R

EXERCICE 33

Exercice **PC**

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $u_n = \sqrt{2n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$

Q0. Montrer que u_n existe.

Q1. Montrer que $f_n : x \to x - n\ln(1+x/n)$ et $g_n : x \to n\ln(1+x/n) - \ln(1+x)$ sont monotones de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Q2. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,dt$.

Montrer que si x est positif :

$$0 \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} - e^{-x^2/2} \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} f_n(x^2/2).$$

Q3. A est réel positif.

a) Montrer que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \leqslant 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,dt + f_n(A^2/2)\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,dt.$

b) En déduire que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \leqslant 2\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^2/2}\,dt + 2Af_n(A^2/2)$.

Q4. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Q0 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $h_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1) $h_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$;

2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{2n}} \geqslant 0$;

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$ est convergente car $2n > 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_n(t)\,dt$. et même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$.

Comme h_n est paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_n(t)\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt$ converge. De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt$.

Par conséquent $u_n = \sqrt{2n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ existe et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1 f_n et g_n sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = 1 - n \times \dfrac{1/n}{1+x/n}$ et $g_n'(x) = n\,\dfrac{1/n}{1+x/n} - \dfrac{1}{1+x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x+n} = \dfrac{x}{x+n} \geqslant 0$. f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $f_n(0) = 0$ donc f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

<u>f_n est une application croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g_n'(x) = \dfrac{n}{x+n} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{n+nx-x-n}{(x+n)(1+x)} = \dfrac{(n-1)x}{(x+n)(1+x)} \underset{n\geqslant 1}{\geqslant} 0$. g_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$g_n(0) = 0$ donc g_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

<u>g_n est une application croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.</u>

Q2 $\quad u_n = \sqrt{\ln}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = 2\sqrt{\ln}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$. $t \mapsto \sqrt{\ln}\, t$ est de classe C^1

sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u = \sqrt{\ln}\, t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in [0, +\infty[$, $\quad 2\sqrt{\ln}\displaystyle\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{u=\sqrt{\ln}\,t}{=} 2\int_0^{\sqrt{\ln}\,A}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ converge et que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(\sqrt{\ln}\,A) = +\infty$, on doit pouvoir dire que

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$ converge et que $2\sqrt{\ln}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n} = 2\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$.

Comme $u \mapsto \dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$ est paire sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n}$.

Donc $u_n = 2\sqrt{\ln}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n} = 2\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{\ln}\right)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{\ln}\right)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{t^2}{\ln}\right)}\,dt$

$\longrightarrow$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt$ converge et $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $z = \frac{x^2}{2}$. $z \in \mathbb{R}^+$ donc $f_n(z) \in \mathbb{R}^+$.

Il est de notoriété publique que $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u \geqslant 1+u$.

Donc $\forall u \in \mathbb{R},\ e^{-u} \geqslant 1-u$. $\forall u \in \mathbb{R}^+,\ u \geqslant 1-e^{-u} \geqslant 0$. $\forall u \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant 1-e^{-u} \leqslant u$.

Comme $f_n(z) \in \mathbb{R}^+$: $0 \leqslant 1-e^{-f_n(z)} \leqslant f_n(z)$ et $e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} \geqslant 0$.

Alors $0 \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} - e^{-f_n(z)-n\ln(1+\frac{z}{n})} \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} f_n(z)$.

Donc $0 \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} - e^{-z} \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} f_n(z)$. Comme $z = \frac{x^2}{2}$:

$0 \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{x^2}{2n})} - e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{x^2}{2n})} f_n\left(\frac{x^2}{2}\right)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}^+$

Q3 Soit $A \in \mathbb{R}^+$

a) Le ~~cours~~ de probabilité montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

$t \mapsto e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}$ et $t \mapsto e^{-t^2/2}$ sont paires sur $\mathbb{R}$

$$u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt - 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

$$u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 2\int_0^A \left(e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} - e^{-t^2/2}\right)dt + 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt - 2\int_A^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

En utilisant Q2 et la croissance de f_n on peut dire que

$\frac{t^2}{2} \leqslant \frac{A^2}{2}$ et $e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} \geqslant 0$

$\forall t \in [0,A]$, $e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} - e^{-t^2/2} \leqslant e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} f_n\left(\frac{t^2}{2}\right) \leqslant f_n\left(\frac{A^2}{2}\right) e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}$.

En intégrant il vient $\int_0^A \left(e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} - e^{-t^2/2}\right)dt \leqslant f_n\left(\frac{A^2}{2}\right) \int_0^A e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}\,dt$.

Alors $u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2 f_n\left(\frac{A^2}{2}\right)\int_0^A e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt + 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt - \underbrace{2\int_A^{+\infty} e^{-t^2/2}dt}_{\geq 0}.$

donc $u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2 f_n\left(\frac{A^2}{2}\right)\int_0^A e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt + 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt.$

Par parité ceci donne :

$u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt + f_n\left(\frac{A^2}{2}\right)\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt$ ... pour tout $A \in \mathbb{R}^+$.

