EXERCICE 16

Exercice **Dérivation sous le signe somme 1.**

Q1. Montrer que $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ et $G : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\sin(xt)\,dt$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \dfrac{1}{2}\,x\,F(x)$.

Q3. Soit a un élément de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$ (on pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange).

En déduire que F est dérivable en a et que $F'(a) = -G(a)$.

Q4. Déterminer F (on pourra considérer $H : x \to e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Traité dans LYON 1994 Pb 2. Dans LYON 2006 Pb 1 on dérive $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(xt)\,dt$.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x : t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ et $g_x : t \mapsto t e^{-t^2}\sin(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

- $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant |f_x(t)| = e^{-t^2}|\cos xt| \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty} |f_x(t)|\,dt$... et même de $\int_0^{+\infty} |f_x(t)|\,dt$.

Alors $\int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt$ est convergente car elle est ~~absolument convergente~~.

- $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant |g_x(t)| = t e^{-t^2}|\sin xt| \leqslant t e^{-t^2} \leqslant t e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} t e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$ converge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty} |g_x(t)|\,dt$... et même de $\int_0^{+\infty} |g_x(t)|\,dt$.

$\int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout réel x : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-t^2}\sin(xt)\,dt$ convergent.

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v_x(t) = \sin(xt)$. u et v_x sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = t e^{-t^2}$ et $v_x'(t) = x\cos(xt)$. Ceci justifie l'intégration par parties suivantes. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A t e^{-t^2}\sin(xt)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)x\cos(xt)\,dt.$$

$$\int_0^A t e^{-t^2}\sin(xt)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA) + \frac{1}{2}x\int_0^A e^{-t^2}\cos(xt)\,dt \qquad (*).$$

Or $\left|-\frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA)\right| = \frac{1}{2}e^{-A^2}|\sin(xA)| \leq \frac{1}{2}e^{-A^2}$ et $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-A^2}\right)=0$. Alors

$\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-A^2}\sin(xA)\right)=0$. En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2}\sin(xt)\,dt = \frac{1}{2}x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt.$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x)=\frac{1}{2}xF(x)$.

Q3) $a\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}^*$. Soit $A\in\mathbb{R}$. Posons $\Delta(h)=\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h}+G(a)$.

$$\Delta(h)=\frac{1}{h}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos((a+h)t)\,dt-\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(at)\,dt\right]+\int_0^{+\infty} t e^{-t^2}\sin(at)\,dt.$$

$$\Delta(h)=\frac{1}{h}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)\right)dt\right].$$

Posons $\Delta_A(h)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^A e^{-t^2}\left(\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)\right)dt$.

$$|\Delta_A(h)|\leq\frac{1}{|h|}\int_0^A\left|e^{-t^2}\left(\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)\right)\right|dt.$$

$$|\Delta_A(h)|\leq\frac{1}{|h|}\int_0^A e^{-t^2}\left|\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)\right|dt.$$

$\cos$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $\cos$ à l'ordre 1 donne :

$$\forall(y,z)\in\mathbb{R}^2,\ |\cos(z)-\cos(y)-(z-y)\cos'(y)|\leq\frac{|z-y|^2}{2}\max_{\omega\in[y,z]}|\cos''(\omega)|$$

$$\forall(y,z)\in\mathbb{R}^2,\ |\cos(z)-\cos(y)+(z-y)\sin(y)|\leq\frac{(z-y)^2}{2}\max_{\omega\in[y,z]}|-\cos(\omega)|\leq\frac{(z-y)^2}{2}.$$

Alors $\forall t\in\mathbb{R},\ |\cos((a+h)t)-\cos(at)+((a+h)t-at)\sin(at)|\leq\dfrac{((a+h)t-at)^2}{2}=\dfrac{h^2t^2}{2}$ et $e^{-t^2}\geq 0$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{-t^2}|\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)|\leq\dfrac{h^2}{2}t^2e^{-t^2}$.

Alors $|\Delta_A(h)|\leq\dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_0^A e^{-t^2}|\cos((a+h)t)-\cos(at)+ht\sin(at)|\,dt\leq\dfrac{1}{|h|}\int_0^A\frac{h^2}{2}t^2e^{-t^2}dt=\frac{|h|}{2}\int_0^A t^2e^{-t^2}dt$

$|\Delta_A(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^A t^2 e^{-t^2} dt$ et ceci pour tout A dans $\mathbb{R}^+$. (**)

$\lim_{t\to+\infty} (t^2 t^2 e^{-t^2}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{(t^2)^2}{e^{t^2}} = 0$. Alors :

1° $t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;

2° $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^2 e^{-t^2} \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$;

3° $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge. $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge également car $t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors en faisant tendre A vers $+\infty$ dans (**) il vient $|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$.

Ainsi 1° $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge ;

2° $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$.

$\forall h \in \mathbb{R}^*$, $0 \leq \left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ et $\lim_{h\to 0} \left(\frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \right) = 0$.

donc par encadrement il vient $\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = -G(a)$.

Ainsi <u>F est dérivable en a et $F'(a) = -G(a)$ et ceci pour tout a dans $\mathbb{R}$.</u>

Q4 <u>V1</u> $H : x \mapsto e^{x^2/4} F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = \frac{2x}{4} e^{x^2/4} F(x) + e^{x^2/4} F'(x) = e^{x^2/4} \left[\frac{1}{2} x F(x) - G(x) \right] \overset{Q2}{=} 0$

H' est nulle sur <u>l'intervalle</u> $\mathbb{R}$ donc H est constante sur $\mathbb{R}$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2/4} F(x) = H(x) = \lambda$; <u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$.</u>

V 2 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -G(x) = -\frac{1}{2} x F(x).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) F(x) = 0$ et $x \mapsto -\frac{x^2}{4}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$

de $x \mapsto -\frac{1}{2}x$. Le cours montre alors l'existence d'un réel λ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}.$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = F(0) = \lambda e^{-\frac{0^2}{4}} = \lambda. \qquad \lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

Soit $A \in [0, +\infty[$. $t \mapsto \sqrt{2}\, t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement

de variable $u = \sqrt{2}\, t$ dans ce qui suit. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A e^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{2}A} e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}A} e^{-u^2/2} du \quad (\blacktriangle).$$

Le cours donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$.

Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(\blacktriangle)$ il vient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

EXERCICE 17

Exercice **Dérivation sous le signe somme 2. Représentation intégrale d'une fonction puissance.**

ESSEC 2007 MI partie I

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par :

$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) \varphi(t)\,dt.$

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q1. Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha\,\mathrm{d}t$$

Q2. Exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

Q3. **On suppose que $\alpha \in]-1, 0[$.**

Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}\,dt$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α .

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f_\alpha(x) = c\,x^\alpha + d$.

Préciser le signe de c.

Q4. **On suppose que $\alpha \in]0, 1[$.**

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x > 0$, $x + h > 0$ et $h \neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,\mathrm{d}t$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

b) Justifier la relation : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_\alpha(x) = f'_\alpha(1)\,x^{\alpha-1}.$

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x\mathbb{R}^{+*}, \quad f_\alpha(x) = c\,x^\alpha + d.$

Préciser le signe de c.

PARTIE I Représentation intégrale d'une fonction puissance.

<u>Question préliminaire</u>..

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $\psi_x(t) = \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)$. Montrons que $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$ converge. Notons que ψ_x est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\psi_x(t) = \frac{xt+t^2-1-t^2}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) = \frac{xt-1}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $|\psi_x(t)| = \frac{|xt-1|}{(1+t^2)(x+t)}\varphi(t) \leq \frac{xt+1}{x+t}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2}$.

$\left\{\begin{array}{l} |xt-1| \leq |xt|+|-1| = xt+1 \\ \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0 \end{array}\right.$

Pas de panique ! ceci est pour le fun. On peut obtenir le résultat à l'aide d'équivalents en 0 et $+\infty$.

Posons $C_x = \operatorname{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq xt+1 \leq C_x t + 1$.

$C_x \geq \frac{1}{x} > 0$ donc $x \geq \frac{1}{C_x} > 0$; alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $x+t \geq \frac{1}{C_x} + t > 0$.

Donc $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{\frac{1}{C_x}+t} = \frac{C_x}{C_x t + 1}$

Résumons : $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq xt+1 \leq C_x t+1$, $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{C_x}{C_x t+1}$ et $\frac{\varphi(t)}{1+t^2} \geq 0$

Alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq \frac{xt+1}{x+t}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2} \leq \frac{C_x(C_x t+1)}{C_x t+1}\,\frac{\varphi(t)}{1+t^2} = C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$.

1) $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq |\psi_x(t)| \leq C_x \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$ converge.

1), 2) et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que les intégrales $\int_0^1 |\psi_x(t)|\,dt$ et $\int_1^{+\infty} |\psi_x(t)|\,dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |\psi_x(t)|\,dt$ converge. $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,dt$ est alors absolument convergente donc convergente.

Finalement, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$ converge.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(Q1) Soit α dans $\mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ ⊙

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}} \qquad ⊙⊙$$

⊙, ⊙⊙ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que : $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$

Le cours indique que 1) $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$ ie $\alpha > -1$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge si et seulement si $2-\alpha > 1$ ie $\alpha < 1$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha \in]-1,1[$.

(Q2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^0\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ ... le ε n'est pas indispensable...

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2| - \ln|x+t|\right]_\varepsilon^A = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{x+t}\right)\right]_\varepsilon^A.$$

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \ln\frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} - \ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon}$$

$\frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{A}{A} = 1$. Donc $\lim_{A\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+A^2}}{x+A} = 0$. De plus $\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{x+\varepsilon}\right) = \ln\frac{1}{x}$.

Alors $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) dt = 0 - \ln\frac{1}{x} = \ln x$. $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_0(x) = \ln x$.

Soit $x \in]0,+\infty[$

(Q3) $\alpha \in]-1,0[\subset]-1,1[$ donc $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha \, dt$ converge.

$\alpha+1 \in]0,1[\subset]-1,1[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$ converge d'après Q1.

Alors par différence $\int_0^{+\infty} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha \right] dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$ converge.

Soit ε et A deux éléments de $]0,+\infty[$ tels que $\varepsilon < A$.

$t \mapsto \frac{t}{x}$ est C^1 dans $\mathbb{R}$ sur $[\varepsilon, A]$. Ceci autorise le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ donc $\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{x+t} dt = \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{(ux)^\alpha}{x+ux} x \, du = x^\alpha \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{u^\alpha}{1+u} du$.

$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du$ (faire $x=1$ dans ce qui précède).

De plus $\lim_{A \to +\infty} \frac{A}{x} = +\infty$ et $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{x} = 0$.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du$.

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. Rappelons que $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$ convergent.

Ainsi $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right) t^\alpha \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t} dt$

$f_\alpha(x) = -x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$.

Posons $c = -\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u} du$ et $d = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} dt$. $f_\alpha(x) = c\, x^\alpha + d$.

R.

Notons que $\forall t \in]0,+\infty[$, $\frac{u^\alpha}{1+u} > 0$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du > 0$.

Ainsi $c = -\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+u}\,du < 0$.

$\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$ et $c < 0$.

(Q4) a) Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit h un réel non nul tel que $x+h>0$.

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{h}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} - \frac{t^\alpha}{x+h+t} - \frac{t^{\alpha+1}}{1+t^2} + \frac{t^\alpha}{x+t}\right] dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{h} \frac{x+h+t-x-t}{(x+h+t)(x+t)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,dt.$$

Notons alors que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

Commençons par montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

→ $t \mapsto \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

→ $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2} t^\alpha = \frac{1}{x^2}\frac{1}{t^{-\alpha}}$ et $\frac{t^\alpha}{(x+t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$

→ $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge car $-\alpha < 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$ converge car $2-\alpha > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ convergent.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

Posons $\Delta(h) = \frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha \left(\frac{x+t-(x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right)dt$$

$$\Delta(h) = -h \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \quad ; \quad |\Delta(h)| = |h| \left|\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt\right|.$$

$\forall t \in]0,+\infty[$, $x+h+t \geqslant x+h > 0$ et $(x+t)^2 > 0$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $(x+h+t)(x+t)^2 \geqslant (x+h)(x+t)^2 > 0$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{(x+h+t)(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(x+h)(x+t)^2}$ et $t^\alpha \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in]0,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x+h}\, \dfrac{t^\alpha}{(x+t)^2}$.

Alors $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ car les deux intégrales convergent.

Finalement $|\Delta(h)| = |h| \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt\right| = |h| \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)^2}\,dt \leqslant \frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt.$

Ainsi $\forall h \in]-x,0[\cup]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\right| \leqslant \dfrac{|h|}{x+h} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt.$

a $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(\frac{|h|}{x+h} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt\right) = 0$

Donc par encadrement on a : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt.$

Ainsi f_α est dérivable en x et $f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$

f_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt.$

R.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ tel que $\varepsilon < A$.

