R.

EXERCICE 23

Exercice | **S** | **ESCP 1995 2.6**

Q1. g est une application continue et positive de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est de même nature que la série de terme général $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,dt$.

Q2. f est une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est absolument convergente.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)\, f'(t)\,dt$.

b) Montrer que la série de terme général $f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $w_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,dt$.

Q3. Déterminer la nature de la série de terme génral $s_n = \dfrac{\sin\sqrt{n+1}}{n+1}$.

Q1 Posons $\forall x \in [0, +\infty[$, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

- g étant positive sur $[0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge si et seulement si G est majorée sur $[0,+\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v(n) = \int_n^{n+1} g(t)\,dt \geqslant 0$. La série de terme général v_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée... ce qui ne sera pas franchement utile ici.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} g(t)\,dt = \int_0^{n+1} g(t)\,dt$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \int_0^{n+1} g(t)\,dt$.

* Supposons que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

caractérisation séquentielle de la notion de limite.

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+1} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

Alors la série de terme général $v_n = \int_n^{n+1} g(t)\,dt$ est convergente.

* Supposons que la série de terme général v_n converge. Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n+1} g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = S$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt \leqslant \int_0^{\mathrm{Ent}(x)+1} g(t)\,dt \leqslant S$.

g est positive sur $[0,+\infty[$ et $x \leqslant \mathrm{Ent}(x)+1$.

G est majorée par S sur $[0,+\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est de même nature que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,dt$.

Remarque... ceci vaut encore si g est négative sur $[0,+\infty[$.

Ceci est faux par exemple pour $g : x \mapsto \cos(\pi x)$

R.

Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. f et $u : t\mapsto t-n-1$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall t\in[0,+\infty[$, $u'(t)=1$. Ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \left[(t-n-1)f(t)\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\,dt = -(n-n-1)f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt.$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt.$$

b) $|f'|$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge car $\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt$ est absolument convergente.

Alors Q1. montre que la série de terme général $\int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt$ converge.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt\right| \underset{n\leq n+1}{\leq} \int_n^{n+1}|(n+1-t)f'(t)|\,dt = \int_n^{n+1}(n+1-t)\,|f'(t)|\,dt \leq \int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt$$

$n\leq n+1$

$\forall t\in[n,n+1],\ n+1-t\leq 1$ et $|f'(t)|\geq 0$

La convergence de la série de terme général $\int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $\left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt\right|$.

Ainsi la série de terme général $\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_n^{n+1}f(t)\,dt = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\,dt$. Alors <u>les séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1}f(t)\,dt$ sont de même nature.</u> Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt = \int_0^n f(t)\,dt$.

Alors la série de terme général $\int_n^{n+1}f(t)\,dt$ est de même nature que la suite de terme général $\int_0^n f(t)\,dt$.

<u>Ainsi la série de terme général $f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $\int_0^n f(t)\,dt$.</u>

Remarque.- Notons que si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors la suite de terme général $\int_0^n f(t)\,dt$ converge et ainsi la série de terme général $f(n)$ converge.

(Q3) Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\sin\sqrt{t+1}}{t+1}$.

f est continue sur $[0,+\infty[$. Pour utiliser Q2 nous allons d'abord montrer que $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est absolument convergente.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ ($\forall t \in [0,+\infty[$, $t+1>0$, sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, $z \mapsto \sqrt{z}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ...).

$\forall t \in [0,+\infty[$, $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}\left[\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}\cos\sqrt{t+1} - \sin\sqrt{t+1}\right]$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{(t+1)^2}\,\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}\,|\cos\sqrt{t+1}| + \dfrac{1}{(t+1)^2}\,|\sin\sqrt{t+1}|$

$\forall t \in [0,+\infty[$, $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{(t+1)^2}\,\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} + \dfrac{1}{(t+1)^2} \underset{\sqrt{t+1}\geqslant 1}{\leqslant} \dfrac{1}{(t+1)^2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{(t+1)^2} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{(t+1)^2}$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant |f'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{(t+1)^2} \leqslant \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge car $2>1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ et donc de $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ car $|f'|$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est absolument convergente.