---

b) Soit $A \in \mathbb{R}^+$. $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq g_n(z) = n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - \ln(1+z)$.

$\forall z \in \mathbb{R}^+$, $-n\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) \leq -\ln(1+z)$. or exp est croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$\forall z \in \mathbb{R}^+$, $e^{-n\ln(1+\frac{z}{n})} \leq e^{-\ln(1+z)} = \frac{1}{1+z}$. or $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{t^2}{2} \in \mathbb{R}^+$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} \leq \frac{1}{1+t^2/2}$ (*).

i) $\frac{1}{1+t^2/2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2/2} = \frac{2}{t^2}$;

ii). $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{2}{t^2} \geq 0$;

iii) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2/2}$. $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2/2}$ converge également.

(*) permet alors de dire que $\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt \leq \int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2/2}$.

Alors $u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2/2} + f_n(A^2/2)\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})}dt.$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $-n\ln\left(1+\frac{t^2}{2n}\right) \leq 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{2n})} \leq 1$.

Alors $\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})}\,dt \leq \int_{-A}^{A} 1\,dt = 2A$ car $-A \leq A$. Comme $f_n(A^2/2) \geq 0$,

$$f_n(A^2/2)\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})}\,dt \leq 2A f_n(A^2/2).$$

Ainsi $u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2} + 2A f_n(A^2/2)$ pour tout $A \in \mathbb{R}^+$

---

récap : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \overset{Q2}{\leq} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})} - e^{-t^2/2}$. Par parité :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})} - e^{-t^2/2}$.

Donc $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$ car ces deux intégrales convergent.

Ainsi $0 \leq u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$.

Alors $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq u_n - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq 2\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2} + 2A f_n(A^2/2)$.

---

ou : $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq u_n - \sqrt{2\pi} \leq 2\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2} + 2A f_n(A^2/2)$.

Q4 Montrons en utilisant la définition que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2\pi}$.

<u>Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$</u>. $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2} = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

$\exists A_0 \in \mathbb{R}^+$, $\forall A \in [A_0, +\infty[$, $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2} = \left|\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2/2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n - \sqrt{2\pi} < \frac{\varepsilon}{2} + 2A_0 f_n(A_0^2/2)$ (ce qui précède vaut en particulier pour $A = A_0$).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \sqrt{2\pi}| < \frac{\varepsilon}{2} + 2A_0 f_n(A_0^2/2)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} = x$.

Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$. Ainsi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(x - n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(2A_0\, f_n(A_0^2/2)\right) = 0$.

$\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant p \Rightarrow 2A_0\, f_n(A_0^2/2) = \left|2A_0\, f_n(A_0^2/2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant p \Rightarrow |u_n - \sqrt{2\pi}| < \frac{\varepsilon}{2} + 2A_0\, f_n(A_0^2/2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - \sqrt{2\pi}| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \sqrt{2\pi}$. Or $\sqrt{2\pi} \neq 0$. Donc $u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$.

Donc $\sqrt{2n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Par parité $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Exercice **Calcul de l'intégrale de Gauss.**

On se propose de montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$!!

Q1 a) Montrer que la fonction $F: x \to \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $G: x \to \int_1^x e^{-t^2}\,dt$ est majorée sur $[1, +\infty[$ par $\frac{1}{e}$ (remarquer que $t \leqslant t^2$ si...).

En déduire que F est majorée sur $[1, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que F admet une limite finie L en $+\infty$ (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

Nous allons montrer que $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Q2 $u : x \to \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$. Soit x dans $\mathbb{R}$; on se propose de montrer que u est dérivable en x.

a) Montrer que pour s dans [-2,2], $|e^s - 1 - s| \leqslant \frac{s^2}{2}\,e^2$.

b) h est un réel non nul de l'intervalle $[-1, 1]$. On pose :

$$\Delta(h) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \left(-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt\right).$$

Montrer que $|\Delta(h)| \leqslant \frac{|h|}{2} e^2 \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)\,dt$.

En déduire que u est dérivable en x et que $u'(x) = \int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\,dt$

Q3 Calculer $u(0)$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ (on pourra encadrer $1 + t^2$).

Q4 $v : x \to u(x^2)$ et $w : x \to \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$

a) Montrer que $v + w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En utilisant un changement de variable montrer que cette dérivée est nulle.

b) En déduire que : $v(x) + w(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel x.

c) Montrer que : $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ainsi : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

d) Déduire du résultat précédent $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Q1) a) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$.

F est la primitive de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 à 0.

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{-x^2} > 0$.

<u>F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</u>

b) Soit x un élément de $[1, +\infty[$.

$\forall t \in [1, x]$, $t \leq t^2$; $\forall t \in [1, x]$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

Alors $G(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \underset{1 \leq x}{\leq} \int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = \frac{1}{e} - e^{-x} \leq \frac{1}{e}$.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $G(x) \leq \frac{1}{e}$. <u>G est majorée par $\frac{1}{e}$ sur $[1, +\infty[$.</u>

$\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt = F(0) + G(x) \leq F(0) + \frac{1}{e}$.

