EXERCICE 28

Exercice S

Étudier la nature de la série de terme général $n^{\alpha}\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}}$.

$f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

1°.– $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^3}} = \dfrac{1}{t^{3/2}}$;

2°.– $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{3/2}} \geqslant 0$;

3°.– $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Alors <u>pour tout n dans $\mathbb{N}^*$</u> $\displaystyle n^{\alpha}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ est défini.

Cherchons un équivalent de la suite de terme général $\displaystyle I_n = \int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$.

" $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ alors $\displaystyle I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$?? " montrons cette affirmation hasardeuse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$. Posons $\displaystyle J_n = \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$.

$$J_n - I_n = \int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3}} - \int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} = \int_n^{+\infty}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^3}}{\sqrt{t^3}\times\sqrt{t^3+1}}\,dt = \int_n^{+\infty}\frac{t^3+1-t^3}{\sqrt{t^3}\sqrt{t^3+1}\left(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^3}\right)}\,dt$$

$$J_n - I_n = \int_n^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^3}\sqrt{t^3+1}\left(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^3}\right)}\,dt$$

$\forall t \in [n,+\infty[$, $\sqrt{t^3}\sqrt{t^3+1}\left(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^3}\right) \geqslant \sqrt{t^3}\sqrt{t^3}\left(\sqrt{t^3}+\sqrt{t^3}\right) = 2\,t^3\sqrt{t^3} = 2\,t^{9/2} > 0$.

Alors $\forall t \in [n,+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{t^3}\sqrt{t^3+1}\left(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^3}\right)} \leqslant \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{t^{9/2}}$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{2t^{9/2}}$ converge car $\frac{9}{2}$

Ainsi $\displaystyle 0 \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^3}\sqrt{t^3+1}\left(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^3}\right)}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{9/2}}$. $\displaystyle 0 \leqslant J_n - I_n \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{9/2}}$.

R

Soit $\sigma \in]1,+\infty[$. $\forall A \in [n,+\infty[$, $\displaystyle\int_n^A \frac{dt}{t^\sigma} = \left[\frac{t^{-\sigma+1}}{-\sigma+1}\right]_n^A = \frac{1}{\sigma-1}\left[n^{1-\sigma} - A^{1-\sigma}\right]$.

Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_n^A \frac{dt}{t^\sigma} \underset{1-\sigma<0}{=} \frac{1}{\sigma-1} n^{1-\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}\,\frac{1}{n^{\sigma-1}}$. Donc $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1}\,\frac{1}{n^{\sigma-1}}$.

Alors $\displaystyle J_n = \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}-1}\,\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{2}{n^{1/2}}$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{9/2}} = \frac{1}{\frac{9}{2}-1}\,\frac{1}{n^{\frac{9}{2}-1}} = \frac{2}{7}\times\frac{1}{n^{7/2}}$

Ainsi $\displaystyle 0 \leq J_n - I_n \leq \frac{1}{2}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^{9/2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{n^{7/2}} = \frac{1}{7}\times\frac{1}{n^{7/2}}$.

$J_n > 0$ donc $\displaystyle 0 \leq 1 - \frac{I_n}{J_n} \leq \frac{1}{J_n}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{n^{7/2}} = \frac{n^{1/2}}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{n^{7/2}} = \frac{1}{14}\times\frac{1}{n^3}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{14}\times\frac{1}{n^3}\right) = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{J_n} = 1$.

Ainsi $\displaystyle I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} J_n = \frac{2}{n^{1/2}}$. $\displaystyle\boxed{\int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = n^\alpha \int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$.

$\displaystyle u_n = n^\alpha J_n \sim n^\alpha \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{2}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \geq 0$.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que les séries de termes généraux u_n et $\frac{2}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ sont de même nature.

Or la série de terme général $\frac{2}{n^{1/2-\alpha}}$ converge si et seulement si $\frac{1}{2}-\alpha > 1$ c.à.d. si et seulement si $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Finalement la série de terme général $\displaystyle n^\alpha\int_n^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ converge si et seulement si $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Exercice **S** **ESCP 2002 1.9.**

Classique. À savoir faire.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

Q1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

Q2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

Q3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points b et 1, démontrer que, pour tout réel b de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leqslant b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

Q4. On pose, pour tout entier n non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$ est convergente (utiliser la formule de la question 2 puis un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque n tend vers l'infini.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$. f_n est continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to 0} f_n(t) = 1$ $\uparrow_{\alpha > 0}$.

Alors f_n se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$. $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ converge.