Q2 montre alors que la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $\int_0^n f(t)\,dt$.

Pour montrer que cette suite converge il **SUFFIT** de montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Rappelons que f est continue sur $[0,+\infty[$.

$u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ & $v : t \mapsto -2\cos\sqrt{t+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^{3/2}}$ et $v'(t) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{t+1}}(-\sin\sqrt{t+1}) = \frac{\sin\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{1}{\sqrt{t+1}}\frac{\sin\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+1}}dt = \left[\frac{1}{\sqrt{t+1}}(-2\cos\sqrt{t+1})\right]_0^A - \int_0^A\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^{3/2}}\right)(-2\cos\sqrt{t+1})dt.$$

$$\int_0^A f(t)dt = -2\frac{\cos\sqrt{A+1}}{\sqrt{A+1}} + 2\cos 1 - \int_0^A \frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}dt.$$

$\left|-\frac{2\cos\sqrt{A+1}}{\sqrt{A+1}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{A+1}}$ & $\lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{A+1}} = 0$, par encadrement $\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{2\cos\sqrt{A+1}}{\sqrt{A+1}}\right) = 0$.

Alors $A \mapsto -2\frac{\cos\sqrt{A+1}}{\sqrt{A+1}} + 2\cos 1$ admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi $\int_0 f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}dt$ sont de même nature.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \left|\frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}\right| = \frac{|\cos\sqrt{t+1}|}{(t+1)^{3/2}} \leq \frac{1}{(t+1)^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}\right|dt$ et même de $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}\right|dt$.

Alors $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{t+1}}{(t+1)^{3/2}}dt$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\int_0 f(t)dt$ converge. Alors $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Ceci suffit pour dire que la suite de terme général $\int_0^n f(t)dt$ converge. Comme $\int_0^{+\infty}|f'(t)|dt$ est absolument convergente, Q2 montre que la série de terme général $f(n)$ converge.

Ainsi la série de terme général $\frac{\sin\sqrt{n+1}}{n+1}$ converge.

Exercice | PC

"Rappel" Si (a_n) est une suite décroissante qui converge vers 0 (qui est donc nécessairement positive...), les séries de termes généraux $(-1)^n\, a_n$ et $(-1)^{n+1}\, a_n$ convergent.

f est une fonction continue, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$.

On suppose en outre que f admet une limite nulle en $+\infty$ et on se propose de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,dt$ converge en utilisant des considérations de séries alternées.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\,\sin t\,dt$ est décroissante positive et converge vers zéro.

En déduire que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Q3. a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\,\pi}^{(k+2)\,\pi} f(t)\,dt$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Q1 Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+(n+1)\pi)\sin t\,dt - \int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt = \int_0^{\pi}[f(t+(n+1)\pi)-f(t+n\pi)]\sin t\,dt$.

Or $\forall t\in[0,\pi]$, $f(t+(n+1)\pi)-f(t+n\pi)\leqslant 0$ car f est décroissante.

Alors $\forall t\in[0,\pi]$, $[f(t+(n+1)\pi)-f(t+n\pi)]\sin t\leqslant 0$ car sin est positive sur $[0,\pi]$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_0^{\pi}[f(t+(n+1)\pi)-f(t+n\pi)]\sin t\,dt\leqslant 0$ car $0\leqslant\pi$.

Alors $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+(n+1)\pi)\sin t\,dt - \int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt\leqslant 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+(n+1)\pi)\sin t\,dt \leqslant \int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt$.