$t \mapsto \frac{t}{x}$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$. Ceci autorise le changement de variable $u = t/x$ dans $\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = \int_{\varepsilon/x}^{A/x} \frac{(xu)^\alpha}{(x+xu)^2}\, x\,du = x^{\alpha-1}\int_{\varepsilon/x}^{A/x}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du.$$

Or $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du$ convergent, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{A}{x} \overset{x>0}{=} +\infty$

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,dt = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du$; $f_\alpha'(x) = f_\alpha'(1)\,x^{\alpha-1}$.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha'(x) = f_\alpha'(1)\, x^{\alpha-1}.}$

Alors $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = \frac{f_\alpha'(1)}{\alpha}x^\alpha + d$.

Posons $c = \frac{f_\alpha'(1)}{\alpha}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha(x) = cx^\alpha + d$ et $c = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha}{(1+u)^2}\,du > 0$.

Par conséquent : $\underline{\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = cx^\alpha + d \text{ avec } c > 0.}$

Exercice **S** **Dérivation sous le signe somme 3. Transformation de Laplace.**

Étude de $x \to \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-x\,t}\, \mathrm{d}t$.

E est l'ensemble des applications continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ localement dominées au voisinage de $+\infty$ par un mônome c'est à dire telles qu'il exite un réel strictement positif λ et un élément p de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in [A, +\infty[,\ |f(t)| \leqslant \lambda t^p.$$

Q1. Soit f un élément de E. Montrer que pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Dans la suite si f est un élément de E, L_f est l'application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x dans $\mathbb{R}^{+*}$ associe $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$. L_f est la transformée de Laplace de f.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0, +\infty[,\ u_n(t) = t^n$.

a) Montrer que u_n appartient à E et que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ L_{u_n}(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

b) f est un élément de E. Montrer que $u_n f$ appartient à E.

Q3. f est un élément de E. On se propose de montrer que L_f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que pour tout réel u : $|e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2} e^{|u|}$ (on pourra utiliser Taylor).

b) a est un réel strictement positif. h est un réel non nul tel que : $|h| < a/2$.

Montrer que $\Delta(h) = \dfrac{L_f(a+h) - L_f(a)}{h} + \int_0^{+\infty} t f(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t$ a un sens.

Montrer que : $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, |e^{-(a-|h|)t}\, \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, e^{-\frac{a}{2}t}\, \mathrm{d}t$.

En déduire que L_f est dérivable en a et préciser $(L_f)'(a)$.

Remarque *L_f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $(L_f)'$ est la transformée de Laplace de $t \to -t f(t)$.*

Q4. f est un élément de E. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $f_n = u_n f$.

Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, L_f est n fois dérivable et que $(L_f)^{(n)} = (-1)^n L_{f_n}$.

R.

Q1 Soit $f \in E$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

- f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- $f \in E$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [A,+\infty[, \ |f(t)| \leq \lambda t^p$

$\forall t \in [A,+\infty[, \ 0 \leq |f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt} \leq \lambda t^p e^{-xt}$

$\forall t \in [A,+\infty[, \ 0 \leq t^2|f(t)e^{-xt}| \leq \lambda \ t^{p+2}e^{-xt}$.

$\lim\limits_{t\mapsto+\infty} (t^2|f(t)e^{-xt}|) = \lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left(\dfrac{\lambda}{x^{p+2}} \ \dfrac{(xt)^{p+2}}{e^{xt}}\right) = 0$ par croissance comparée.

1) $|f(t)e^{-xt}| \underset{t\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2) $\forall t \in [1,+\infty[, \ |f(t)e^{-xt}| \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

les règles de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|dt$, et même $\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-xt}|\,dt$ converge.

Ainsi $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt \text{ est absolument convergente et ceci pour tout réel } x \text{ strictement positif}}}$.

Q2 a) • u_n est continue sur $[0,+\infty[$

- $\forall t \in [0,+\infty[, \ |u_n(t)| = |t^n| = t^n \leq 1 \times t^n$!

ceci suffit pour dire que $\underline{\underline{u_n \text{ appartient à } E}}$ Voir le calcul de Lu_n à la suite de b) ...

b) soit $f \in E$

- $u_n f$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$.
- $f \in E$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [A,+\infty[, \ |f(t)| \leq \lambda t^p$

$\forall t \in [A,+\infty[, \ |(u_n f)(t)| = |t^n f(t)| = t^n|f(t)| \leq t^n \lambda t^p = \lambda t^{n+p}$

ceci achève de montrer que $\underline{\underline{u_n f \text{ appartient à } E}}$, non ?

$\boxed{\text{Suite de a]}}$ $n\in\mathbb{N}$. Nous savons que $u_n\in E$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$t\mapsto xt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui justifie le changement de variable $u=xt$ dans ce qui suit. Soit $A\in\mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A u_n(t)e^{-xt}dt=\int_0^A t^n e^{-xt}dt \underset{u=xt}{=} \int_0^{xA}\left(\frac{u}{x}\right)^n e^{-u}\frac{1}{x}\,du=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{xA}u^n e^{-u}du.$$

Or $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}u^{(n+1)-1}e^{-u}du$ existe et vaut $n!$

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A u_n(t)e^{-xt}dt \underset{\lim\limits_{A\to+\infty}(xA)=+\infty \text{ car } x>0}{=} \frac{1}{x^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{x^{n+1}}$. Donc $L_{u_n}(x)=\int_0^{+\infty} u_n(t)e^{-xt}dt=\frac{n!}{x^{n+1}}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad L_{u_n}(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Q3 a] $\varphi: x\mapsto e^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi''(x)=\varphi'(x)=\varphi(x)=e^x$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ |\varphi(u)-\varphi(0)-(u-0)\varphi'(0)|\leq \frac{|u-0|^2}{2!}\max_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}|\varphi''(t)| = \frac{u^2}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}e^t.$$

$$\forall u\in\mathbb{R},\ |e^u-1-u|\leq\frac{u^2}{2}\max_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}e^t$$

$\forall u\in[0,+\infty[$, $\max\limits_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}e^t=e^u=e^{|u|}$. $\forall u\in]-\infty,0]$, $\max\limits_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}e^t=1\leq e^{|u|}$.