1) $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$

2) $\forall t \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{t^{\alpha n}} \geqslant 0$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$ converge car $\alpha n > 1$ puisque $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $u(t) = t$ et $v(t) = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} = (1+t^\alpha)^{-n}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -n\alpha t^{\alpha-1}(1+t^\alpha)^{-n-1}$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $v'(t) = -n\alpha \dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$. Ceci permet l'intégration par parties qui suit.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A t\left(-n\alpha \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\right)dt.$$

$$\int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^\alpha)^n} + n\alpha\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha+1-1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt.$$

$$\int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^\alpha)^n} + n\alpha\left(\int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} - \int_\varepsilon^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\right).$$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^\alpha)^n} \underset{\alpha>0}{=} 0$. $\displaystyle\frac{A}{(1+A^\alpha)^n} \underset{\substack{A\to+\infty\\ \alpha>0}}{\sim} \frac{A}{A^{\alpha n}} = \frac{1}{A^{\alpha n-1}}$; $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^{\alpha n-1}} = 0$ ($\alpha n > 1$ car $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

Donc en faisant tendre successivement ε vers 0 et A vers $+\infty$ il vient :

$u_n(\alpha) = n\alpha\,(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(\alpha) = k\alpha\,(u_k(\alpha) - u_{k+1}(\alpha))$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1}(\alpha) = \dfrac{k\alpha-1}{k\alpha}\,u_k(\alpha)$.

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} u_{k+1}(\alpha) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k\alpha-1}{k\alpha}\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha)\right)$; $\displaystyle u_n(\alpha)\left(\prod_{k=2}^{n-1} u_k(\alpha)\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k\alpha-1}{k\alpha}\right) u_1(\alpha)\prod_{k=2}^{n-1} u_k$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_i(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^i} \neq 0$ donc $\displaystyle\prod_{k=2}^{n-1} u_k(\alpha) \neq 0$.

Alors $\displaystyle u_n(\alpha) \overset{(*)}{=} \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k\alpha-1}{k\alpha}\right) u_1(\alpha)$. $u_2(\alpha) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\,u_1(\alpha)$ donc $(*)$ vaut pour $n = 2$. Ainsi $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle u_n(\alpha) = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k\alpha-1}{k\alpha}\right) u_1(\alpha)$.

P.

(Q3) a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{n\alpha-1}{n\alpha}\leq 1$ et $u_n(\alpha)\geq 0$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}(\alpha)=\frac{n\alpha-1}{n\alpha}u_n\leq u_n(\alpha)$.

La suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

Donc la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $b\in]0,1[$.

$$u_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}=\int_0^b\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}+\int_b^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

- $\forall t\in]0,b]$, $\frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\leq 1$ donc $\int_0^b\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\int_0^b 1\,dt=b$. car $0\leq b$.

- $\forall t\in[b,1]$, $\frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha>0 \text{ et } n\in\mathbb{N}^*}}{\leq}\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}$ donc $\int_b^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\int_b^1\frac{dt}{(1+b^\alpha)^n}=\frac{1-b}{(1+b^\alpha)^n}\leq\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}$ car $0<b<1$

- Soit $A\in]1,+\infty[$. $\forall t\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\leq\frac{1}{(t^\alpha)^n}=\frac{1}{t^{\alpha n}}$.

Alors $\int_1^A\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\underset{1<A}{\leq}\int_1^A\frac{dt}{t^{\alpha n}}=\int_1^A t^{-\alpha n}dt=\left[\frac{t^{-\alpha n+1}}{-\alpha n+1}\right]_1^A=\frac{A^{1-\alpha n}-1}{-\alpha n+1}=\frac{1-A^{1-\alpha n}}{\alpha n-1}\leq\frac{1}{\alpha n-1}$

$\begin{cases}1-A^{1-\alpha n}\leq 1\\ \text{et}\\ \frac{1}{\alpha n-1}\geq 0\end{cases}$

$$\int_1^A\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\frac{1}{\alpha n-1}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\frac{1}{\alpha n-1}$.

Finalement $\int_0^b\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq b$, $\int_b^1\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq\frac{1}{\alpha n-1}$

Alors en sommant on obtient $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\leq b+\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}+\frac{1}{\alpha n-1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall b\in]0,1[$, $u_n(\alpha)\leq b+\frac{1}{(1+b^\alpha)^n}+\frac{1}{\alpha n-1}$.

R

c) Notons ℓ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$. $\ell\geq 0$ car $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est minorée par 0

Soit $b\in]0,1[$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+b^\alpha)^n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}=0$

$1+b^\alpha>1$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue en b) il vient $\ell\leq b$.

Ainsi $\forall b\in]0,1[$, $0\leq \ell\leq b$ En faisant tendre b vers 0 par valeurs supérieures on obtient $\ell=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\alpha)=0$.

Q4 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)=\ln(u_{n+1}(\alpha))+\dfrac{\ln(n+1)}{\alpha}-\ln(u_n(\alpha))-\dfrac{\ln n}{\alpha}$.

$w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)=\ln\dfrac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}+\dfrac{1}{\alpha}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln\dfrac{n\alpha-1}{n\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)=\ln\left(1-\dfrac{1}{n\alpha}\right)+\dfrac{1}{\alpha}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Rappelons que $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{=}x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Donc $w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)\underset{n\to+\infty}{=}-\dfrac{1}{n\alpha}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n\alpha}\right)^2+\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\right)+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)\underset{n\to+\infty}{=}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\neq 0$ alors

$w_{n+1}(\alpha)-w_n(\alpha)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{n^2}$.