La suite $\left(\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

f est positive sur $[0,+\infty[$ et sin est positive sur $[0,\pi]$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,\pi]$, $f(t+n\pi)\sin t\geqslant 0$. En intégrant il vient :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt \underset{0\leqslant\pi}{\geqslant} 0$. La suite $\left(\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\sin t\,dt\right)_{n\geqslant 0}$ est positive.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,\pi]$, $f(t+n\pi)\leqslant f(n\pi)$ (car f est décroissante sur $[0,+\infty[$) et

$\forall t\in[0,\pi]$, $\sin t \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,\pi]$, $f(t+n\pi)\sin t \leq f(n\pi)\sin t$. En intégrant il vient :
$\int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt \leq \int_0^\pi f(n\pi)\sin t\,dt = f(n\pi)\int_0^\pi \sin t\,dt$ car $0 \leq \pi$. Ainsi
$0 \leq \int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt \leq f(n\pi)\int_0^\pi \sin t\,dt$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\pi)=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(n\pi)\int_0^\pi \sin t\,dt\right)=0$.

Par encadrement il vient alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt = 0$.

$\left(\int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto t-n\pi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u=t-n\pi$ dans ce qui suit.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt \underset{u=t-n\pi}{=} \int_0^\pi f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,du = \int_0^\pi f(u+n\pi)(-1)^n \sin u\,du.$$

$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = (-1)^n\int_0^\pi f(u+n\pi)\sin u\,du = (-1)^n\int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or la suite $\left(\int_0^\pi f(t+n\pi)\sin t\,dt\right)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0. Le CSSA montre alors que la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge.

Q2 Soit $x\in[\pi,+\infty[$. Posons $n_x=\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)$. $n_x\in\mathbb{N}^*$ car $x\geq\pi$ et $n_x\pi\leq x<(n_x+1)\pi$.

Alors $\int_0^x f(t)\sin t\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n_x-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{n_x\pi}^x f(t)\sin t\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n_x-1} u_k + \int_{n_x\pi}^x f(t)\sin t\,dt$.

$n_x > \frac{x}{\pi}-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} n_x=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n_x-1}u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k$.

$$\left|\int_{n_x\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt\right| \leq \int_{n_x\pi}^{x} |f(t)\sin t|\,dt = \int_{n_x\pi}^{x} f(t)|\sin t|\,dt \underset{\uparrow}{\leq} f(n_x\pi)\int_{n_x\pi}^{x} 1\,dt = f(n_x\pi)(x-n_x\pi)$$

$n_x\pi \leq x$; $\forall t\in[n_x\pi, x]$, $f(t)\leq f(n_x\pi)$ et $0\leq|\sin t|\leq 1$

Or $f(n_x\pi)\geq 0$ et $x-n_x\pi\leq\pi$ car $n_x\pi\leq x<n_x\pi+\pi$.

Donc $\left|\int_{n_x\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt\right| \leq \pi f(n_x\pi)$. $\lim_{x\to+\infty}(n_x\pi)=+\infty$ et $\lim_{z\to+\infty} f(z)=0$.

Alors $\lim_{x\to+\infty}\pi f(n_x\pi)=\pi\times 0=0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\int_{n_x\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt = 0$ ... par encadrement.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\sin t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n_x-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{n_x\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + 0.$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge et vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$.

Q3) a) Soit $k\in\mathbb{N}$

f est décroissante sur $[k\pi,(k+1)\pi]$.

Donc $\forall t\in[k\pi,(k+1)\pi]$, $f(t)\geq f((k+1)\pi)$ et $|\sin t|\geq 0$.

Alors $\forall t\in[k\pi,(k+1)\pi]$, $f(t)|\sin t|\geq f((k+1)\pi)|\sin t|$.

En intégrant il vient $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt \geq f((k+1)\pi)\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt$.

$t\mapsto t-k\pi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=t-k\pi$

dans ce qui suit. $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt \underset{u=t-k\pi}{=} \int_0^{\pi}|\sin(u+k\pi)|\,du = \int_0^{\pi}|(-1)^k\sin u|\,du = \int_0^{\pi}|\sin u|\,du = \int_0^{\pi}\sin u\,du.$

Or $\int_0^{\pi}\sin u\,du = [-\cos u] = -\cos\pi-(-\cos 0) = -(-1)-(-1) = 2$. Alors $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt = 2$.