Ainsi $\forall u\in\mathbb{R}$, $\max\limits_{t\in\overleftrightarrow{[0,u]}}e^t\leq e^{|u|}$. $\forall u\in\mathbb{R},\ |e^u-1-u|\leq\frac{u^2}{2}e^{|u|}$.

b] Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$. Soit h un réel non nul tel que $|h|<\frac{a}{2}$.

Remarque.. $-\frac{a}{2}<h<\frac{a}{2}$. $0<\frac{a}{2}<a+h<\frac{3a}{2}$; $a+h\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors $L_f(a+h)$ et $L_f(a)$ ont un sens.

$u_1 f\in E$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$ donc $\int_0^{+\infty}tf(t)e^{-at}dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi $\Delta(h) = \dfrac{Lf(a+h) - Lf(a)}{h} + \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-at} dt$ à un sens.

Notons que $\Delta(h) = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t) \left[e^{-(a+h)t} - e^{-at} + h t e^{-at} \right] dt$.

$\Delta(h) = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-at} \left[e^{-ht} - 1 - (-ht) \right] dt$.

$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-at} \left[e^{-ht} - 1 - (-ht) \right] dt$.

$\forall t \in [0, +\infty[, \ |f(t) e^{-at}[e^{-ht} - 1 - (-ht)]| = |f(t)| e^{-at} |e^{-ht} - 1 - (-ht)| \underset{a)}{\leq} |f(t)| e^{-at} \frac{(-ht)^2}{2} e^{\overbrace{|-ht|}^{=|h|t}}$

$\forall t \in [0, +\infty[, \ 0 \leq |f(t) e^{-at}[e^{-ht} - 1 - (-ht)]| \leq \frac{h^2}{2} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t}$.

$a - |h| > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$. $a - |h| \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_2 f \in E$. Alors $\int_0^{+\infty} (u_2 f)(t) e^{-(a-|h|)t} dt$ est absolument convergente donc $\int_0^{+\infty} |t^2 f(t) e^{-(a-|h|)t}| dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{h^2}{2} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t} dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-at}[e^{-ht} - 1 - (-ht)]| dt$ est convergente.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-at} [e^{-ht} - 1 - (-ht)] dt$ est absolument convergente.

donc $|h\Delta(h)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-at} [e^{-ht} - 1 - (-ht)] dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-at} [e^{-ht} - 1 - (-ht)]| dt$

Alors $|h| |\Delta(h)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-at} [e^{-ht} - 1 - (-ht)]| dt \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t} dt$.

Alors $|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t} dt$ (division par $|h|$ qui est strictement positif).

$\forall t \in [0, +\infty[, \quad t^2 |f(t)| e^{-(a-|h|)t} \underset{|h| < \frac{a}{2}}{\leq} t^2 |f(t)| e^{-(a-\frac{a}{2})t} = t^2 |f(t)| e^{-\frac{a}{2}t}$.

or $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{a}{2}t} dt$ est absolument convergente car $u_2 f \in E$ et $\frac{a}{2} > 0$.

donc $\int_0^{+\infty} |t^2 f(t) e^{-\frac{a}{2}t}|\,dt$ converge. $\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt$ converge.

Or $\forall t\in[0,+\infty[$, $t^2|f(t)|e^{-(a-|h|)t} \leq t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-(a-|h|)t}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt$. Finalement

$0\leq|\Delta(h)|\leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-(a-|h|)t}\,dt \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt$ pour tout h dans $]-\frac{a}{2},\frac{a}{2}[-\{0\}$.

$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|f(t)|e^{-\frac{a}{2}t}\,dt=0$. Alors par encadrement $\lim_{h\to 0}\Delta(h)=0$.

donc $\lim_{h\to 0}\left(\frac{L_f(a+h)-L_f(a)}{h}+\int_0^{+\infty} t f(t)e^{-at}\,dt\right)=0$.

Alors $\lim_{h\to 0}\frac{L_f(a+h)-L_f(a)}{h} = -\int_0^{+\infty} t f(t)e^{-at}\,dt = -L_{u_1 f}(a)$.

donc L_f est dérivable en a et $(L_f)'(a)=-\int_0^{+\infty} t f(t)e^{-at}\,dt$ ou $-L_{u_1 f}(a)$.

Q4 Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, L_f est n fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(L_f)^{(n)}=(-1)^n L_{f_n}$. C'est clair pour $n=0$ car $f_0=f$. Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$f_n=u_n f\in E$ donc L_{f_n} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $(L_f)^{(n)}=(-1)^n L_{f_n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi L_f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $(L_f)^{(n+1)}=\left((L_f)^{(n)}\right)'=\left((-1)^n L_{f_n}\right)'=(-1)^n L'_{f_n}\overset{Q3}{=}(-1)^n\left((-1)L_{u_1 f_n}\right)$

$(L_f)^{(n+1)}=(-1)^{n+1}L_{u_1 f_n}=(-1)^{n+1}L_{f_{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

↑ $\forall t\in[0,+\infty[$, $(u_1 f_n)(t)=t f_n(t)=t\,t^n f(t)=t^{n+1}f(t)=f_{n+1}(t)$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, L_f est n fois dérivable et $(L_f)^{(n)}=(-1)^n L_{f_n}$.

R\

EXERCICE 19

Exercice **Dérivation sous le signe somme 4. Dérivabilité de la fonction Γ. Contenu dans HEC 2005**

Q1. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k\, e^{-t}\, dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

Q2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]a,b[$.

a) Soit t un élément de $]0,+\infty[$. Justifier l'existence et donner la valeur de $\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1} = \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$ (faire deux cas).

En déduire que $\int_0^1 (\ln t)^2\big(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t}\, dt$ et $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2\big(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t}\, dt$ convergent .

Ainsi $\int_0^{+\infty} (\ln t)^2\big(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t}\, dt$ converge.

b) Soit t un élément de $]0,+\infty[$. Montrer que :

$$|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)\, t^{x_0-1}| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \big(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\big).$$

Établir l'inégalité :

$$\Big|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\, g_1(x_0)\Big| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2\big(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\big)\, e^{-t}\, dt.$$

c) En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

Q3. Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma' = g_1$.

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$t \mapsto t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- $\lim_{t\to+\infty} t^2 |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| = \lim_{t\to+\infty} \left| \frac{t^{x+1+k}}{e^t} \times \left(\frac{\ln t}{t}\right)^k \right| = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2) $\forall t \in [1,+\infty[,\ |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$.

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|\, dt$ converge.