Alors 1) $w_n(\alpha)-w_{n+1}(\alpha)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{n^2}$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{n^2}\geq 0$

3) La série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{n^2}$ converge car $2>1$.

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $w_n(\alpha) - w_{n+1}(\alpha)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -(w_n(\alpha) - w_{n+1}(\alpha))$

donc la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$ converge.

b) Posons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1}(\alpha) - w_k(\alpha))$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $w_n(\alpha) = w_n(\alpha) - w_1(\alpha) + w_1(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1}(\alpha) - w_k(\alpha)) + w_1(\alpha)$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} w_n(\alpha) = S + w_1(\alpha)$. Ainsi la suite $(w_n(\alpha))_{n \geq 1}$ converge.

Notons $L(\alpha)$ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle en $L(\alpha)$ on a :

$\lim_{n \to +\infty} e^{w_n(\alpha)} = e^{L(\alpha)}$. Alors $e^{L(\alpha)} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln n}{\alpha}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(u_n(\alpha) n^{1/\alpha})}$.

Finalement $\lim_{n \to +\infty} (u_n(\alpha) n^{1/\alpha}) = e^{L(\alpha)} \neq 0$. Donc $u_n(\alpha) n^{1/\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{L(\alpha)}$.

Posons $K(\alpha) = e^{L(\alpha)}$. $u_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Il existe donc un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha) \sim \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Remarque.. La série de terme général $u_n(\alpha)$ diverge car la série de terme général $\dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ diverge ($\frac{1}{\alpha} \leq 1$) et est à termes positifs.

et même < 1 !

$K(\alpha) \neq 0$!

R

EXERCICE 30

J.F.C.

Exercice **PC** **ESCP 2011 1.14**

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui converge vers 0.

Soit $A \in \mathbb{R}^+$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx$.

Q1. Établir l'existence de $I_n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$.

Q3. On suppose dans cette question que $A > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(A) = 0$.

Q4. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\left|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = 0$.

Q5. On ne suppose plus que $f(0) = 0$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Q6. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\,e^{-\sqrt{t}}}{1+n^2t^2}\,dt$.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g_n(x) = \dfrac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}$.

$x \mapsto \dfrac{a_n}{a_n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ et f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Par produit g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f|$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$. $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant M$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant |g_n(x)| = \dfrac{a_n}{a_n^2+x^2}|f(x)| \leqslant \dfrac{a_n}{a_n^2+x^2} \times M \leqslant \dfrac{M a_n}{x^2}$.

$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a_n}{a_n^2+x^2} \geqslant 0\\ |f(x)| \leqslant M\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{a_n^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\\ M a_n \geqslant 0\end{array}\right.$

1) $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant |g_n(x)| \leqslant \dfrac{M a_n}{x^2}$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M a_n}{x^2}$ dx converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g_n(x)|\,dx$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\,dx$ est absolument convergente donc converge.

Comme g_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int_A^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge pour tout $A \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout A dans $\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx$ converge.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$0 \in \mathbb{R}^+$ et $t \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et bornée donc Q1 montre que $\int_0^{+\infty} \frac{a_n \times 1}{a_n^2+x^2}\,dx$ converge. $\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$ converge ... ce que nous allons retrouver au cours du calc

Soit $B \in \mathbb{R}^{+*}$. $\int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx \underset{a_n \neq 0}{=} \int_0^B \frac{\frac{1}{a_n}}{\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+1}\,dx = \left[\arctan \frac{x}{a_n}\right]_0^B = \arctan \frac{B}{a_n}$.

Alors $\lim_{B \to +\infty} \int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \arctan \frac{B}{a_n} \underset{a_n>0}{=} \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Q3 Soit A un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $B \in [A, +\infty[$.

$A \leq B$ donc : $\left|\int_A^B \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\right| \leq \int_A^B \left|\frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\right| dx = \int_A^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2}|f(x)|\,dx \leq M \int_A^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$

$\left|\int_A^B \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\right| \leq M \int_A^B \frac{\frac{1}{a_n}}{\left(\frac{x}{a_n}\right)^2+1}\,dx = M\left[\arctan \frac{x}{a_n}\right]_A^B = M\left[\arctan \frac{B}{a_n} - \arctan \frac{A}{a_n}\right]$.

En faisant tendre B vers $+\infty$ il vient :

$0 \leq |I_n(A)| \leq M\left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{A}{a_n}\right]$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(M\left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{A}{a_n}\right]\right) = M\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{A}{a_n} = +\infty$ puisque :

$A > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Alors par encadrement $\lim_{n\to+\infty} I_n(A) = 0$ et ceci pour tout A dans $]0, +\infty[$.

Q4 Ici $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $B \in \mathbb{R}_+^*$. $|f|$ est continue sur le segment $[0, B]$ donc $\max_{t\in[0,B]} |f(t)|$ existe.

