!}\right| dt \leq \int_0^1 \frac{|u(t)|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u(t)|} dt.$

u est continue sur le segment $[0,1]$. $|u|$ également. Alors $|u|$ possède un maximum M sur $[0,1]$.

Notons que $M \geq 0$. Mieux $M > 0$. Mieux encore $M = \frac{1}{e}$ (le démontrer...).

Alors $|J - J_n| \leq \int_0^1 \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} e^M dt = \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} e^M.$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|J - J_n| \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} e^M.$

La série de terme général $\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} e^M\right) = 0$ et par encadrement $\lim_{n \to +\infty} J_n = J$.

Donc $\int_0^1 t^t dt = \int_0^1 e^{u(t)} dt = J = \lim_{n \to +\infty} J_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(u(t))^k}{k!} dt\right).$

$\int_0^1 t^t dt = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}.$

$\int_0^1 t^t dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}.$

Ainsi la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$ converge et $\int_0^1 t^t dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}.$

<u>Remarque</u>.. Sur ce thème on pourra (re-)visiter Ecricome 1994-ex2 ($c'est \int_0^1 x^{-x} dx$) et Ecricome 1997-ex2 ($c'est \int_0^1 x^x dx$).

EXERCICE 5

J.F.C.

Exercice | PC | **Intégrale impropre comme somme de série. D'après ESCP 1994 1.4.**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi\, t)\,\mathrm{d}t$

$f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$; $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$.

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$ converge.

$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

$g : t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$ est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$$\sin(\pi t) = \sin(\pi - \pi t) = \sin(\pi(1-t)) \underset{t\to 1}{\sim} \pi(1-t) \ ; \ g(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{\pi(1-t)}{1-t} = \pi.$$

Alors $\lim\limits_{t\to 1} g(t) = \pi$. g est prolongeable par continuité en 1. Ainsi $\int_0^1 g(t)\,dt$ converge.

$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$ converge.

Soit $x \in]0,1[$. $t \mapsto \pi - \pi t$ est de classe C^1 sur $[0,1[$. Ceci autorise le changement de variable $u = \pi - \pi t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt = \int_{\pi}^{\pi-\pi x} \frac{\sin(\pi - u)}{u/\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\right)du = \int_{\pi-\pi x}^{\pi} \frac{\sin(\pi-u)}{u}\,du = \int_{\pi-\pi x}^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$ et $\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$ convergent et $\lim\limits_{x\to 1}(\pi - \pi x) = 0$. Alors, en faisant tendre x vers 1, il vient :

$\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$. $\quad \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{N+1}}{1-t}$

$$\forall t \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{N} t^n \sin(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t} - \frac{t^{N+1}\sin(\pi t)}{1-t} = g(t) - t^{N+1} g(t) \quad (*)$$

$t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^n \sin(\pi t)$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} t^n \sin(\pi t)\,dt$ existe. De plus

$\int_0^1 g(t)dt$ converge. Alors $(*)$ permet de dire que :

1) $\int_0^1 t^{N+1} g(t)dt$ converge

2) $\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} t^n \sin(\pi t)dt = \int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt$

Ainsi $\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt = \int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt$.

Comme nous l'avons vu g qui est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ se prolonge par continuité en une fonction $\hat{g}$ continue sur $\mathbb{R}$.

$|\hat{g}|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[0,1]$. Alors $|\hat{g}|$ possède un maximum M sur $[0,1]$.

On a : $0 \leq \left|\int_0^1 t^{N+1}\hat{g}(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |t^{N+1}\hat{g}(t)|\,dt = \int_0^1 t^{N+1}|\hat{g}(t)|\,dt \leq M\int_0^1 t^{N+1}dt = \frac{M}{N+2}$.

De plus $\lim_{N\to+\infty} \frac{M}{N+2} = 0$. Alors, par encadrement, $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 t^{N+1}\hat{g}(t)dt = 0$.

donc $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt = 0$ (g et $\hat{g}$ coïncident sur $\mathbb{R}-\{1\}$).

Ainsi $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt\right) = \int_0^1 g(t)dt$.

Alors 1) la série de terme général $\int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt$ converge.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t)dt = \int_0^1 g(t)dt$.

Donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,dt$.