Ainsi $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt \geq 2f((k+1)\pi)$.

$$\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt \leq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f((k+1)\pi)\,dt = f((k+1)\pi)\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} 1\,dt = \pi f((k+1)\pi).$$

f est décroissante
sur $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$
et $(k+1)\pi \leq (k+2)\pi$

Ainsi $f((k+1)\pi) \geq \frac{1}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt.$

Alors $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt \geq \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b) * Supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrons que $\int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$ converge.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq |f(t)\sin t| = f(t)|\sin t| \leq f(t)$. La convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$ converge.

* Supposons que $\int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$ converge. Montrons que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Posons $I = \int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$.

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x |f(t)\sin t|\,dt = I$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{(n+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt = I$ car $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\pi = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{(k\pi)}^{(k+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt = I.$

Alors la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt$ ou $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt$ converge.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt$. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt$ converge. Il en est évidemment de même de la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt$.

f est positive sur $[0,+\infty[$. Pour montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge il suffit de montrer que $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est majorée.

Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt \leq S$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt \geq 0$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. Posons $n_x = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)$. $n_x\pi \leq x < (n_x+1)\pi$.

Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{(n_x+1)\pi} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n_x} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,dt \leq S$.

f est positive sur $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $F(x) \leq S$. F est majorée sur $[0,+\infty[$.

Comme f est positive sur $[0,+\infty[$: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$ converge si et seulement $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge.

EXERCICE 25

Exercice **PC**

f est une application continue et décroissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q1. Montrer que f est positive sur $]0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

Q2. h un réel strictement positif.

a) Montrer que la série de terme général $f(nh)$ est convergente.

b) Montrer que : $\displaystyle hf(h) \leqslant \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle hf\big((n+1)h\big) \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hf(nh)$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Prouver que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Application.

a) Soit α un réel appartenant à $]-1,0]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((h)^{\alpha+1}e^{-nh}(n)^{\alpha}\Big) = \Gamma(\alpha+1)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

Généralise un peu oral ESCP 2001 1.9

(Q1) • Supposons que $\exists x_1 \in]0,+\infty[,\ f(x_1) < 0$.

Alors $\forall x \in [x_1,+\infty[,\ f(x) \leq f(x_1)$ car f est décroissante sur $]0,+\infty[$

Alors $\forall A \in [x_1,+\infty[,\ \int_{x_1}^{A} f(x)dx \leq \int_{x_1}^{A} f(x_1)dx = (A-x_1)f(x_1)$.

De plus $\lim_{A\to+\infty}[(A-x_1)f(x_1)] = -\infty$ donc $\lim_{A\to+\infty}\int_{x_1}^{A} f(x)\,dx = -\infty$. Ceci contredit

$f(x_1)<0$

la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ car cette convergence donne la convergence de $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$.

Ainsi on ne peut pas trouver x_1 dans $]0,+\infty[$ tel que $f(x_1)<0$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geq 0$.

f est décroissante et minorée par 0 sur $]0,+\infty[$. Le théorème de la limite monotone montre alors que f admet une limite finie ℓ à $+\infty$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geq 0$ donc $\ell \geq 0$. Supposons que $\ell > 0$.

Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell = \dfrac{\ell}{x^0}$. Or $\forall x \in [1,+\infty[,\ \dfrac{\ell}{x^0} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ell}{x^0}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la divergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. Ceci est impossible car $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Ainsi $\ell = 0$.

Donc f tend vers 0 en $+\infty$.

(Q2) Dans a), b) et c) h est un réel strictement positif.

a) f est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$.

Alors $x \mapsto f(xh)$ est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$ car h est strictement positif. Ainsi la série de terme général $f(nh)$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(th)dt$.

$t \mapsto th$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie le changement de variable $u = th$ dans ce qui suit. Soit $A \in [1, +\infty[$. $\displaystyle\int_1^A f(th)\,dt \underset{u=th}{=} \int_h^{Ah} f(u)\frac{1}{h}\,du = \frac{1}{h}\int_h^{Ah} f(u)\,du$.