$\left|\int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\,dx\right| \leq \int_0^B \left|\frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\right| dx = \int_0^B \left|\frac{a_n}{a_n^2+x^2}\right| |f(x)|\,dx \leq \max_{t\in[0,B]} |f(t)| \int_0^B \left|\frac{a_n}{a_n^2+x^2}\right| dx$

$$\left|\int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\,dx\right| \underset{\uparrow}{\leqslant} \max_{t\in[0,B]} |f(t)| \int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx \underset{\uparrow}{\leqslant} \max_{t\in[0,B]} |f(t)| \int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\max_{t\in[0,B]}|f(t)|$$

$\frac{a_n}{a_n^2+x^2} \geqslant 0$

$\max_{t\in[0,B]}|f(t)| \geqslant 0$

$\forall x\in[0,+\infty[,\ \frac{a_n}{a_n^2+x^2}\geqslant 0$ et $\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$ converge.

$$\forall B\in\mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_0^B \frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\max_{t\in[0,B]}|f(t)|.$$

f est continue en 0 et $f(0)=0$.

Alors $\exists \eta\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ |t|<\eta \Rightarrow |f(t)|=|f(t)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$ car $\frac{\varepsilon}{\pi}\in\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t\in[0,\eta[,\ |f(t)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$. Soit A un élément de $]0,\eta[$.

$A\in\mathbb{R}_+^*$. De plus $\forall t\in[0,A],\ |f(t)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$ donc $\max_{t\in[0,A]}|f(t)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$.

Ainsi $\left|\int_0^A \frac{a_n}{a_n^2+x^2}f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\max_{t\in[0,A]}|f(t)| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{\pi}=\frac{\varepsilon}{2}$.

↑ et même <...

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists A\in\mathbb{R}_+^*,\ \left|\int_0^A \frac{a_n}{a_n^2+x^2} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Montrons alors en utilisant la définition que $\lim_{n\to+\infty} I_n(0)=0$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Choisissons A dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|\int_0^A \frac{a_n}{a_n^2+x^2}f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ (ceci est possible d'après ce qui précède).

$$|I_n(0)|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\right| = \left|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx + \underbrace{\int_A^{+\infty}\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx}_{I_n(A)}\right| \leqslant \left|\int_0^A\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\right| + |I_n(A)|$$

$|I_n(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |I_n(A)|$.

Or $\lim_{n\to+\infty} I_n(A)=0$ car $A>0$. Donc $\exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \Rightarrow |I_n(A)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \Rightarrow |I_n(0)|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+|I_n(A)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Finalement : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant p \Rightarrow |I_n(0)|<\varepsilon$. Alors $\lim_{n\to+\infty} I_n(0)=0$

Si $f(0)=0$: $\lim_{n\to+\infty} I_n(0)=0$.

Q5 Posons $h = f - f(0)$.

h est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. De plus $h(0)=0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}h(x)\,dx$

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n(0)-\frac{\pi}{2}f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}f(x)-f(0)\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}(f(x)-f(0))\,dx.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n(0)-\frac{\pi}{2}f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}h(x)\,dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{a_n^2}{a_n^2+x^2}h(x)\,dx=0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(I_n(0)-\frac{\pi}{2}f(0)\right)=0$. Alors $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(0)=\frac{\pi}{2}f(0)}$.

Ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}f(0)$.

<u>Remarque</u>.. Rappelons que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(A)=0$ si $A\in\mathbb{R}_+^*$.

Alors si $f(0)\neq0$ $\lim\limits_{A\to0^+}\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(A)=0\neq\frac{\pi}{2}f(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{A\to0^+}I_n(A)$!!

Q6 Posons $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ f(t)=e^{-\sqrt{t}}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{1}{n+1}$.

1) f est continue sur $\mathbb{R}^+$;

2) $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ 0\leq f(t)\leq 1$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}^+$;

3) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$;

4) $f(0)=1$.

Ce qui précède montre alors que la suite de terme général $I_n(0)=\int_0^{+\infty}\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx$

converge vers $\frac{\pi}{2}\times1$ donc vers $\frac{\pi}{2}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}+x^2}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{(n+1)\,e^{-\sqrt{x}}}{1+(n+1)^2x^2}\,dx=U_{n+1}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=\frac{\pi}{2}$. Alors $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{\pi}{2}}$. Ceci donne : $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\,e^{-\sqrt{t}}}{1+n^2t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}}$

R,

EXERCICE 31

Exercice **S** **ESCP 2010 1.12.**

Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Q1. Montrer que la série de terme général u_p converge. Soit γ sa somme. Montrer que $\gamma \in [0, 1]$.

Q2. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $t \in [0, n]$, on a : $\left(1 - \dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite. ← On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in [0,1], 1-(1-z)^n \leqslant nz$

Q3. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de J_n.

b) Établir, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\left(\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n} u_p\right)$

En déduire que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a : $J_n = \ln(n+1) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p$.