<u>F est majorée par $F(0) + \frac{1}{e}$ sur $[1, +\infty[$.</u>

F étant croissante sur $\mathbb{R}$, <u>F est encore majorée par $F(0) + \frac{1}{e}$ sur $[0, +\infty[$ et même sur $\mathbb{R}$.</u>

c) 1°.. F est croissante sur $[1, +\infty[$

2°.. F est majorée sur $[1, +\infty[$

le théorème de la limite monotone montre alors que <u>F admet une limite finie L à $+\infty$.</u>

Q2) a) $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe C^2 sur $[-2, 2]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$$\forall \lambda \in [-2, 2], \ |\varphi(\lambda) - \varphi(0) - (\lambda - 0)\varphi'(0)| \leq \frac{|\lambda - 0|^2}{2!} \max_{u \in \overleftrightarrow{[0, \lambda]}} |\varphi''(u)|.$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi''(t) = \varphi'(t) = \varphi(t) = e^t$. Alors :

$$\forall \lambda \in [-2, 2], \ |e^{\lambda} - 1 - \lambda| \leq \frac{\lambda^2}{2} \max_{u \in \overleftrightarrow{[0, \lambda]}} e^u$$

Notons que $\forall s \in [-2,2]$, $\max\limits_{t\in\overleftrightarrow{[0,s]}} e^t \leq \max\limits_{t\in[-2,2]} e^t = e^2$, ce qui donne donc :

$\overleftrightarrow{[0,s]} \subset [-2,2]$

$\underline{\underline{\forall s\in[-2,2],\ |e^s-1-s| \leq \frac{s^2}{2}e^2.}}$

$\underline{b)}$ $\Delta(h) = \frac{1}{h}\left[\int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt + h\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right].$

$$\Delta(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left[e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right]dt.$$

$$|\Delta(h)| \leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 \left(\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right|\left|e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)\right|\right)dt.$$

Soit $t\in[0,1]$. $|-h(1+t^2)| = |h|(1+t^2) \leq 2|h| \leq 2$ car $h\in[-1,1]-\{0\}$.

Ainsi $\forall t\in[0,1]$, $-h(1+t^2)\in[-2,2]$ donc $\forall t\in[0,1]$, $|e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)| \leq \frac{h^2(1+t^2)^2}{2}e^2$ d'après $\underline{a)}$.

$0\leq 1$! $\qquad h^2 = |h|^2$!

Alors $|\Delta(h)| \leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\cdot h^2\frac{(1+t^2)^2}{2}e^2 dt = \frac{|h|}{2}e^2\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt.$

$$\underline{\underline{\forall h\in[-1,1]-\{0\},\ |\Delta(h)| = \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \left(-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right)\right| \leq \frac{|h|}{2}e^2\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt.}}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{|h|}{2}e^2\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)dt\right] = 0$, le théorème d'encadrement donne :

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$. $\underline{\underline{\text{Ainsi } u \text{ est dérivable en } x \text{ et } u'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.}}$

Morale " $\frac{d}{dx}\left[x\mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt\right] = \left[x\mapsto \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right)dt\right]$ " !! ok ?

R

(Q3) $u(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. $u(0) = \frac{\pi}{4}$.

Soit x un élément de $[0,+\infty[$. $\forall t \in [0,1]$, $1+t^2 \geq 1$ et $-x \leq 0$; $\forall t \in [0,1]$, $-x(1+t^2) \leq -x$

$\forall t \in [0,1]$, $0 \leq e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x}$ et $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x} \frac{1}{1+t^2}$. En intégrant $(0 \leq 1)$ il vient :

$0 \leq u(x) \leq e^{-x} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = e^{-x} u(0) = e^{-x} \frac{\pi}{4}$. Or $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} \frac{\pi}{4}) = 0$ donc

par encadrement il vient : $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$.

(Q4) a) $x \mapsto x^2$ et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$; par composition $v : x \mapsto u(x^2)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous avons vu dans Q1 que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée f.

Alors $w = F^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme $v+w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(v+w)'(x) = v'(x) + w'(x) = 2x\, u'(x^2) + 2 f(x) F(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(v+w)'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto tx$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Cela justifie le changement de variable $u = tx$ suivant.

$$x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = \int_0^1 e^{-x^2} e^{-(xt)^2} x\, dt \overset{u=xt}{=} \int_0^x e^{-x^2} e^{-u^2} du = e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Alors $(v+w)'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(v+w)'(x) = 0$.

b) $v+w$ est dérivable et de dérivée nulle sur l'INTERVALLE $\mathbb{R}$ alors $v+w$ est constante sur $\mathbb{R}$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (v+w)(x) = \lambda$.

En particulier $\lambda = v(0) + w(0) = u(0^2) + (F(0))^2 = u(0) + 0^2 = u(0) = \frac{\pi}{4}$.