Or $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(u)\,du$ converge et $\lim\limits_{A\to+\infty}(Ah) = +\infty$ $(h>0)$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(th)\,dt = \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} f(u)\,du$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(th)\,dt$ converge ... et vaut $\displaystyle\frac{1}{h}\int_h^{+\infty} f(u)\,du$.

Alors la série de terme général $f(nh)$ converge.

b) Soit $\varepsilon \in]0, h]$. f est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $\forall t \in [\varepsilon, h]$, $f(h) \leq f(t)$.

Ainsi $\displaystyle\int_\varepsilon^h f(h)\,dt \leq \int_\varepsilon^h f(t)\,dt$ car $\varepsilon \leq h$; $(h-\varepsilon) f(h) \leq \int_\varepsilon^h f(t)\,dt$.

Or $\displaystyle\int_0^h f(t)\,dt$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Donc en faisant tendre ε vers 0 il vient :

$\displaystyle h f(h) \leq \int_0^h f(t)\,dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est décroissante sur $[nh, (n+1)h]$. Alors $\forall t \in [nh, (n+1)h]$, $f((n+1)h) \leq f(t) \leq f(nh)$.

En intégrant il vient $\displaystyle h f((n+1)h) = \int_{nh}^{(n+1)h} f((n+1)h)\,dt \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(nh)\,dt = h f(nh)$. car $nh \leq (n+1)h$

$\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h f((n+1)h) \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq h f(nh)$.

Observons que l'inégalité de gauche vaut pour $n = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{p} h f((n+1)h) \leq \sum_{n=0}^{p}\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt = \int_0^{(p+1)h} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{p} h f(nh)$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{p+1} h f(nh) \leq \int_0^{(p+1)h} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_h^{(p+1)h} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{p} h f(nh)$.

Rappelons que la série de terme général $f(nh)$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Donc en faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient : $\displaystyle h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,dt \leq h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)$

R

Alors : $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,dt \leq h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

d) 1er cas. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$.

comme $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \int_h^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ on obtient par encadrement $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \left(h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$: $\displaystyle h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

2ème cas. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$. comme f est positive et continue sur $]0,+\infty[$ alors

f est nulle sur $]0,+\infty[$.

donc $\forall h \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = 0$ et $\displaystyle\frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Alors on a encore $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ (la fonction nulle est équivalente à elle même ...).

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Q3 a) $\alpha \in]-1,0[$. Posons ici $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

d'abord $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\Gamma(\alpha+1)$ $(\alpha+1>0)$.

de plus f est continue sur $]0,+\infty[$.

mieux f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} + x^{\alpha}(-e^{-x})$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \underbrace{x^{\alpha-1} e^{-x}}_{>0} \underbrace{[\alpha - x]}_{<0 \text{ car } \alpha<0} < 0$. f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Toutes les conditions pour appliquer Q2 sont réunies.

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Alors $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+}\left(h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right)$

$\Gamma(\alpha+1) = \lim_{h\to 0^+}\left(h \sum_{n=1}^{+\infty}(nh)^\alpha e^{-nh}\right)$. Alors $\underline{\underline{\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(h^{\alpha+1} e^{-nh} n^\alpha\right) = \Gamma(\alpha+1).}}$

__Remarque__.. Bien évidemment ce résultat cache l'existence de $\sum_{n=1}^{+\infty} h^{\alpha+1} e^{-nh} n^\alpha$ pour tout h dans $]0,+\infty[$. Notons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{h\to 0^+}(h^{\alpha+1} e^{-nh} n^\alpha) = 0$ ... et cetera

b) Posons ici $\forall t\in[0,+\infty[$, $f(t)=e^{-t^2}$. f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

Soit $A\in[0,+\infty[$. $t\mapsto \sqrt{2}\,t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $u=\sqrt{2}\,t$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A e^{-t^2}dt = \int_0^{\sqrt{2}A} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}A} e^{-u^2/2}\,du.$$

Le cours de probabilité permet de dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$ alors, par parité, $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}/2$.