Q4. On pose : $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ et $V = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de U et de V.

b) Démontrer que $U - V = \gamma$.

Thème abordé dans LYON 1990 Pb 2, LYON 2002 Pb 1, oral ESCP 2012 1.7.

Q1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

En intégrant il vient $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}$ car $p \leqslant p+1$.

Alors $-\dfrac{1}{p} \leqslant -\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1}$; $0 \leqslant u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

$0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p(p+1)} \leqslant \dfrac{1}{p^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{p^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_p converge.

Posons $\gamma = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} u_p$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant 1$. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. $\gamma \in [0,1]$.

R

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $f_n : t\mapsto \frac{1}{t}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]$ est continue sur $]0,1]$.

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{t\to 0}{=} 1+(-t)+(-t)^2/2-\left(1+n\left(-\frac{t}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\left(-\frac{t}{n}\right)^2\right)+o(t^2).$$

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{t\to 0}{=} 1-t+\frac{t^2}{2}-1+t-\frac{n(n-1)}{2}\frac{t^2}{n^2}+o(t^2).$$

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{t\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}-\frac{n(n-1)}{2n^2}\right)t^2+o(t^2) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2n}t^2+o(t^2).$$

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2n}t^2;\quad f_n(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2n}t;\quad \lim_{t\to 0} f_n(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2n}t\right)=0.$$

Alors f_n est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. Par conséquent $\int_0^1 f_n(t)dt$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt$ converge.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Rappelons que $\forall u\in]0,+\infty[$, $\ln u\leq u-1$. Soit $t\in[0,n]$.

Si $t=n$: $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}=0\leq 0=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$.

donc si $t=n$ on a bien $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$. Supposons que $t\in[0,n[$;

$1-\frac{t}{n}\in]0,+\infty[$ et $1+\frac{t}{n}\in]0,+\infty[$ donc $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq 1-\frac{t}{n}-1=-\frac{t}{n}$ et

$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\leq 1+\frac{t}{n}-1=\frac{t}{n}$. Donc $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq -t$ et $n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\leq t$.

Alors $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq -t$ et $\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq t$. La fonction exponentielle étant croissante

il vient : $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$ et $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{t}$. $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$ et $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\leq 1$.

En multipliant la dernière inégalité par $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ qui est positif on obtient

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}.$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,n],\quad \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}.$$

R

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[0,n]$, $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

Alors $\forall t\in[0,n]$, $0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$.

Soit $z\in[0,1]$. Supposons $n\geq 2$. $1-(1-z)^n=\left(1-(1-z)\right)\sum_{k=1}^{n-1}(1-z)^k = z\sum_{k=0}^{n-1}(1-z)^k \leq nz$

Si $n\geq 2$: $1-(1-z)^n\leq nz$. Si $n=1$: $1-(1-z)^n = z\leq 1\times z = nz$.

$\left\{\begin{array}{l} z\in[0,1] \\ (1-z)^k\leq 1\end{array}\right.$

Finalement $\forall z\in[0,1]$, $1-(1-z)^n\leq nz$. (*)

Or $\forall t\in[0,n]$, $\frac{t^2}{n^2}\in[0,1]$.

Ainsi $\forall t\in[0,n]$, $0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)\leq e^{-t}\times n\times\frac{t^2}{n^2}=e^{-t}\frac{t^2}{n}$.

Donc $\forall t\in]0,n]$, $0\leq\frac{1}{t}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\leq e^{-t}\frac{t}{n}$. En intégrant entre 0 et n

il vient $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t\,dt$. Or $t\mapsto e^{-t}t$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$\int_0^{+\infty}e^{-t}t\,dt$ converge et vaut $\Gamma(2)$ donc 1.

Alors $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t\,dt\leq\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-t}t\,dt=\frac{1}{n}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq I_n\leq\frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Alors, par encadrement on peut dire que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Q3 a) $g_n : t\mapsto\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall t\in]0,n]$, $0\leq g_n(t)=\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\leq\frac{1}{t}\times n\times\frac{t}{n}=1$.

$1-\frac{t}{n}\in[0,1[$ (*)

$\forall t\in]0,n]$, $0\leq g_n(t)\leq 1$ et $\int_0^n 1\,dt$ existe. Alors $\int_0^n g_n(t)\,dt$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $J_n=\int_0^n\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt$ existe.

Remarque .. Il était aussi simple de montrer que $\lim_{t\to 0}g_n(t)=1$ en utilisant

$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{t\to 0}{=} 1+n\times\left(-\frac{t}{n}\right)+o(t)$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{n}{k+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k+1}=n\sum_{p=1}^{n}$

Or $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}u_p=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\right)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\left[\ln t\right]_1^{n+1}$.