EXERCICE 6

Exercice **PC** **Intégrale impropre comme somme de série. ESCP 2000 1-7.**

Q1. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $h(x) = \ln(1 - x)$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée $p^{\text{ème}}$ de h.

b) Soit x un élément de $]0, 1[$. On pose $\forall t \in [0, x]$, $\varphi_x(t) = \dfrac{t - x}{t - 1}\cdot$ Étudier les variations de φ_x.

c) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0, 1[$: $\left| h(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant x^p \, |\ln(1 - x)|$.

Q2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2) \ln(1 - x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0, 1[$.

Q3. a) Justifier la convergence de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right) \ln\left(1 - x^2\right)}{x^2} dx$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer : $I_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n} \ln\left(x^2\right)}{n + 1} dx$.

c) Montrer que : $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n + 1)\,(2n + 1)^2}\cdot$

Q4. A-t-on : $(\forall x \in [0, 1[) \quad \ln(1 - x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1}$?

Q1 a) h est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$, $h'(x) = -\dfrac{1}{1-x}$.

h' est fonction rationnelle définie sur $[0,1[$ donc h' est de classe C^∞ sur $[0,1[$.

Ainsi h est de classe C^∞ sur $[0,1[$.

$\forall x \in [0,1[$, $h'(x) = -(1-x)^{-1}$; $\forall x \in [0,1[$, $h''(x) = -(-1)(-1)(1-x)^{-2} = -(1-x)^{-2}$;

$\forall x \in [0,1[$, $h'''(x) = -(-2)(-1)(1-x)^{-3} = -2(1-x)^{-3}$; $\forall x \in [0,1[$, $h^{(4)}(x) = -2(-3)(-1)(1-x)^{-4}$

Montrons alors par récurrence sur p que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1[$, $h^{(p)}(x) = -(p-1)!(1-x)^{-p}$

- C'est vrai pour $p=1$ car $\forall x \in [0,1[$, $h'(x) = -(1-x)^{-1}$.
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $p+1$.

$\forall x \in [0,1[$, $h^{(p)}(x) = -(p-1)!\,(1-x)^{-p}$ donc $\forall x \in [0,1[$, $h^{(p+1)}(x) = -(p-1)!(-p)(-1)(1-x)^{-p-1}$.

Donc $\forall x \in [0,1[$, $h^{(p+1)}(x) = -p!\,(1-x)^{-(p+1)} = -((p+1)-1)!\,(1-x)^{-(p+1)}$.

ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1[$, $h^{(p)}(x) = -\dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p}$.

b) Soit $x \in]0,1[$. φ_x est dérivable sur $[0,x]$ et $\forall t \in [0,x]$, $\varphi_x'(t) = \dfrac{t-1-(t-x)}{(t-1)^2}$

$\forall t \in [0,x]$, $\varphi_x'(t) = \dfrac{x-1}{(t-1)^2} \leq 0$. φ_x est décroissante sur $[0,x]$.

Remarque.. Alors $\forall t \in [0,x]$, $\varphi_x(x) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(0)$

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \varphi_x(t) \leq x$.

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{t-x}{t-1} \leq x$ ou $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$. Notons que ceci est encore vraie pour $x=0$!

c) $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$. h est de classe C^{p+1} sur $[0,1[$; appliquons alors la formule de Taylor avec reste intégral à h à l'ordre p. Il vient :

$$h(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-0)^k}{k!} h^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} h^{(p+1)}(t)\,dt.$$

$h(x) = h(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} h^{(p+1)}(t)\,dt$. Notons que $h(0)=0$.

$h(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k!}\left(-\frac{(k-1)!}{(1-0)^k}\right) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}\left(-\frac{p!}{(1-t)^{p+1}}\right)dt$

$h(x) = \sum_{k=1}^{p}\left(-\frac{x^k}{k}\right) - \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^p \frac{1}{1-t}\,dt$. $\varphi_x(t)$, ok ?

$\left|h(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}\right| = \left|-\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^p \frac{1}{1-t}\,dt\right| \underset{x\geq 0}{=} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^p \frac{1}{1-t}\,dt \leq \int_0^x x^p \frac{dt}{1-t}$.

« $0 \leq \varphi_x(t) \leq x$ et $\frac{1}{1-t} \geq 0$ »
pour élever à la puissance p !

$\left|h(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}\right| \leq x^p \left[-\ln(1-t)\right]_0^x$

$\left|h(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}\right| \leq x^p(-\ln(1-x)) = x^p|\ln(1-x)|$.

$$\left|h(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}\right| \leq x^p|\ln(1-x)|.$$

Q2 $\forall x \in]0,1[$, $x^2 > 0$ et $1-x^2 > 0$. Clairement alors g est continue sur $]0,1[$.