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) + w(x) = \frac{\pi}{4}}}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x))^2 = L^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = L^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x^2) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (v(x) + w(x)) = L^2$ or $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) + w(x) = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $L^2 = \frac{\pi}{4}$. $|L| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-t^2} \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \geqslant 0$.

En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient $L \geqslant 0$. Ainsi $L = |L| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\underline{\underline{L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}$ ou $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}$ ou $\underline{\underline{\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Cela justifie le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \overset{u = t/\sqrt{2}}{=} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-u^2} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, F(x/\sqrt{2}).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x/\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}}$.

Par parité $\underline{\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ converge et vaut } \sqrt{2\pi}}}$.

Exercice | PC | **Intégrale de Gauss again... en passant par Wallis. Oral ESCP 1996 2.11.**

Texte ESCP...

Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$ et $u_n = (n+1)\, w_{n+1}\, w_n$.

Q1. a) Montrer que pour tout n entier naturel $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

En déduire que w_{n+1} et w_n sont équivalent lorsque n tend vers l'infini.

b) Expliciter u_n en fonction de n et en déduire un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t dans $[0, \sqrt{n}]$: $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

En déduire que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n}\, u_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, w_{2n-2}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$. Puis celles de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$.

Démarche proposée dans ESCP 1994 MI.

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(t) = \sin t$ et $v(t) = (\cos t)^{n+1}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = (n+1)(-\sin t)(\cos t)^n$.

Ceci justifie l'intégration par parties qui suit.

$w_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\, (\cos t)^{n+1} dt = \Big[\sin t (\cos t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\, (n+1)(-\sin t)(\cos t)^n dt$

$w_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} dt.$

$w_{n+2} = (n+1) w_n - (n+1) w_{n+2}$; $(n+2) w_{n+2} = (n+1) w_n$; $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t - 1)(\cos t)^n dt$ et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\cos t - 1)(\cos t)^n \leqslant 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant w_n$. $(w_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$.

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\cos t)^n \geqslant 0$ et $t \mapsto (\cos t)^n$ n'est pas identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ tout en étant continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Alors $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt > 0$.

Ainsi $\dfrac{w_{n+2}}{w_n} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$; $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ il vient par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

$W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = u_n$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est constante donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = u_0 = W_1 W_0 = \int_0^{\pi/2}\cos t\,dt \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt$.

$\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{2}\neq 0$ donc $(n+1)W_{n+1}W_n = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. $W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}$.

Or $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$. Alors $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$; $\sqrt{W_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; $|W_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n \geq 0$. Ainsi $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Q2 Rappelons que $\forall u\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln u \leq u-1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

- Soit $t\in[0,\sqrt{n}[$. $1-\frac{t^2}{n}>0$ donc $\ln(1-\frac{t^2}{n}) \leq 1-\frac{t^2}{n}-1 = -\frac{t^2}{n}$.

  Alors $\ln(1-\frac{t^2}{n})^n = n\ln(1-\frac{t^2}{n}) \leq -t^2$. Par croissance de la fonction exponentielle il vient $(1-\frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$. Notons que ceci vaut encore pour $t=\sqrt{n}$ $(0\leq e^{-n})$.

  Ainsi $\forall t\in[0,\sqrt{n}]$, $(1-\frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$

- Soit $t\in[0,\sqrt{n}]$. $1+\frac{t^2}{n}>0$ donc $\ln(1+\frac{t^2}{n}) \leq 1+\frac{t^2}{n}-1 = \frac{t^2}{n}$

  $n\ln(1+\frac{t^2}{n}) \leq t^2$; $-n\ln(1+\frac{t^2}{n}) \geq -t^2$; $\ln(1+\frac{t^2}{n})^{-n} \geq -t^2$

Par croissance de la fonction exponentielle il vient $(1+\frac{t^2}{n})^{-n} \geq e^{-t^2}$.

$\forall t\in[0,\sqrt{n}]$, $e^{-t^2} \leq (1+\frac{t^2}{n})^{-n}$.

R.

$\forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

En intégrant il vient $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.

$t \mapsto \arctan \frac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $\theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{n}}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \underset{\begin{cases} \theta = \arctan \frac{t}{\sqrt{n}} \\ t = \sqrt{n} \tan \theta \end{cases}}{=} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 \theta)^{-n} \sqrt{n}\, (1 + \tan^2 \theta)\, d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 \theta)^{-n+1} d\theta.$$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^{-n+1} d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (\cos \theta)^{2n-2} d\theta.$$

Or $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\cos \theta)^{2n-2} \geq 0$. Donc $\int_0^{\pi/4} (\cos \theta)^{2n-2} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2n-2} d\theta = \omega_{n-1}$.