Comme $\lim_{A\to+\infty}(\sqrt{2}A)=+\infty$: $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

f est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$ (donc sur $]0,+\infty[$!) et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

d'après Q 2 : $\lim_{h\to 0^+}\left(h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim_{t\to 1^-}\sqrt{-\ln t} = 0^+$. Le logarithme...

Alors, par composition des limites, $\lim_{t\to 1^-}\left(\sqrt{-\ln t}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{-\ln t})\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0$. Donc

$\sqrt{-\ln t}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{-\ln t}) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{-\ln t}) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-\ln t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{-(t-1)}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(n\sqrt{-\ln t})^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2\ln t} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}.}}$$

Exercice | ESCP 2002 (1.18) | *Texte ESCP !!* Pour B. N.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k \geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Q1 Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [\ell T, (\ell+1)T]$, $\dfrac{|f(t)|}{t} \geqslant \dfrac{|f(t)|}{(\ell+1)T}$.

En intégrant on obtient $u_\ell \geqslant \displaystyle\int_{\ell T}^{(\ell+1)T} \frac{|f(t)|}{(\ell+1)T}\,dt = \frac{1}{(\ell+1)T}\int_{\ell T}^{(\ell+1)T} |f(t)|\,dt$ car $\ell T \leqslant (\ell+1)T$.

Posons $c_\ell = \displaystyle\int_{\ell T}^{(\ell+1)T} |f(t)|\,dt$. $c_\ell \geqslant 0$ car $|f|$ est positive sur $[\ell T, (\ell+1)T]$ et $\ell T \leqslant (\ell+1)T$.

Supposons que $c_\ell = 0$. Alors
- $|f|$ est continue sur $[\ell T, (\ell+1)T]$
- $|f|$ est positive sur $[\ell T, (\ell+1)T]$
- $\displaystyle\int_{\ell T}^{(\ell+1)T} |f(t)|\,dt = 0$
- $\ell T \neq (\ell+1)T$

Dans ces conditions : $\forall t \in [\ell T, (\ell+1)T]$, $|f(t)| = 0$. Alors f est nulle sur $[\ell T, (\ell+1)T]$

mais comme f est périodique de période T sur $\mathbb{R}_+$: f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est

impossible car f n'est pas identiquement nulle.

Ainsi $c_\ell > 0$.

Observons que $c_\ell = \displaystyle\int_0^T |f(t)|\,dt$ car $|f|$, comme f, est T-périodique sur $\mathbb{R}_+$

Posons alors $c = \displaystyle\int_0^T |f(t)|\,dt$. $c > 0$

et $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell \geqslant \dfrac{c}{T} \times \dfrac{1}{\ell+1} \geqslant 0$

La divergence de la série de terme général $\dfrac{c}{T} \times \dfrac{1}{\ell+1}$ ($c \neq 0$!!) et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_ℓ diverge.

R

La série de terme général $u_\ell = \int_{\ell T}^{(\ell+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ diverge.

(Q2) a) Soit x un élément de $]T, +\infty[$. Ici $m \neq 0$

• Remarque.. Soit $i \in \mathbb{N}$. Dire que $iT \leq x < (i+1)T$ revient à dire que $i = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{T}\right)$ •

Posons alors $n_x = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{T}\right)$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{\ell=0}^{n_x-1} \int_{\ell T}^{(\ell+1)T} f(t)\,dt + \int_{n_x T}^{x} f(t)\,dt.$$

Or $\int_{\ell T}^{(\ell+1)T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = mT$. Ainsi $F(x) = n_x(mT) + \int_{n_x T}^{x} f(t)\,dt$.

donc $\frac{F(x)}{mx} = \frac{n_x T}{x} + \frac{1}{m} \times \frac{1}{x} \int_{n_x T}^{x} f(t)\,dt$ (*).

Rappel.. $\mathrm{Ent}(y) \underset{+\infty}{\sim} y$ ($\mathrm{Ent}(y) \leq y < \mathrm{Ent}(y)+1$ donne $1 \geq \frac{\mathrm{Ent}(y)}{y} > 1 - \frac{1}{y}$ ...)