- En 0 c'est Bertrand car $e^{-t} \underset{0}{\sim} 1$... Choisissons un élément γ de l'intervalle $]1-x, 1[$ (on peut prendre $\gamma = \frac{1-x+1}{2}$). croissance comparée avec $\gamma-(1-x) > 0$

$\lim_{t\to0^+}\left(t^\gamma |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|\right) = \lim_{t\to0} \left(| t^{\gamma-(1-x)}(\ln t)^k | e^{-t}\right) = 0 \times 1 = 0$

Alors * $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$

* $\forall t\in]0,1]$, $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \geq 0$ et $\frac{1}{t^\gamma}\geq 0$

* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\gamma}$ converge car $\gamma<1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^1 |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}|dt$ converge.

$\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$ est donc absolument convergente et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q2 a) Soit $t\in]0,+\infty[$. Posons $\forall x\in[a,b]$, $f(x)=t^{x-1}$.

$\forall x\in[a,b]$, $f(x)=e^{(x-1)\ln t}$. f est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x\in[a,b]$, $f'(x)=(\ln t)e^{(x-1)\ln t}$

Si $t\leq 1$: $\forall x\in[a,b], f'(x)\leq 0$ si $t\geq 1$: $\forall x\in[a,b], f'(x)\geq 0$.

Si $t\leq 1$, f est décroissante sur $[a,b]$ et si $t\geq 1$, f est croissante sur $[a,b]$.

Ainsi si $t\leq 1$: $\sup_{x\in[a,b]} t^{x-1} = \max_{x\in[a,b]} t^{x-1} = t^{a-1}$.

Si $t\geq 1$: $\sup_{x\in[a,b]} t^{x-1} = \max_{x\in[a,b]} t^{x-1} = t^{b-1}$.

$\forall t\in]0,1]$, $(\ln t)^2(\sup_{x\in[a,b]} t^{x-1})e^{-t} = (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}$ et, d'après Q1, $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t})dt$ (car $a>0$ et $2\in\mathbb{N}^*$!!) est absolument convergente donc convergente. $\int_0^1 (\ln t)^2(\sup_{x\in[a,b]} t^{x-1})e^{-t}dt$ converge.

$\forall t\in[1,+\infty[$, $(\ln t)^2(\sup_{t\in[a,b]} t^{x-1})e^{-t} = (\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}$ et, d'après Q1, $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}dt$ est absolument convergente (car $b>0$ et $2\in\mathbb{N}^*$) donc convergente.

Ainsi $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 (\sup_{x\in[a,b]} t^{x-1}) e^{-t}dt$ converge.

R.

Finalement $\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} dt$ converge (sup ou max ...).

b) Fixons t dans $]0,+\infty[$. Posons de nouveau : $\forall \alpha\in[a,b]$, $f(\alpha) = t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$.

f est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall \alpha\in[a,b]$, $f'(\alpha) = (\ln t)\, e^{(\alpha-1)\ln t} = (\ln t)\, t^{\alpha-1}$

f' est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall \alpha\in[a,b]$, $f''(\alpha) = (\ln t)^2 e^{(\alpha-1)\ln t} = (\ln t)^2 t^{\alpha-1}$.

Notons que f'' est continue sur $[a,b]$. Ainsi f est de classe C^2 sur $[a,b]$.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 il vient :

$$|f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)| \leq \frac{|x-x_0|^2}{2} \max_{\alpha\in[\widetilde{x_0,x}]} |f''(\alpha)| \underset{[\widetilde{x_0,x}]\subset[a,b]}{\leq} \frac{|x-x_0|^2}{2} \max_{\alpha\in[a,b]} |f''(\alpha)|.$$

Alors $|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)\, t^{x_0-1}| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \max_{\alpha\in[a,b]} |(\ln t)^2 t^{\alpha-1}|$

Or $\max_{\alpha\in[a,b]} |(\ln t)^2 t^{\alpha-1}| \underset{\substack{\text{car } (\ln t)^2 \text{ est un réel positif}\\ \text{qui ne dépend pas de } \alpha}}{=} (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} |t^{\alpha-1}| = (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$

Alors $|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)\, t^{x_0-1}| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$ et ceci pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$.

ceci donne encore :

$\forall t\in]0,+\infty[$, $|t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t}$.

Or a) montre que $\int_0^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} dt$ converge.

Alors $\int_0^1 \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{2} (\ln t)^2 \left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right) e^{-t} dt$

convergent. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_0^1 |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}|\, dt$

et $\int_1^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}|\, dt$.

⚠ Je préfère séparer le "problème" en 0 et le "problème" en $+\infty$.

donc $\int_0^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}|\,dt$ converge. Alors

$\int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t})\,dt$ est absolument convergente donc convergente. On peut alors écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t})\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}|\,dt$$

$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(x)$ $(x>0)$, $\int_0^{+\infty} t^{x_0-1}e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(x_0)$ $(x_0>0)$

et $\int_0^{+\infty} \ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}\,dt$ converge et vaut $g_1(x_0)$ ($x_0>0$ et $1\in\mathbb{N}^*$). Ainsi

$$\int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t})\,dt = \Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\,g_1(x_0).$$

Alors $|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\,g_1(x_0)| \leq \int_0^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}|\,dt.$

Rappelons que $\forall t\in\,]0,+\infty[$, $|t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)\ln t\, t^{x_0-1}e^{-t}| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}$

et $\int_0^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt$ converge.

Alors $|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\,g_1(x_0)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$

donc $|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)\,g_1(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty} (\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$

c) $x\neq x_0$ donc en divisant l'inégalité précédente par $|x-x_0|$ qui est strictement positif il vient : $0 \leq \left|\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} - g_1(x_0)\right| \leq \frac{|x-x_0|}{2}\int_0^{+\infty} (\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$

Notons que ceci vaut pour tout x dans $]a,b[-\{x_0\}$ et que $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{|x-x_0|}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt\right]=0$

Alors par encadrement il vient $\lim_{x\to x_0}\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} = g_1(x_0)$.

donc Γ est dérivable en x_0 et $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0) = \int_0^{+\infty} t^{x_0-1}(\ln t)\,e^{-t}\,dt$

Q3 Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $a = \frac{x_0}{2}$ et $b = \frac{3}{2} x_0$.

Alors $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b$ et $x_0 \in]a, b[$.

Q2 montre alors que Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

Donc Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma' = g_1$.

Exercice.. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, Γ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma^{(n)}(x) = g_n(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t} \, dt$.