$\displaystyle\sum_{p=1}^{n}u_p=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln(n+1)$; $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=\sum_{p=1}^{n}u_p+\ln(n+1)$. Alors :

$\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt=n\left(\ln(n+1)+\sum_{p=1}^{n}u_p\right)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\forall t\in\,]0,n],\ \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)=\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k$

$\displaystyle\forall t\in\,]0,n],\ \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k$. En intégrant entre 0 et n il vient

$\displaystyle J_n=\int_0^n\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt=\frac{1}{n}\times n\left(\ln(n+1)+\sum_{p=1}^{n}u_p\right)$.

Ainsi $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_n=\ln(n+1)+\sum_{p=1}^{n}u_p$.

Q4 a) $u:t\mapsto\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $u(t)\underset{t\to0}{\sim}-\dfrac{e^{-t}-1}{t}\underset{t\to0}{\sim}-\dfrac{-t}{t}=1$.

$\lim_{t\to0}u(t)=1$. u se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\int_0^1 u(t)\,dt$ converg

$v:t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall t\in[1,+\infty[$, $0\leq v(t)=\dfrac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty}e^{-t}dt$ converge car $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ con

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty}v(t)\,dt$ converge.

Ainsi $U=\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ et $V=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ existent.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$J_n - I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - e^{-t} + \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]dt = \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t}dt = U + \int_1^n \frac{1-e^{-t}}{t}dt.$$

$$J_n - I_n = U + \int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt = U + [\ln t]_1^n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Alors $\ln(n+1) + \sum_{p=1}^n u_p - I_n = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt + \ln n$. car $J_n = \ln(n+1) + \sum_{p=1}^n u_p$.

$$\sum_{p=1}^n u_p = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt + I_n - (\ln(n+1) - \ln n) = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt + I_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\gamma = U - V + 0 - \ln 1 = U - V$.

Donc $\underline{\underline{U - V = \gamma}}$ ou $\underline{\underline{\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \gamma}}$.

R

EXERCICE 32

Exercice PC

Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t^n)\,dt$.

On se propose de montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est définie et d'en trouver un équivalent.

Q1. Montrer que si t est un réel positif ou nul : $0\leqslant 1-\cos t\leqslant 2$ et $0\leqslant 1-\cos t\leqslant \dfrac{t^2}{2}\cdot$

Q2. n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Montrer que $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{\frac{1}{n}-2}\,dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{-2}\,dt$ convergent.

Montrer que $|J-J_n|\leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1(1-t^{1/n})\,dt+2\int_1^{+\infty}(t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt$.

On rappel que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n=\frac{\pi}{2}\cdot$

Q3. a) Montrer que : $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ J_n=\dfrac{n}{n-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{(1/n)-1}\sin u\,du$.

b) Conclure l'exercice.

(Q1) Soit $t\in\mathbb{R}^+$. $-1\leqslant -\cos t\leqslant 1$ donc $0\leqslant 1-\cos t\leqslant 2$.

$\forall u\in\mathbb{R}^+$, $\cos u\leqslant 1$ donc $\forall v\in\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^v \cos u\,du\leqslant\int_0^v 1\,du$.

Alors $\forall v\in\mathbb{R}^+$, $[\sin u]_0^v\leqslant[u]_0^v$; $\forall v\in\mathbb{R}^+$, $\sin v\leqslant v$.

Comme $t\geqslant 0$ $\displaystyle\int_0^t\sin v\,dv\leqslant\int_0^t v\,dv$; $[-\cos v]_0^t\leqslant\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^t$.

$-\cos t+1\leqslant\dfrac{t^2}{2}$. Alors $0\leqslant 1-\cos t\leqslant\dfrac{t^2}{2}$.

$\forall t\in\mathbb{R}^+$, $0\leqslant 1-\cos t\leqslant 2$ et $0\leqslant 1-\cos t\leqslant\dfrac{t^2}{2}$.

(Q2) Pour gagner du temps nous allons montrer que pour tout réel α dans $[0,1[$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{\alpha-2}\,dt$ converge. Ne restera plus qu'à utiliser le résultat pour $\alpha=\frac{1}{n}$ et $\alpha=0$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}^+$. $f_\alpha : t\mapsto(1-\cos t)\,t^{\alpha-2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1) $\forall t\in]0,1]$, $0\leqslant f_\alpha(t)\leqslant\dfrac{t^2}{2}\times t^{\alpha-2}=\dfrac{t^\alpha}{2}$.

2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}t^\alpha\,dt=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{dt}{t^{-\alpha}}$ converge car $-\alpha<1$ puisque $\alpha\in[0,1[$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent a la convergence de $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

α) $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq f_\alpha(t) = (1-\cos t)\, t^{\alpha-2} \leq 2\, t^{\alpha-2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}}$.

et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^{2-\alpha}}\,dt$ converge car $2-\alpha > 1$ $(\alpha \in [0,1[)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Finalement $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge.

Ainsi pour tout réel α appartenant à $[0,1[$, $\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\, t^{\alpha-2}\,dt$ converge.

En particulier $\underline{\underline{J_n = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2}\,dt \text{ converge}}}$ car $n \in [\![2,+\infty[\![$ et

$\underline{\underline{J = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)\, t^{-2}\,dt \text{ converge}}}$.