Alors $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (\cos \theta)^{2n-2} d\theta \leq \sqrt{n}\, \omega_{2n-2}$: $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}\, \omega_{2n-2}$

Russo un peu pour n'éviter, explicitement, l'ecrin ...

$$\omega_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n+1} dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^n \sin' t \, dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{(\sqrt{n} \sin t)^2}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} \sin)'(t)\, dt.$$

$t \mapsto \sqrt{n} \sin t$ définit une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ceci justifie le changement de variable $u = \sqrt{n} \sin t$ dans ce qui suit.

$\omega_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} du$; $\sqrt{n}\, \omega_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\, \omega_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}\, \omega_{2n-2}$

$\lim_{t\mapsto+\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim_{t\mapsto+\infty} \frac{t^2}{e^{t^2}} = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $e^{-t^2} \underset{t\mapsto+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; 2) $\forall t\in[1,+\infty[$, $e^{-t^2}\geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2}\geqslant 0$; 3) $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge.

les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge également.

Alors $\lim_{n\mapsto+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt = I$ où $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{n}\times\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\lim_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n}\,W_{2n+1}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\sqrt{n}\,W_{2n-2} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\lim_{n\mapsto+\infty}(\sqrt{n}\,W_{2n-2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\,W_{2n+1}\leqslant\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt\leqslant\sqrt{n}\,W_{2n-2}$ et faisons tendre n vers $+\infty$.

Il vient $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leqslant I\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Alors $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\underline{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

$t\mapsto e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ c'est-à-dire $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

$t\mapsto\sqrt{2}\,t$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Le changement de variable $u=\sqrt{2}\,t$ permet alors de dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,du$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ donc $\sqrt{\pi}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice **PC** **Calcul de l'intégral de Dirichlet. LYON 2004 PB 1.**

▶ *Très bon entraînement.*

On note $F :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du.$$

Q1 a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$: $\quad F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du.$

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b) De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent, et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \alpha - F(x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \beta - G(x)$.

Q2 a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout réel $T \in]0;+\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

On note $A :]0;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par : $A(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.$

Q3 Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Q4 Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Q5 a) Montrer : $\quad \forall x \in]0;1], \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant -\ln x.$

b) En déduire que $\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

II Etude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$

Q1 Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \longmapsto t^k\, e^{-xt}$ est bornée sur $[0;+\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge.

On note, pour tout entier naturel k, $B_k \; :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, par : $B_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$

Q2 a) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}$$

b) En déduire, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad B_k'(x) = -B_{k+1}(x).$$

d) En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$

Q3 Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q4 a) Montrer : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$

b) Justifier, pour tout réel $y \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\int_0^y \mathrm{d}u = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\,,$$

et en déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x)\,,$$

où A a été définie dans la Partie **I** et B_0 a été définie dans la Partie **II**.

On note $U :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$U(x) = \big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2$$

Q1 Montrer que U est constante sur $]0;+\infty[$.

Q2 Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Q3 En déduire : $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad A(x) = B_0(x).$

Q4 Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$?

PARTIE I - Étude de la fonction $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$

1. a. Notons que la fonction $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

Les fonctions $u \to \dfrac{1}{u}$ et $u \to -\cos u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{1}{u}\,\sin u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{u}\,(-\cos u)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)(-\cos u)\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du.$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.} \quad (1)$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$

Ainsi $x \to -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (1) autorise alors à dire que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ converge.

Or $\forall u \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ converge ; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du.$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{F : x \to \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ converge}}.$$

Dans la suite $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. On a encore : $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$

b. Notons que la fonction $u \to \dfrac{\cos u}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

Les fonctions $u \to \dfrac{1}{u}$ et $u \to \sin u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{1}{u}\,\cos u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{u}\,(\sin u)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)\sin u\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ G(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \sin 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ (2).

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Ainsi $x \to \dfrac{\sin x}{x} - \sin 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (2) autorise alors à dire que G admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,du$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du$ converge.

Or $\forall u \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ converge ; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u^2}\right| du$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{G : x \to \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \text{ converge}}.$$

Dans la suite $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$. On a encore : $\beta = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Remarque *On peut aisément faire a. et b. simultanément en montrant que* $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(u+b)}{u}\,du$ *admet une limite finie en* $+\infty$ *et en donnant à* b *successivement les valeurs* 0 *et* $\dfrac{\pi}{2}$ *!*

c. Soit x un réel strictement positif.

Répétons que $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ et $u \to \dfrac{\cos u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

Par conséquent les intégrales $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du$ existent.

Or les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent.

Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent également.