R.

Exercice S **Séries et intégrales généralisées**

a est un élément de $\mathbb{N}$ et f une fonction **continue** , **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

Q1. a) On pose, pour tout n dans $[\![a,+\infty[\![$, $S_n=\sum_{k=a}^{n} u_k$. Montrer que si n appartient à $[\![a,+\infty[\![$:

$$\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(n)\leqslant S_n\leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(a).$$

b) Retrouver un résultat important de cours.

Q2. Montrer que les suites de termes généraux $S_n-\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n-\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Application. Montrer que $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ converge vers un réel γ appelé la constante d'Euler.

En déduire que $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$.

Q3. En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer : $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Application. $\alpha\in]0,1[$ Montrer que : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Q4. En suppose que la série de terme général $f(n)$ converge. A-t-on $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?

Q1. a) f est décroissante sur $[a,+\infty[$. $\forall k\in[\![a,+\infty[\![,\ \forall t\in[k,k+1],\ f(k+1)\leqslant f(t)\leqslant f(k)$.

En intégrant il vient : $\forall k\in[\![a,+\infty[\![,\ f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(k)$ (1).

En sommant on obtient $\forall n\in[\![a+1,+\infty[\![,\ \sum_{k=a}^{n-1} f(k+1)\leqslant\sum_{k=a}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=a}^{n-1} f(k)$.

Soit encore $\forall n\in[\![a+1,+\infty[\![,\ \sum_{k=a}^{n} f(k)-f(a)\leqslant\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=a}^{n} f(k)-f(n)$.

Ainsi $\forall n\in[\![a+1,+\infty[\![,\ \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(n)\leqslant S_n=\sum_{k=a}^{n} f(k)\leqslant\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(a)$ (2).

Notons que ceci vaut encore pour $n=a$ ($f(a)\leqslant f(a)\leqslant f(a)$!)

$$\boxed{\forall n\in[\![a,+\infty[\![,\ \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(n)\leqslant S_n\leqslant\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t+f(a).}$$

b) Montrons que la série de terme général $f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme la série de terme général $f(n)$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geqslant a}$ de ses sommes partielles est majorée.

Comme la fonction f est positive sur $[a,+\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $F:x\to\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$.

• Supposons que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrons que la série de terme génétal $f(n)$ converge.

Comme f est positive sur $[a,+\infty[$: $\forall n \in [\![a,+\infty[\![$, $\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors $\forall n \in [\![a,+\infty[\![$, $\displaystyle S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a) \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$.

$(S_n)_{n\geqslant a}$ est majorée par $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$. Ceci suffit pour dire que la série de terme général $f(n)$ converge car elle est à termes positifs.

• Réciproquement supposons que la série de terme général $f(n)$ converge. Montrons que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit x un élément de $[a,+\infty[$. Posons $n_x = \mathrm{Ent}\,(x) + 1$.

$a \leqslant x < n_x$ et f est positive sur $[a,+\infty[$. Alors $\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{n_x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

En utilisant a) il vient : $\displaystyle F(x) \leqslant S_{n_x} - f(n_x) \leqslant S_{n_x} = \sum_{k=a}^{n_x} f(k)$.

Comme la série de terme général $f(n)$ converge et est à termes positifs on a encore : $\displaystyle F(x) \leqslant \sum_{k=a}^{+\infty} f(k)$.

Ainsi f est positive sur $[a,+\infty[$ et $\displaystyle x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$ par $\displaystyle\sum_{k=a}^{+\infty} f(k)$. Donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } f(n) \text{ est de même nature que l'intégrale } \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Q2. Posons $\forall n \in [\![a,+\infty[\![, u_n = S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall n \in [\![a,+\infty[\![, u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ d'après (1).

$\forall n \in [\![a,+\infty[\![, v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \displaystyle\int_a^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ d'après (1) (appliquée pour $n+1$).

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant a}$ est décroissante et $(v_n)_{n\geqslant a}$ est croissante.

D'après (2), $\forall n \in [\![a,+\infty[\![$, $u_n = S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n) \geqslant 0$. $(u_n)_{n\geqslant a}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

Toujours d'après (2), $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(a)$.

$(v_n)_{n\geqslant a}$ est croissante et majorée par $f(a)$ donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{Les suites de termes généraux } S_n - \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } S_n - \int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont convergentes.}}$$

Exercice *Les suites* $(v_n)_{n\geqslant a}$ *et* $(u_n)_{n\geqslant a}$ *sont-elles adjacentes ?*

Application. On pose ici $a = 1$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$ f est continue décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Alors la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge.

$$\boxed{\text{La suite de terme général } 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \text{ converge.}}$$

Notons γ la limite de la suite de terme général $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}=0$. Par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\right)=0$.

Ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}-1\right)=0$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\right)=1$ et ainsi :

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.}$$

Q3 Posons : $\forall n\in[\![a,+\infty[\![,\ I_n=\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la série de terme général $f(n)$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. f étant une fonction positive sur $[a,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$.

En particulier il existe un élément p de $[\![a,+\infty[\![$ tel que $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ I_n>0$.

$\forall n\in[\![a,+\infty[\![,\ I_n\leqslant I_n+f(n)\leqslant S_n\leqslant I_n+f(a)$. Donc $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ 1\leqslant\dfrac{S_n}{I_n}\leqslant 1+\dfrac{f(a)}{I_n}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a)}{I_n}=0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{I_n}=1$. Ainsi $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}I_n$.

$$\boxed{\text{Si la série de terme général } f(n) \text{ diverge alors } \sum_{k=a}^{n} f(k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Rappelons que $\alpha\in]0,1[$. Posons ici $a=1$ et $\forall t\in[1,+\infty[,\ f(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}\cdot$

f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t\in[1,+\infty[,\ f'(t)=-\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\cdot$ Donc $\forall t\in[1,+\infty[,\ f'(t)\leqslant 0$.

Ainsi f est continue, positive et décroissante sur $[1+\infty[$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, f(n)=\dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\alpha<1$ donc la série de terme général $f(n)$ diverge et ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{k=1}^{n}f(k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^n\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t=\int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n=\frac{1}{1-\alpha}\left[n^{1-\alpha}-1\right]$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^{1-\alpha}=+\infty$ car $1-\alpha>0$ donc $1=\mathrm{o}(n^{1-\alpha})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Alors $n^{\alpha-1}-1\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{1-\alpha}=\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\text{si } \alpha \text{ est un réel de l'intervalle }]0,1[\text{ alors } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}\cdot}$$

Q4. Posons ici $a=0$ et $\forall t\in[0,+\infty[,\ f(t)=e^{-t}$. f est continue, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge car $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt$ converge.