$g(x) \underset{0^+}{\sim} \ln x^2 \, (-x^2) = -x^2 \ln x^2$; alors $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2\ln x^2) = 0$.

$g(x) \underset{1^-}{\sim} (x^2-1)\ln(1-x^2)$; alors $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (-(1-x^2)\ln(1-x^2)) = 0$.

croissance comparée

Ainsi g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ continue sur $[0,1]$.

$\hat{g}$ est continue sur le segment $[0,1]$. $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in [0,1]$, $m \leq \hat{g}(x) \leq M$.

Alors $\forall x \in]0,1[$, $m \leq g(x) \leq M$. <u>g est bornée sur $]0,1[$.</u>

Q3 a) $f : x \mapsto \frac{\ln x^2 \ln(1-x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0,1[$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{0}{1} = 0$! f est donc prolongeable par continuité en 1.

Ainsi $\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$ converge.

1) $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln x^2 (-x^2)}{x^2} = -2\ln x$; 2) $\forall x \in]0,\frac{1}{2}]$, $-2\ln x \geq 0$;

3) $\int_0^{1/2} (-2\ln t)\,dt$ converge. Alors les règles de comparaison sur les $\int$ classique !

intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{1/2} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^1 \frac{\ln t^2 \ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$ converge.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto -\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}$ est continue sur $]0,1]$.

Si $n=0$: $\forall t\in]0,1]$, $-\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1} = -2\ln t$ donc $\int_0^1\left(-\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}\right)dt$ converge.

Si $n\geq 1$ $\lim_{t\mapsto 0^+} \frac{-t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}=0$; $t\mapsto -\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^1\left(-\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}\right)dt$ converge.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=-\int_0^1 \frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}\,dt$ existe.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $\varepsilon\in]0,1]$. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_\varepsilon^1 t^{2n}\ln t\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{t}\,dt.$$

$$\int_\varepsilon^1 t^{2n}\ln t\,dt = -\frac{\varepsilon^{2n+1}\ln\varepsilon}{2n+1} - \int_\varepsilon^1\frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt = -\frac{\varepsilon^{2n+1}\ln\varepsilon}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Alors $\lim_{\varepsilon\mapsto 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{2n}\ln t\,dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}$.

$\int_0^1 t^{2n}\ln t\,dt$ converge et vaut $-\frac{1}{(2n+1)^2}$. En multipliant par $-\frac{2}{n+1}$ on retrouve l'existence de $I_n=-\int_0^1\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}\,dt$ et on obtient également $I_n=\frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=-\int_0^1\frac{t^{2n}\ln(t^2)}{n+1}\,dt=\frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$

c) Rappelons que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[, \ \left| \ln(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leq x^p |\ln(1-x)|$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[, \ \left| \ln(x^2) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k}}{k} \right| \leq x^{2p} |\ln(1-x^2)|$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

$\left| \ln(1-x^2) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k}}{k} \right| \leq x^{2p} |\ln(1-x^2)|$. En multipliant par $\left| \frac{\ln x^2}{x^2} \right|$ il vient :

$$\left| \frac{\ln(1-x^2)\ln(x^2)}{x^2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k-2}\ln(x^2)}{k} \right| \leq x^{2p-2} |\ln(1-x^2)\ln x^2|$$

$$\left| f(x) + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1} \right| \leq x^{2p-2} |\ln(1-x^2)\ln(x^2)| = x^{2p-2}|g(x)|.$$

Rappelons que g est bornée sur $]0,1[$ donc $\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]0,1[, |g(t)| \leq C$

Alors $\left| f(x) + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1} \right| \leq C x^{2p-2}$.

Alors $\forall x \in]0,1[, \ \left| f(x) + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1} \right| \leq C x^{2p-2}$.