De plus $\alpha - F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_x^1 \frac{\sin u}{u}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

De même $\beta - G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif } \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \text{ convergent.}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \alpha - F(x) \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \beta - G(x).}$$

2. a. Soient x et T deux réels strictement positifs. Le changement de variable $u = t + x$ donne sans difficulté :

$\displaystyle\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \int_x^{x+T} \frac{\sin u\,\cos x - \cos u\,\sin x}{u}\,du$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall T \in]0,+\infty[,\ \int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du.}$$

b. Soit x un réel strictement positif. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent donc :

$$\lim_{T\to+\infty} \left(\cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

Alors $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du.}$$

3. $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du.$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \big(\alpha - F(x)\big)\, \cos x - \big(\beta - G(x)\big)\, \sin x.$

F (resp. G) est la primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction continue $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ (resp. $u \to \dfrac{\cos u}{u}$) qui prend la valeur 0 en 1. Ainsi F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $G'(x) = \dfrac{\cos x}{x}\cdot$

F' et G' sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

F, G, cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ donc $A = (\alpha - F)\cos - (\beta - G)\sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{A \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $A'(x) = -F'(x)\, \cos x + \big(\alpha - F(x)\big)\, (-\sin x) - \big(-G'(x)\big)\, \sin x - \big(\beta - G(x)\big)\, \cos x.$

Notons alors que $-F'(x)\, \cos x - \big(-G'(x)\big)\, \sin x = -\dfrac{\sin x}{x}\, \cos x - \Big(-\dfrac{\cos x}{x}\Big)\, \sin x = 0.$

Ainsi $A'(x) = \big(\alpha - F(x)\big)\, (-\sin x) - \big(\beta - G(x)\big)\, \cos x = \big(F(x) - \alpha\big)\, \sin x + \big(G(x) - \beta\big)\, \cos x.$

Alors $A''(x) = F'(x)\, \sin x + \big(F(x) - \alpha\big)\, \cos x + G'(x)\, \cos x + \big(G(x) - \beta\big)\, (-\sin x).$

Ce qui donne $A''(x) = \Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)\, \sin x - \big(\alpha - F(x)\big)\, \cos x + \Big(\dfrac{\cos x}{x}\Big)\, \cos x + \big(\beta - G(x)\big)\, \sin x.$

Donc $A''(x) = -\Big(\big(\alpha - F(x)\big)\, \cos x - \big(\beta - G(x)\big)\, \sin x\Big) + \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} = -A(x) + \dfrac{1}{x}\cdot$

Ce qui donne $A(x) + A''(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) + A''(x) = \frac{1}{x}\cdot}$$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \big(\alpha - F(x)\big)\, \cos x - \big(\beta - G(x)\big)\, \sin x.$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ |A(x)| = \big|\big(\alpha - F(x)\big)\, \cos x - \big(\beta - G(x)\big)\, \sin x\big| \leqslant |\alpha - F(x)|\,|\cos x| + |\beta - G(x)|\,|\sin x|.$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant |A(x)| \leqslant |\alpha - F(x)| + |\beta - G(x)|.$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(\alpha - F(x)\big) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(\beta - G(x)\big) = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0.$

De même $\forall x \in]0,+\infty[,\ A'(x) = \big(F(x) - \alpha\big)\, \sin x + \big(G(x) - \beta\big)\, \cos x$ donc :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ |A'(x)| = \big|\big(F(x) - \alpha\big)\, \sin x + \big(G(x) - \beta\big)\, \cos x\big| \leqslant |F(x) - \alpha|\,|\sin x| + |G(x) - \beta|\,|\cos x|.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant |A'(x)| \leqslant |F(x) - \alpha| + |G(x) - \beta|.$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(F(x) - \alpha\big) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(G(x) - \beta\big) = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A'(x) = 0.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} A'(x) = 0.}$$

5. a. Soit x un élément de $]0,1]$.

$\forall u \in [x,1],\ \dfrac{1}{u} \geqslant 0$ et $0 \leqslant \cos u \leqslant 1$ donc $\forall u \in [x,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\cos u}{u} \leqslant \dfrac{1}{u}$.

En intégrant il vient $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant \int_x^1 \frac{1}{u}\,du$ car $x \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{u}\,du = \big[\ln|u|\big]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant -\ln x.}$$

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$

Notons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0$. Ainsi pour montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0$, il suffit donc de montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0$.

$\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant -\ln x$ et $\sin x \geqslant 0$.

Par conséquent : $\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \sin x \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant \sin x\,(-\ln x) = -\frac{\sin x}{x}\,(x \ln x)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x \ln x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\,(x \ln x)\right) = 0$.

Il vient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0$ et ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0.}$$

c. $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 car $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du$ converge. Or nous avons vu plus haut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ converge.}}$$

Ceci permet de dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

Rappelons que $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Rappelons également que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du\right) = 0$.

Alors $\lim_{x\to 0} A(x) = 1 \times \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du - 0$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du.}$$

PARTIE II - Étude de la fonction $x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$.

1. Soient x un réel strictement positif et k un élément de $\mathbb{N}$.

$\lim_{t\to+\infty} \left(t^k\, e^{-xt}\right) = 0$ donc il existe un réel A strictement positif A tel que : $\forall t \in]A, +\infty[,\ \left|t^k\, e^{-xt}\right| < 1$.

Ainsi $t \to t^k\, e^{-xt}$ est bornée sur $]A, +\infty[$. Comme cette fonction est continue sur le segment $[0, A]$ elle est également bornée sur $[0, A]$.