Soit ε et A deux réels tels que : $0 < \varepsilon \leq 1 \leq A$.

$$\underbrace{\left|\int_\varepsilon^A (1-\cos t)\left[t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right]dt\right|}_{T_{\varepsilon,A}} = \left|\int_\varepsilon^1 (1-\cos t)\left[t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right]dt + \int_1^A (1-\cos t)\left[t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right]dt\right|$$

$$|T_{\varepsilon,A}| \leq \left|\int_\varepsilon^1 (1-\cos t)\left[t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right]dt\right| + \left|\int_1^A (1-\cos t)\left[t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right]dt\right|$$

$$|T_{\varepsilon,A}| \underset{\substack{\varepsilon<1\\ A>1}}{\leq} \int_\varepsilon^1 |1-\cos t|\,\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right|dt + \int_1^A |1-\cos t|\,\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right|dt.$$

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|1-\cos t| = 1-\cos t \leq \frac{t^2}{2}$, $|1-\cos t| = 1-\cos t \leq 2$ et $\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right| \geq$

Alors $|T_{\varepsilon,A}| \leq \int_\varepsilon^1 \frac{t^2}{2}\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right|dt + \int_1^A 2\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right|dt$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $\left|t^{-2} - t^{\frac{1}{n}-2}\right| = |t^{-2}|\,\left|1 - t^{\frac{1}{n}}\right| = t^{-2}\left|1 - e^{\frac{1}{n}\ln t}\right| = \begin{cases} t^{-2}\left[1 - e^{\frac{1}{n}\ln t}\right] \text{ si } t \\ t^{-2}\left[e^{\frac{1}{n}\ln t} - 1\right] \text{ si } t \geq \end{cases}$

$\forall t \in]0,+\infty[, \ |t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2}| = \begin{cases} t^{-2}(1-t^{\frac{1}{n}}) \text{ si } t \leq 1 \\ t^{-2}(t^{\frac{1}{n}}-1) \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$.

$\forall t \in]0,+\infty[\ |t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2}| = \begin{cases} t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2} \text{ si } t \leq 1 \\ t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$.

Alors $|T_{\varepsilon,A}| \leq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 t^2(t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2})\,dt + 2\int_1^A (t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt$.

Alors $\left|\int_\varepsilon^A (1-\cos t)[t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2}]\,dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 (1-t^{1/n})\,dt + 2\int_1^A (t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt$ $(*)$.

$t \mapsto 1-t^{1/n}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\underline{\int_0^1 (1-t^{1/n})\,dt \text{ existe}}$.

$\forall t \in [1,+\infty[, \ t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2} = \frac{1}{t^{2-\frac{1}{n}}} - \frac{1}{t^2}$. De plus $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2-\frac{1}{n}}}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ convergent

car $2-\frac{1}{n} > 1$ $(n \geq 2)$ et $2 > 1$.

Alors $\underline{\int_1^{+\infty}(t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt \text{ converge}}$.

J et J_n existe et $J-J_n = \int_0^{+\infty}(1-\cos t)(t^{-2}-t^{\frac{1}{n}-2})\,dt$.

Nous pouvons alors faire tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$ dans $(*)$

cela donne : $\underline{\underline{|J-J_n| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t^{1/n})\,dt + 2\int_1^{+\infty}(t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt}}$.

$\int_0^1 (1-t^{1/n})\,dt = \left[t - \frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{n}+1} = 1-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Soit $A \in [1,+\infty[$. $\int_1^A (t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{\frac{1}{n}-1} - \frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^A = \frac{n}{1-n}A^{\frac{1}{n}-1} - \frac{A^{-1}}{-1} - \frac{n}{1-n} + \frac{1^{-1}}{-1}$.

$\int_1^A (t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt = \frac{n}{1-n}\,\frac{1}{A^{1-\frac{1}{n}}} + \frac{1}{A} + \frac{n}{n-1} - 1$.

Ainsi $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A (t^{\frac{1}{n}-2}-t^{-2})\,dt = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$ car $1-\frac{1}{n} > 0$ $(n \geq 2)$

Alors $|J-J_n| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + 2\frac{1}{n-1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+2\frac{1}{n-1}\right)=0$.

Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = J$.

Ici encore nous aurions pu gagner du temps en anticipant sur Q3 a en faisant une intégration par parties sur $\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{\alpha-2}dt$ avec $\alpha\in[0,1$

Posons $\forall t\in]0,+\infty[$, $u(t)=1-\cos t$ et $v(t)=-t^{-1}$

u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[$, $u'(t)=+\sin t$ et $v'(t)=-t^{-1}$.

ceci autorise l'intégration par parties suivante.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A(1-\cos t)\,t^{-2}dt = \left[(1-\cos t)(-t^{-1})\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \sin t\,(-t^{-1})\,dt = -\frac{1-\cos A}{A}+\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^A\frac{\sin t}{t}$$

$0\leqslant\frac{1-\cos A}{A}\leqslant\frac{2}{A}$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{2}{A}=0$. Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1-\cos A}{A}=0$.