Alors $n_x = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{T}\right) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \frac{x}{T}$; $\frac{n_x}{x} \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \frac{x/T}{x} = \frac{1}{T}$. Donc $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{n_x T}{x} = 1$.

$$\left|\int_{n_x T}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \int_{n_x T}^{x} |f(t)|\,dt \overset{(\blacktriangle)}{\leq} \max_{u \in [0,T]} |f(u)| \int_{n_x T}^{x} dt = \max_{u \in [0,T]} |f(u)| \, (x - n_x T).$$

$\boxed{(\blacktriangle)}$ f est continue sur $[0,T]$ et T périodique donc $\max_{u \in [0,T]} |f(u)|$ existe et majore $|f|$ sur $\mathbb{R}_+$

Posons $K = \max_{u \in [0,T]} |f(u)|$. $\left|\int_{n_x T}^{x} f(t)\,dt\right| \leq K(x - n_x T) \leq KT$.

$n_x \leq \frac{x}{T} < n_x + 1$

Donc $\left|\frac{1}{m} \times \frac{1}{x} \int_{n_x}^{x} f(t)\,dt\right| = \frac{1}{|m|} \frac{1}{x} \left|\int_{n_x}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{|m|} \frac{1}{x} KT$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{|m|} \frac{1}{x} KT\right) = 0$ donc $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{m} \times \frac{1}{x} \int_{n_x}^{x} f(t)\,dt\right) = 0$.

(*) donne alors $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{F(x)}{mx} = 1$; $F(x) \underset{+\infty}{\sim} mx$.

b) F est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

F est donc C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x)=f(x)$.

Soit $x \in [T,+\infty[$. Une intégration par parties simple donne :

$$\int_T^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{t}F(t)\right]_T^x - \int_T^x -\frac{1}{t^2}F(t)dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(T)}{T} + \int_T^x \frac{F(t)}{t^2}dt.$$

$x \mapsto \frac{F(x)}{x} - \frac{F(T)}{T}$ a une limite finie en $+\infty$ égale à $m - \frac{F(T)}{T}$ $\quad (F(x) \underset{+\infty}{\sim} mx)$.

Alors $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ est de même nature que $\int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$.

Or 1) $\frac{F(t)}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{mt}{t^2} = \frac{m}{t}$

2) $t \mapsto \frac{m}{t}$ garde un signe constant sur $[T,+\infty[$.

3) $\int_T^{+\infty} \frac{m}{t}$ diverge car m n'est pas nul.

Alors $\underline{\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \text{ diverge.}}$

(Q3) Ici $m=0$. Montrons alors que F est borné sur $[T,+\infty[$.

Soit $x \in [T,+\infty[$. Posons encore $n_x = \mathrm{Ent}\left(\frac{x}{T}\right)$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_xT}^x f(t)dt.$$

$m=0$ donc $\int_0^T f(t)dt = 0$. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = 0$. $\quad K = \max_{u\in[0,T]} |f(u)|$

Alors $|F(x)| = \left|\int_{n_xT}^x f(t)dt\right| \leq \int_{n_xT}^x |f(t)|dt \leq \max_{u\in[0,T]}|f(u)| \int_{n_xT}^x dt \leq K(x-n_xT) \leq KT.$

Ainsi $\underline{\forall x \in [T,+\infty[,\ |F(x)| \leq KT.\ \text{F est borné sur } [T,+\infty[.}$

<u>Remarque</u>.. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|F(x)| \leq KT$!

Soit $x \in [T,+\infty[$. Une intégration par parties analogues à celle de Q2 b

donne :

$$\int_T^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{1}{t}F(t)\right]_T^x - \int_T^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)F(t)\,dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(T)}{T} + \int_T^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x)}{x} - \frac{F(T)}{T}\right) = -\frac{F(T)}{T}$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 0$ $\left(\forall x \in [T,+\infty[,\ \left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq \frac{KT}{x}\ldots\right)$

Ainsi $\int_T^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ est de même nature que $\int_T^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}dt$.