$t \to t^k\, e^{-xt}$ est bornée sur $[0, A]$ et sur $]A, +\infty[$ donc elle bornée sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ t \to t^k\, e^{-xt} \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.}$$

Fixons de nouveau x dans $]0, +\infty[$ et k dans $\mathbb{N}$. $t \to t^k\, e^{-xt}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ donc il existe un réel M strictement positif tel que $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant t^k\, e^{-x\,t} = |t^k\, e^{-x\,t}| \leqslant M$. Ainsi :

1. $t \to \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$;
2. $\forall t \in [1, +\infty[;\ 0 \leqslant \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \leqslant \frac{M}{1+t^2} \leqslant \frac{M}{t^2}$;
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\, dt$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N};\ \int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2}\, dt \text{ converge.}}$$

2. a. $\varphi : u \to e^u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi'(u) = \varphi''(u) = e^u$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$\forall u \in \mathbb{R},\ \left|\varphi(u) - \varphi(0) - (u-0)\,\varphi'(0)\right| \leqslant \frac{|u-0|^2}{2} \underset{z\in \widehat{[0,u]}}{\text{Max}} |\varphi''(z)|$ ou $\forall u \in \mathbb{R},\ \left|e^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2} \underset{z\in \widehat{[0,u]}}{\text{Max}}\, e^z$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall u \in \mathbb{R},\ \underset{z\in \widehat{[0,u]}}{\text{Max}}\, e^z \leqslant e^{\text{Max}(0,u)} \leqslant e^{|u|}$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R},\ \left|e^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2} \underset{z\in \widehat{[0,u]}}{\text{Max}}\, e^z \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}$.

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ \left|e^u - 1 - u\right| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}.}$$

b. Soient k un élément de $\mathbb{N}$, x un réel strictement positif et h un réel tel que $0 < |h| \leqslant \frac{x}{2}$.

$-\frac{x}{2} \leqslant h \leqslant \frac{x}{2}$ donc $0 < \frac{x}{2} \leqslant x + h$. Alors on peut parler de $B_k(x+h)$... ainsi que de $B_k(x)$, $B_{k+1}(x)$ et de $B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Posons $\Delta(h)=\dfrac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)$.

$$\Delta(h)=\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^k\,e^{-(x+h)\,t}}{1+t^2}-\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}+\frac{h\,t^{k+1}\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\big(e^{-h\,t}-1+ht\big)\,dt.$$

Soit A un réel strictement positif. Posons $\Delta_A(h)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{A}\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\big(e^{-h\,t}-1+ht\big)\,dt$.

Notons que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\Delta_A(h)=\Delta(h)$. Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}|\Delta_A(h)|=|\Delta(h)|$.

$$|\Delta_A(h)|=\left|\frac{1}{h}\int_0^{A}\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\big(e^{-h\,t}-1+ht\big)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{|h|}\int_0^{A}\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\big|e^{-h\,t}-1+ht\big|\,dt.$$

En appliquant le résultat de a) il vient :

$$|\Delta_A(h)|\leqslant\frac{1}{|h|}\int_0^{A}\frac{t^k\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\frac{(-h\,t)^2}{2}\,e^{|-h\,t|}\,dt=\frac{h^2}{2\,|h|}\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,dt=\frac{|h|}{2}\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,dt.$$

$|h|\leqslant\dfrac{x}{2}$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ e^{(|h|-x)\,t}\leqslant e^{(\frac{x}{2}-x)\,t}=e^{-\frac{x}{2}\,t}$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ \dfrac{t^{k+2}\,e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{t^{k+2}\,e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}$.

En intégrant on obtient alors : $\displaystyle\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,dt$ car A est (strictement) positif.

Alors $|\Delta_A(h)|\leqslant\dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,dt\leqslant\frac{|h|}{2}\int_0^{A}\frac{t^{k+2}\,e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,dt$.

B_{k+2} est définie en $\dfrac{x}{2}$ car $\dfrac{x}{2}$ est strictement positif donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{k+2}\,e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,dt$ converge.

De plus $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}|\Delta_A(h)|=|\Delta(h)|$.

Ainsi $\left|\dfrac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)\right|=|\Delta(h)|\leqslant\dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{k+2}\,e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,dt=\frac{|h|}{2}\,B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \forall h\in\mathbb{R},\ 0<|h|\leqslant\frac{x}{2}\Rightarrow\left|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)\right|\leqslant\frac{|h|}{2}\,B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).}$$

c. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Soit x un réel strictement positif.

$\forall h\in\left[-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right]-\{0\},\ 0\leqslant\left|\dfrac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)\right|\leqslant\dfrac{|h|}{2}\,B_{k+2}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{h\to0}\left(\frac{|h|}{2}\,B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=0$.

Il vient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{h\to0}\left(\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}+B_{k+1}(x)\right)=0$.

Ceci donne encore : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h}=-B_{k+1}(x)$.