~~Soit~~ ε et A deux éléments de $]0,1[$ tels que $\underline{\varepsilon < A}$.

$$\left| \int_\varepsilon^A \left(f(x) + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1} \right) dx \right| \leq \int_\varepsilon^A \left| f(x) + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1} \right| dx \leq C \int_\varepsilon^A x^{2p-2}\,dx.$$

$$\left| \int_\varepsilon^A f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{p-1} - \int_0^A \frac{x^{2n}\ln(x^2)}{n+1}\,dx \right| \leq \frac{1}{2p+1} \left[A^{2p-1} - \varepsilon^{2p-1} \right].$$

En faisant tendre ε vers 0 puis A vers 1 il vient :

$\left| J - \sum_{n=0}^{p-1} I_n \right| \leq \frac{1}{2p+1}$. Or $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2p+1} = 0$. Par encadrement on obtient :

1) la série de terme général $I_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)^2}$ converge

2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n = J = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)\ln(x^2)}{x^2}\,dx.$$

(Q4) Oui !! Prendre $\varphi \equiv 1$ c et faire tendre p vers $+\infty$! C'est même vrai pour $x \in [-1,1[$.

EXERCICE 7

J.F.C.

Exercice | S | **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 1. oral ESCP 1994 1.5.**

Q1. Trouver le domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

Montrer que f est dérivable sur son domaine et calculer f'. Etudier les variations de f.

Q2. Trouver les limites de f aux bornes de son domaine.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Montrer $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Q3. Montrer que f prolongée pour $x < 0$ est "la" densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X dont on déterminera le moment d'ordre n pour tout entier naturel n.

On trouve encore cela dans oral ESCP 1997 et 2007 1.19, 1998 1.10.

Q1 • Montrons d'abord que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ diverge.

$h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

→ $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant h(t) = \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ existe.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\, dt$ converge.

→ $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$

$\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge

→ Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 h(t)\, dt$ diverge.

• Soit x un réel.

1er cas.. $x > 0$. h est continue sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t) dt$ converge donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t) dt$ converge. Ainsi $x \in D_f$.

2ème cas.. $x \leqslant 0$. Supposons que $\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t) dt$ converge. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge.

donc $\displaystyle\int_0^1 h(t) dt$ converge. Ce qui n'est pas !

Ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t) dt$ diverge. Alors $x \notin D_f$.

Finalement le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ est $]0,+\infty[$.

(Q2) **V1**.. • $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ donc $\lim_{x\mapsto+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

Ainsi $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$.

• $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge et $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est positive sur $]0,1]$ donc $\lim_{x\mapsto 0^+} \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt = +\infty$

Alors $\lim_{x\mapsto 0^+} \left(\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right) = +\infty$. $\lim_{x\mapsto 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = +\infty$.

donc $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = +\infty$.

V2 • Soit $x\in [1,+\infty[$. $\forall t \in [x,+\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$.

Donc $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt$ car toutes les intégrales convergent.

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\mapsto+\infty} \int_x^A e^{-t}\,dt = \lim_{A\mapsto+\infty} (-e^{-A}+e^{-x}) = e^{-x}.$$

Alors $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq e^{-x}$. Donc $\forall x \in [1,+\infty[$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et $\lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} = 0$.

Par encadrement on retrouve $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$.

• Soit $x \in]0,1]$.

$\forall t \in [x,1]$, $\frac{e^{-t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}$; $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \overset{x\leq 1}{\geq} e^{-1} \int_x^1 \frac{dt}{t} = e^{-1}[\ln t]_x^1 = -e^{-1}\ln x$.

Alors : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geq -e^{-1}\ln x$.

$t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est positive sur $]0,+\infty[$

$\forall x \in]0,1]$, $f(x) \geq -e^{-1}\ln x$ et $\lim_{x\mapsto 0^+} (-e^{-1}\ln x) = +\infty$. Alors $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = +\infty$ ... again

Soit $x \in]0,+\infty[$. $u : t\mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ u'(t) = e^{-t} \text{ et } v'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $A \in]0,+\infty[$.

$$\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[-e^{-t}\frac{1}{t}\right]_x^A - \int_x^A (-e^{-t})\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -e^{-A}\frac{1}{A} + e^{-x}\frac{1}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\lim_{A\mapsto+\infty} \left(-e^{-A}\frac{1}{A} + e^{-x}\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x}$. Alors

1) $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge ;

2) $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

$\forall t \in [x, +\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} e^{-t}$. De plus $\int_x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ converge et, $\int_x e^{-t} dt$

converge et vaut e^{-x} comme nous l'avons déjà vu.

Alors $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x^2} e^{-x}$. et $\frac{e^{-x}}{x} > 0$

donc $0 \leq \dfrac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}{\frac{e^{-x}}{x}} \leq \frac{1}{x}$ et ceci pour tout x dans $]0, +\infty[$.

comme $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement $\lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}{\frac{e^{-x}}{x}} = 0$.

donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$ or $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + [\ln t]_x^1$.