Alors la série de terme général $f(n)$ converge ce qui n'est pas choquant pour une série géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$!

Soit n dans $\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_{n+1}^{A} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left(-e^{-A} + e^{-(n+1)}\right) = e^{-(n+1)}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{i+n+1} = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^i = e^{-(n+1)} \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De toute évidence on n'a pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)}{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = 1$ donc ICI on n'a pas : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

R

EXERCICE 21

Exercice **S** **Séries et intégrales généralisées. ESCP 1994 1.13**

Q1. β est un réel. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$

Q2. β est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{\beta-1}$ (on pourra encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^\beta}$).

Q1 Posons $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

• Si $\beta = 0$: $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_n = \frac{1}{n}$; la série de terme général u_n diverge.

• Supposons $\beta < 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1/n}{u_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = 0$ car $\beta < 0$.

Alors 1/ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$;

2/ $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_n \geqslant 0$ et $\frac{1}{n} \geqslant 0$;

3/ La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_n diverge.

• Supposons $\beta > 0$. Posons $\forall t \in [2,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$. Notons que $\forall t \in [2,+\infty[$, $f(t) \geqslant 0$.

f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et $\forall t \in [2,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{(t(\ln t)^\beta)^2}\left[(\ln t)^\beta + t\beta \times \frac{1}{t}(\ln t)^{\beta-1}\right]$.

$\forall t \in [2,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{(\ln t)^{\beta-1}}{(t(\ln t)^\beta)^2}\left[\ln t + \beta\right]$. Donc $\forall t \in [2,+\infty[$, $f'(t) \leqslant 0$.

Ainsi f est continue, positive et décroissante. Alors la série de terme général $f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$.

Donc la série de terme général u_n est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$.

Soit $A \in [2,+\infty[$.

1er cas. $\beta = 1$. $\displaystyle\int_2^A f(t)\,dt = \int_2^A \frac{1/t}{\ln t}\,dt = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^A = \ln|\ln A| - \ln|\ln 2|$.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_2^A f(t)\,dt = +\infty$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

2ème cas.. $\beta \neq 1$.

$$\int_2^A f(t)dt = \int_2^A \frac{1}{t}(\ln t)^{-\beta}dt = \left[\frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^A = \frac{(\ln A)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

• $\beta > 1$ Alors $1-\beta < 0$ donc $\lim\limits_{A\mapsto+\infty}(\ln A)^{-\beta+1} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\int_2^A f(t)dt = \frac{1}{\beta-1}(\ln 2)^{1-\beta}$. $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge.

• $\beta < 1$ Alors $1-\beta > 0$. $\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\frac{(\ln A)^{-\beta+1}}{-\beta+1} = +\infty$, $\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\int_2^A f(t)dt = +\infty$.

$\int_2^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Si $\beta > 0$: $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$. donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Résumons.. La série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

"Rappel".. Si α et β sont deux réels la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Q2 Comme nous l'avons vu plus haut f est décroissante sur $[2,+\infty[$ car ici $\beta > 1$.

Alors $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall t \in [k,k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant il vient:

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k)$.

donc $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall p \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n}^{p} f(k+1) \leq \sum\limits_{k=n}^{p}\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=n}^{p} f(k)$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall p \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leq \int_n^{p+1} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=n}^{p}(f(k))$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall p \in [\![n,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leq \int_n^{p+1}\frac{1}{t}(\ln t)^{-\beta}dt \leq \sum\limits_{k=n}^{p} f(k)$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \forall p \in [\![n+1,+\infty[\![, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leq \left[\frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_n^{p+1} \leq \sum_{k=n+1}^{p} f(k) + f(n).$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \forall p \in [\![n+1,+\infty[\![, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leq \frac{1}{\beta-1}(\ln n)^{-\beta+1} - \frac{1}{\beta-1}(\ln(p+1))^{-\beta+1} \leq \sum_{k=n+1}^{p} f(k) + f(n).$

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ (licite car la série de terme général $f(k)$ converge car $\beta > 1$).

Alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p+1} f(k) = R_n$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} f(k) = R_n$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1}{\beta-1}(\ln(p+1))^{-\beta+1}\right) \underset{1-\beta<0}{=} 0$.

Ainsi en faisant tendre p vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes il vient :

$R_n \leq \dfrac{1}{\beta-1}(\ln n)^{-\beta+1} \leq R_n + f(n)$. et ceci pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$.

Posons pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $w_n = \dfrac{1}{\beta-1}(\ln n)^{-\beta+1}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, R_n \leq w_n \leq R_n + f(n).$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, w_n - f(n) \leq R_n \leq w_n$ et $w_n > 0$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, 1 - \dfrac{f(n)}{w_n} \leq \dfrac{R_n}{w_n} \leq 1.$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(\ln n)^\beta}}{\frac{1}{\beta-1}(\ln n)^{-\beta+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left((\beta-1)\frac{1}{n}\frac{1}{\ln n}\right) = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{f(n)}{w_n}\right) = 1$. Ainsi par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{w_n} = 1$.

Donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n = \dfrac{1}{\beta-1}(\ln n)^{-\beta+1} = \dfrac{1}{\beta-1}\dfrac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}$$

Finalement $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} \dots = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{\beta-1}.$

Exercice **S** **Le continu n'est pas toujours discret... (version 1).**

f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On suppose que $\boxed{f \text{ est positive}}$ sur $[a, +\infty[$.

Q1. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ converge.

Q2. Montrer que ceci vaut encore si f est négative sur $[a, +\infty[$.

Q3. Illustrer l'importance de l'hypothèse : f garde un signe constant sur $[a, +\infty[$, dans les résultats précédents.

Q1. a) Posons $n_0 = \text{Max}(0, \text{Ent}\,(a) + 1)$. Posons encore : $\forall x \in [a, +\infty[,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

• Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et montrons que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$ converge.

Posons $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = I$ et $(n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'élément de $[a, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$.

La caractérisation séquantielle de la notion de limite permet alors de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} F(n) = I$.

Ainsi la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque Notons que l'hypothèse de signe sur f n'intervient pas ici.

• Réciproquement supposons que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$ converge et montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Comme f est positive sur $[a, +\infty[$ il suffit de montrer que F est majorée sur $[a, +\infty[$.