Par conséquent B_k est dérivable en x et $B_k'(x)=-B_{k+1}(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ B_k \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\ B_k'(x)=-B_{k+1}(x).}$$

d. Ce qui précède montre en particulier que B_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x\in]0,+\infty[,\ B_0'(x)=-B_1(x)$.

Cela montre également que B_1 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x\in]0,+\infty[,\ B_1'(x)=-B_2(x)$.

Alors B_0 est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ B_0''(x)=-B_1'(x)=B_2(x)$.

Mais B_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc continue. Alors B_0'' est continue sur $]0,+\infty[$. Finalement :

$$\boxed{B_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ B_0''(x)+B_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2\,e^{-x\,t}}{1+t^2}+\frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{e^{-x\,t}}{x}\right]_0^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{-x\,A}}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot$

Ainsi : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ B_0''(x)+B_0(x)=\frac{1}{x}\cdot}$$

3. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Rappelons que $B_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $-B_0'(x)=B_1(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2}\leqslant 1$ et $e^{-x\,t}\geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant \dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\leqslant e^{-x\,t}.$

Or nous venons de voir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\cdot$ En intégrant il vient donc : $0\leqslant B_0(x)\leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2}\leqslant 1$ et $t\,e^{-x\,t}\geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant \dfrac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\leqslant t\,e^{-x\,t}.$

Ainsi en intégrant on obtient : $\forall A\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant \displaystyle\int_0^{A}\frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant \int_0^{A} t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t.$

Une intégration par parties simple donne :

$\forall A\in[0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{A} t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t\,e^{-x\,t}}{-x}\right]_0^A-\int_0^{A}\frac{e^{-x\,t}}{-x}\,\mathrm{d}t.$

Alors $\forall A\in[0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{A} t\,e^{-x\,t}\mathrm{d}t=-\frac{A\,e^{-x\,A}}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{A}e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{A}e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\cdot$

Par conséquent $\forall A\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant \displaystyle\int_0^{A}\frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant \int_0^{A} t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}\cdot$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $0\leqslant B_1(x)\leqslant \dfrac{1}{x^2}$ ou $0\leqslant -B_0'(x)\leqslant\dfrac{1}{x^2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0\leqslant B_0(x)\leqslant\frac{1}{x}\text{ et }0\leqslant -B_0'(x)\leqslant\frac{1}{x^2}\cdot}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$ Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}B_0(x)=0\text{ et }\lim_{x\to+\infty}B_0'(x)=0.}$$

4. a Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$t\to\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, $\forall t\in[1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ e^{-x\,t}\leqslant 1$ et $\dfrac{1}{1+t^2}\geqslant 0$ donc : $\forall t\in[0,+\infty[,\ \dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

En intégrant on obtient alors $B_0(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

Notons que $t \to e^{-xt}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ car x est strictement positif. Alors :

$\forall t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $e^{-xt} \geqslant e^{-x\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc : $\forall t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geqslant \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}$.

En intégrant il vient : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}\,dt = e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

$\forall t \in \left[\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty\right[$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geqslant 0$ donc $\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ ($\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge car $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge).

Alors $B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.}$$

b. tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. Soit y un élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le changement de variable $t = \tan u$ donne alors $\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ ($dt = (1+\tan^2 u)\,du$ ou $du = \frac{1}{1+t^2}\,dt$).

$$\boxed{\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt}.$$

$\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^y du = y$.

Comme $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \tan y = +\infty$, en faisant tendre y vers $\frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure, il vient :
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Rappelons que $\forall x \in]0, +\infty[$, $e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[$, $e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\lim_{x \to 0^+} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. De plus $\lim_{x \to 0^+} e^{-\sqrt{x}} = 1$.

Ainsi $\lim_{x \to 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

PARTIE III - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$

1. Rappelons que A et B_0 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$, $A''(x) + A(x) = B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$.

Or $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi(x) = A(x) - B_0(x)$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x)+\varphi''(x) = A(x) - B_0(x) + A''(x) - B_0''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0.$

$U = \varphi^2 + \varphi'^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ U'(x) = \big(\varphi^2+\varphi'^2\big)'(x) = 2\,\varphi'(x)\,\varphi(x) + 2\,\varphi''(x)\,\varphi'(x) = 2\,\varphi'(x)\big(\varphi(x)+\varphi''(x)\big) = 0.$

U est alors de dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc :

$$\boxed{U \text{ est constante sur }]0,+\infty[.}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} B_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} A'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} B_0'(x) = 0.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(A(x) - B(x)\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(A'(x) - B'(x)\Big) = 0.$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2\Big) = 0.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0.}$$

3. U est constante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$. Ainsi U est nulle sur $]0,+\infty[$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) - B_0(x) = 0.$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = B_0(x).}$$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = B_0(x),\ \lim\limits_{x\to0^+} A(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ (d'après ***I.5.c.***) et $\lim\limits_{x\to0^+} B_0(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après ***II.4.c.***). Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.}$$