$0\leqslant\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\leqslant\frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2}$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon}{2}=0$. Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}=0$.

De plus $\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{-2}dt$ converge et vaut J, et $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

En faisant tendre successivement ε vers 0 par valeurs supérieures et A vers $+\infty$ il vient :

$$J=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,t^{-2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}. \qquad J=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\frac{\pi}{2}$.

Q3 Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$

a) Posons $\forall t\in]0,+\infty[$, $u(t)=1-\cos t$ et $w(t)=\frac{1}{\frac{1}{n}-1}t^{\frac{1}{n}-1}=-\frac{n}{n-1}t^{\frac{1}{n}-1}$.

u et w sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus $\forall t\in]0,+\infty[$, $u'(t)=\sin t$ et $w'(t)=t^{\frac{1}{n}-2}$.

ceci justifie l'intégration par parties qui suit. Soit $x\in]0,+\infty[$.

$$*\ \int_{2\pi}^x(1-\cos t)\,t^{\frac{1}{n}-2}dt=\left[(1-\cos t)\left(-\frac{n}{n-1}t^{\frac{1}{n}-1}\right)\right]_{2\pi}^x-\int_{2\pi}^x\sin t\left(-\frac{n}{n-1}t^{\frac{1}{n}-1}\right)dt.$$

$$\int_{2\pi}^x(1-\cos t)\,t^{\frac{1}{n}-2}dt=-\frac{n}{n-1}(1-\cos x)\,x^{\frac{1}{n}-1}+\frac{n}{n-1}\int_{2\pi}^x\sin t\;t^{\frac{1}{n}-1}dt \quad (1).$$ On a aussi :

Ici nous procédons en 2 temps car nous n'avons pas montré l'existence de $\int_0^{+\infty}\sin t\;t^{\frac{1}{n}-1}dt$.

$$\int_x^{2\pi} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2} dt = \frac{n}{n-1}(1-\cos x)\, x^{\frac{1}{n}-1} + \frac{n}{n-1}\int_x^{2\pi} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt \quad (2).$$

- $0 \leq (1-\cos x)\, x^{\frac{1}{n}-1} \leq \frac{2}{x^{1-\frac{1}{n}}}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^{1-\frac{1}{n}}} = 0$ $\uparrow_{1-\frac{1}{n}>0}$ donc $\lim_{x\to+\infty}(1-\cos x)\, x^{\frac{1}{n}-1} = 0$

Ajoutons que $\int_{2\pi}^{+\infty}(1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2} dt$ converge. (1) permet alors de dire que :

Alors 1° $\int_{2\pi}^{+\infty} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt$ converge $\left(\frac{n}{n-1} \neq 0 !\right)$;

2° $\int_{2\pi}^{+\infty} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2} dt = \frac{n}{n-1}\int_{2\pi}^{+\infty} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt$.

- $0 \leq (1-\cos x)\, x^{\frac{1}{n}-1} \leq \frac{x^2}{2} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{n}+1}$ et $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{n}+1}\right) = 0$.

Ajoutons que $\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2} dt$ converge. (2) permet alors de dire que :

1° $\int_0^{2\pi} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt$ converge $\left(\frac{n}{n-1} \neq 0 !\right)$;

2° $\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2} dt = \frac{n}{n-1}\int_0^{2\pi} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt$.

En regroupant les deux résultats on peut dire que :

$\int_0^{+\infty} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt$ converge et $J_n = \frac{n}{n-1}\int_0^{+\infty} \sin t\; t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{n}{n-1}\int_0^{+\infty} \sin u\; u^{\frac{1}{n}-1} du$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

b) 1° Posons $\forall u \in]0, +\infty[$, $\varphi(u) = u^{\frac{1}{n}}$.

φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, $\forall u \in]0,+\infty[$, $\varphi'(u) = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} > 0$, $\lim_{u\to 0^+} \varphi(u) = 0$

et $\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$.

Alors φ définit une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Nous pouvons alors faire le changement de variable $t = u^{\frac{1}{n}}$ dans $\int_0^{+\infty} \sin u \; u^{\frac{1}{n}-1} d$

et dire que 1) $\int_0^{+\infty} \sin t^n n \, dt$ converge ;

2) $\int_0^{+\infty} \sin u \; u^{\frac{1}{n}-1} du = \int_0^{+\infty} \sin t^n n \, dt$

Alors $\int_0^{+\infty} \sin t^n dt$ converge et $\int_0^{+\infty} \sin t^n dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \sin u \; u^{\frac{1}{n}-1} du.$

Ainsi I_n existe et $I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \sin u \; u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} J_n$

$\frac{n-1}{n} \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} 1$ et $J_n \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{n \mapsto +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \neq 0$.

Ainsi $I_n \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}$.

$(I_n)_{n \geqslant 2}$ est définie et $I_n \underset{n \mapsto +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$.