Notons L la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ car $n \leqslant n+1$ et f est positive sur $[n, n+1]$.

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante et converge vers L. Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = u_n \leqslant L$.

Soit x un élément de $[a, +\infty[$. Posons $p = \text{Max}(0, \text{Ent}\,(x) + 1)$. $p \in [\![n_0, +\infty[\![$ et $p > x$.

Donc $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t = u_p \leqslant L$.

$\forall x \in [a, +\infty[,\ F(x) \leqslant L$. F est majorée pas L sur $[a, +\infty[$. Ainsi $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge car f est positive sur $[a, +\infty[$.

Ceci achève donc de montrer que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge si et seulement si la suite de terme général } \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b) Ici encore $n_0 = \text{Max}(0, \text{Ent}\,(a) + 1)$.

Observons alors que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{n_0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors la suite de termes général $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors le a) montre que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si la série de terme général } \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ *est une suite croissante d'éléments de* $[a, +\infty[$ *qui tend vers* $+\infty$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si la série de terme général* $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Q2. Le résultat s'obtient sans difficulté en appliquant ce qui précède à $-f$.

Q3. Posons $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(t) = \cos(\pi\, t)$. f est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{n} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(\sin(\pi n) - \sin(0)\big) = 0$. Donc la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{n} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ converge !

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(\sin(\pi(n+1)) - \sin(\pi n)\big) = 0$. Donc la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ converge !

Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $g : x \to \displaystyle\int_0^{x} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(\sin(\pi x) - \sin(0)\big) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$. Comme $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2n + \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui tendent vers $+\infty$, la caractérisation séquentielle de la notion de limite donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(n) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \ell$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 0$ et $g\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$. Alors $\ell = 0 = \frac{1}{\pi}$! ! !

Ainsi g n'a pas de limite en $+\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ est divergente. Pourtant la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{n} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ et la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Notons pour finir que f ne garde pas un signe constant sur $[0, +\infty[$...

Remarque Retenons qu'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *n'a rien d'une évidence même si la série de terme général* $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente. Qu'on se le dise.*

Pour écrire cela il convient avant tout de s'assurer de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, *au moins lorsque* f *ne garde pas un signe constant sur* $[0, +\infty[$...

Cet exercice est l'occasion de se rappeler que dans le théorème de caractérisation séquentielle de la notion de limite "il y a un POUR TOUTE SUITE...".

Exercice **PC** **Le continu n'est pas toujours discret again... (version 2).**

f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

$(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite croissante d'éléments de $[a, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$.

Q1. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et à pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que la réciproque des résultats précédents n'est pas vraie.

Q3. On suppose que f garde un signe constant sur $[a, +\infty[$.

a) Montrer que si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que si la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q1 Posons $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

a) $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie, égale à I, en $+\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, la caractérisation séquentielle de la notion de limite montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(a_n) = I$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a_n} f(t)\,dt = I$.

Donc la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,dt$ converge et a pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

---

b) $\forall p \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{p}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = \int_{a_{n_0}}^{a_{p+1}} f(t)\,dt = \int_{a_{n_0}}^{a} f(t)\,dt + F(a_{p+1})$.

Alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=n_0}^{p}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = \int_{a_{n_0}}^{a} f(t)\,dt + I = \int_{a_{n_0}}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,dt$.

La série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt$ converge et $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = \int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,dt$.

Remarque.- Ici la croissance de la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas utile.

(Q2) Posons $q=0$, $\forall t\in[0,+\infty[$, $f(t)=\cos(\pi t)$, $x_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_0^n=\frac{1}{\pi}\sin(n\pi)-\frac{1}{\pi}\sin 0=0$ et

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\sin((n+1)\pi)-\frac{1}{\pi}\sin(n\pi)=0.$

Alors la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ et la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ convergent.

$\forall x\in[0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_0^x=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$.

Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Posons $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=I$.

$(n)_{n\geqslant 0}$ et $\left(2n+\frac{1}{2}\right)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites d'éléments de $[0,+\infty[$ qui tendent vers $+\infty$.

La caractérisation séquentielle de la notion de limite permet alors de dire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2n+1/2} f(t)\,dt=I.$$

Alors $I=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\sin(n\pi)\right)}_{\sin n\pi=0}=0$ et $I=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\sin\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right)}_{\sin\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=1}=1$. Alors $0=1$!!

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

(Q3) f garde un signe constant sur $[a,+\infty[$. Quitte à changer f en $-f$ nous supposerons que f est positive sur $[a,+\infty[$. Le passage de f à $-f$ n'altère pas les résultats qui suivent... Rappelons que $\forall x\in[a,+\infty[$, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

<u>a)</u> Supposons que la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,dt$ converge. Notons L sa limite.

Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Comme f est positive il suffit de montrer que F est majorée sur $[a,+\infty[$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $u_{n+1} - u_n = \int_a^{a_{n+1}} f(t)\,dt - \int_a^{a_n} f(t)\,dt = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt \geq 0$ car $a_n \leq a_{n+1}$ et f est positive sur $[a, +\infty[$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et a pour limite L ; $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $u_n \leq L$.

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\int_a^{a_n} f(t)\,dt \leq L$.

Soit $x \in [a, +\infty[$. Comme $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, $\exists p \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\forall n \in [\![p, +\infty [\![$, $a_n \geq x$.

En particulier $a_p \geq x$.

Alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^{a_p} f(t)\,dt$ car $a_p \geq x$ et f est positive sur $[a, +\infty[$.

Or $F(x) \leq \int_a^{a_p} f(t)\,dt \leq L$.

Finalement $\forall x \in [a, +\infty[$, $F(x) \leq L$. $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est donc majorée par L sur $[a, +\infty[$.

Comme f est positive sur $[a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Si la suite de terme général $\int_a^{a_n} f(t)\,dt$ converge, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

---

b) Supposons que la série de terme général $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt$ converge et posons $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt$.

$\forall n \in [\![n_0+1, +\infty [\![$, $\int_a^{a_n} f(t)\,dt = \int_a^{a_{n_0}} f(t)\,dt + \int_{a_{n_0}}^{a_n} f(t)\,dt = \int_a^{a_{n_0}} f(t)\,dt + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} \int_a^{a_n} f(t)\,dt = \int_a^{a_{n_0}} f(t)\,dt + S$. La suite de terme général $\int_a^{a_n} f(t)\,dt$ converge. Alors a) montre que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Si la série de terme général $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt$ converge, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.