1) $\forall t \in [T,+\infty[,\ 0 \leq \left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leq \frac{KT}{t^2}$.

2) $\int_T^{+\infty}\frac{KT}{t^2}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives

montrent alors que $\int_T^{+\infty}\left|\frac{F(t)}{t^2}\right|dt$ converge. $\int_T^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}dt$ est alors absolument convergente

donc convergente.

Ceci achève de montrer que : $\int_T^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ converge.

Supposons que cette intégrale "converge absolument". Alors $J = \int_T^{+\infty}\frac{|f(t)|}{t}dt$ converge.

Ainsi $x \mapsto \int_T^x \frac{|f(t)|}{t}dt$ admet une limite finie en $+\infty$ qui vaut J.

Alors la suite de terme général $\int_T^{(n+1)T}\frac{|f(t)|}{t}dt$ converge (vers J).

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_T^{(n+1)T}\frac{|f(t)|}{t}dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{|f(t)|}{t}dt = \sum_{k=1}^{n}u_k$.

Ainsi la série de terme général u_k converge. Ceci contredit Q1.

$\int_T^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ n'est pas absolument convergente.

Exercice.. QSP HEC 2007. Donner un équivalent de $x \mapsto \int_0^x |\sin t|dt$ en $+\infty$. $\left(R : \frac{2x}{\pi}\right)$

Exercice S

Trouver un équivalent de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt$.

Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\arctan t}{\sqrt{t}}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.

$f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}$. Ainsi $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$. f se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Dans ces conditions pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

V1 Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $u(t) = \arctan t$ et $v(t) = 2\sqrt{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt = \left[2\sqrt{t} \arctan t\right]_\varepsilon^n - \int_\varepsilon^n 2\sqrt{t} \times \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

$$\int_\varepsilon^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} \arctan n - 2\sqrt{\varepsilon} \arctan \varepsilon - 2\int_\varepsilon^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$ converge ($t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$).

De plus $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (2\sqrt{\varepsilon} \arctan \varepsilon) = 0$. Alors en faisant tendre ε vers 0 il vient :

$$u_n = \int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{n} \arctan n - 2\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt.$$

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2} \leq \dfrac{\sqrt{t}}{t^2} = \dfrac{1}{t^{3/2}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$ converge également car $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$ converge. Notons ℓ sa limite.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (2\sqrt{n} \arctan n) = +\infty$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} \arctan n = \dfrac{\pi}{2}$) et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-2\displaystyle\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt\right) = -2\ell$.

Ainsi $-2\displaystyle\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt = \underset{n \to +\infty}{o}(2\sqrt{n} \arctan n)$. Alors $2\sqrt{n} \arctan n - 2\displaystyle\int_0^n \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \arctan n$.

Ainsi $u_n = 2\sqrt{n}\arctan n - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\arctan n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\times\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{n}$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n) = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

$u_n \sim \pi\sqrt{n}$.

V2 $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\arctan t + \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{t}\right]dt = \int_0^n \left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\right)dt$.

Alors $\int_0^n\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\right)dt$ et $\int_0^n \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge ($1/2 < 1$).

Ainsi $\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$ converge.

et $u_n = \int_0^n\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$.

$\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{t}\right]_\varepsilon^n = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(2\sqrt{n} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{n}$.

Donc $u_n = \frac{\pi}{2}\times 2\sqrt{n} - \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt = \pi\sqrt{n} - v_n$ avec $v_n = \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$.

$\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{t} = \frac{1}{t^{3/2}}$; $\forall t\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{3/2}}\geq 0$; $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$. Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{1}{t}\,dt$ converge. Alors la suite de terme général v_n admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\pi\sqrt{n}) = +\infty$:

$v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\pi\sqrt{n})$. Alors $-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\pi\sqrt{n})$ et ainsi $u_n = \pi\sqrt{n} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\sqrt{n}$

On retrouve alors que $u_n = \int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\sqrt{n}$.