$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \ln x$.

$\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\mapsto 0}{\sim} \frac{-t}{t} = -1$.

Alors $\lim_{t\mapsto 0} \varphi(t) = -1$. φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge. Posons $I = \int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$.

$\lim_{x\mapsto 0} \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt = I$ et $\lim_{x\mapsto 0} (\ln x) = -\infty$. Ainsi $\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \underset{x\mapsto 0}{=} o(\ln x)$

Alors $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt - \ln x \underset{x\mapsto 0}{\sim} -\ln x$. $\underline{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0}{\sim} -\ln x.}$

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est une constante et $\lim_{x\mapsto 0}(-\ln x) = +\infty$.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0}{=} o(-\ln x)$. Or $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0^+}{\sim} -\ln x$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0}{=} o\left(\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt\right)$.

Ainsi $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0}{\sim} \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\mapsto 0}{\sim} -\ln x$.

$\underline{f(x) \underset{x\mapsto 0}{\sim} -\ln x.}$

Q3 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Montrons que g est une densité de probabilité.

* $\forall x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = 0 \geq 0$!

Soit $x \in]0,+\infty[$. $\forall t \in [x,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{t} \geq 0$ et $x \leq +\infty$!

Alors $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \geq 0$; $g(x) = f(x) \geq 0$.

Finalement $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0.}$

* g est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc g est continue sur $]-\infty, 0]$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) = f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$

comme $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est une constante, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Alors g est continue sur $]0,+\infty[$.

Nous pouvons alors dire que <u>g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.</u>

<u>Remarques</u>. 1. $\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$. En particulier g' est négative sur $]0,+\infty[$. Ainsi g est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Donc <u>g est décroissante sur son domaine de définition.</u>

2. g est continue à gauche en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, g n'est pas continue à droite en 0.

Finalement <u>g n'est pas continue en 0.</u>

* Il s'agit de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1. Pour gagner du temps nous allons, pour n dans $\mathbb{N}$, établir l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ et donner sa valeur.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_{-\infty}^{0} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut 0 car $t \mapsto t^n g(t)$ est nulle sur $]-\infty,0]$.

Nous avons vu dans les remarques que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall t \in]0,+\infty[$, $g'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car $t \mapsto -\frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus $t \mapsto \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto t^n$.

ceci justifie l'intégration par parties suivante. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\int_1^x t^n g(t)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} g(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{n+1} g'(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} g(x) - \frac{1}{n+1} g(1) - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt$$

$$\int_1^x t^n g(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} g(x) - \frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n e^{-t}\,dt \qquad (1)$$. On a aussi

$$\int_x^1 t^n g(t)\,dt = -\frac{x^{n+1}}{n+1} g(x) + \frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n e^{-t}\,dt \qquad (2)$$

croissance comparée.

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} g(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{e^x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{x^n}{e^x}\right) = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} g(x)\right) = 0$. De plus $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge ($n+1 \in]0,+\infty[$). Alors (1) donne :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x t^n g(t)\,dt = -\frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt. \qquad (3)$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} g(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{n+1} x^{n+1}(-\ln x) = -\frac{1}{n+1} x^{n+1}\ln x.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}(x^{n+1}\ln x) = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} g(x)\right) = 0$.

De plus $\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ existe car $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$.

Alors (2) donne $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^1 t^n g(t)\,dt = \frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt \qquad (4).$

(3) montre que $\int_1^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $-\frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$.

(4) montre que $\int_0^1 t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{n+1} g(1) + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$.

Or $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \Gamma(n+1) = n!$ Donc $\int_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{n+1}$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{n+1}$.

En particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{0!}{0+1}$ donc 1.

ceci achève de montrer que <u>g est une densité de probabilité.</u>

Soit X une variable aléatoire à densité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{n+1}$.

<u>Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre n qui vaut $\frac{n!}{n+1}$.</u>

On peut aussi dire que <u>pour tout n dans $\mathbb{N}$, $E(X^n)$ existe et vaut $\frac{n!}{n+1}$.</u>

Notons encore que <u>$E(X)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.</u>

$E(X^2)$ existe et vaut $\frac{2}{3}$ donc <u>$V(X)$ existe</u> et vaut $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$. <u>$V(X) = \frac{5}{12}$.</u>