EXERCICE 37

Exercice **PC** **Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$**

▶ *Classique et bon entraînement.*

Dans tout le problème α est un réel strictement supérieur à 1 et $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

PARTIE I

Q1 k est élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $u_k = \displaystyle\int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$u_k = \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - k^2}\,\lambda\,.$$

Q2 Soient x un réel et n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \Re e\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)$.

Montrer que si x n'est pas un multiple de 2π :

$$C_n(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

(suite géométrique ou récurrence...)

Q3 On pose : $\forall x \in]0,\pi],\ \Phi(x) = \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(x/2)}$ et $\Phi(0) = 0$.

Montrer que Φ est continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

Calculer $\Phi'(x)$ pour tout élément x de $]0,\pi]$.

Montrer enfin que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty}\int_0^\pi \Phi(x)\,\sin(\gamma x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Riemann-Lebesgue... ne pas remplacer Φ par sa valeur).

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi(x)\,\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

(partir d'un côté ou de l'autre et prendre son temps).

Q5 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. Calculer I_0.

En déduire que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$$

PARTIE II

Q1 a) Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ existent.

b) Montrer que $I = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = x^\lambda$). Montrer que $J = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = x^{-\lambda}$).

En déduire une relation simple entre I, J et K.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\Big] x^{\lambda-1}\,dx$ et $B_n = \int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1}\Big] x^{-\lambda}\,dx$.

a) p est dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$. Calculer $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^k$.

Montrer que : $\left|\sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^k - \dfrac{1}{1+x}\right| \leqslant x^{p+1}$.

b) En déduire une majoration simple de $|A_n - I|$ et $|B_n - J|$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} A_n = I$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = J$.

Q3 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer A_n et B_n.

En utilisant I Q1 vérifier que : $A_n + B_n - \dfrac{2}{\sin(\lambda\pi)} \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{\lambda}$.

En déduire que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

PARTIE III

Dans cette partie on considère la fonction $f : x \to \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$. On rappelle que α est un élément de $]1,+\infty[$

Q1 Soit γ un réel positif ou nul.

a) Montrer que $\int_0^1 \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout réel x.

b) Montrer que si x est strictement positif, $\int_1^{+\infty} \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ convergent.

Q2 a) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+$ (faire trois cas).

b) On se propose de montrer à la main que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,dt + e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^\alpha}\,dt \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + f(0)\,e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha}$.

Achever de prouver le résultat.

Q3 On se propose de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$$

Soit c un éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ et h un réel non nul tel que $|h| \leqslant \dfrac{c}{2}$.

a) Justifier très rapidement que $g(c) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\, e^{-(c/2)t^\alpha}\,dt$ existent.

b) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2} e^{|u|}$.

c) On pose $\Delta(h) = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} + g(c)$. Montrer que :

$$|\Delta(h)| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\, e^{-(c/2)t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

Conclure.

Dans la suite nous admettrons que f' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cela se montre sans difficulté).

Q4 On se propose de montrer que f est continue en 0.

a) Donner la définition de $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

b) Montrer que si x et A sont deux réels positifs :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \int_0^A |e^{-xt^\alpha} - 1|\, \mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \leqslant x\int_0^A t^\alpha\, \mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que l'on peut trouver un réel positif A tel que : $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}$

Achever de prouver le résultat.

Q5 a) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = f(x) - x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}).$$

b) En déduire que pour réel x strictement positif :

$$f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

(on pourra considérer $h : x \to f(x)\, e^{-x}$ et intégrer h').

Montrer que ceci vaut encore pour $x = 0$.

Q6 Déduire de (tout) ce qui précède que : $\forall z \in]0,1[,\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

R.

PARTIE I

Q1 $k \in \mathbb{N}^*$. $u_k = \int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos((\lambda+k)x) + \cos((\lambda-k)x)\right]dx$

$$u_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((\lambda+k)x)}{\lambda+k} + \frac{\sin((\lambda-k)x)}{\lambda-k}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\lambda\pi+k\pi)}{\lambda+k} + \frac{\sin(\lambda\pi-k\pi)}{\lambda-k}\right] \qquad (\lambda \neq k \text{ car } \lambda = \tfrac{1}{\alpha} < 1).$$

$\sin(\lambda\pi+k\pi) = (-1)^k \sin(\lambda\pi)$ et $\sin(\lambda\pi - k\pi) = (-1)^k \sin(\lambda\pi)$.

$$u_k = \frac{1}{2}(-1)^k \sin(\lambda\pi)\left[\frac{1}{\lambda+k} + \frac{1}{\lambda-k}\right] = \frac{1}{2}(-1)^k \sin(\lambda\pi) \times \frac{2\lambda}{\lambda^2-k^2} = \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda.$$

$$\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda}}.$$

Q2 $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \not\equiv 0\,[2\pi]$. $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

$$C_n(x) + i S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k \underset{e^{ix}\neq 1}{=} e^{ix}\,\frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}}$$

$$C_n(x) + i S_n(x) = e^{ix}\,\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{ix/2}}\,\frac{\left(e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = e^{ix/2}\,e^{inx/2}\,\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin(x/2)} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\,\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(x/2)}.$$

donc $C_n(x) = \mathrm{Re}\left(C_n(x) + iS_n(x)\right) = \mathrm{Re}\left[e^{i\frac{n+1}{2}x}\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right] = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$

Donc $C_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\frac{nx}{2} + \frac{n+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{nx}{2} - \frac{n+1}{2}x\right)\right]$

$$C_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + \sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}}}.$$

Q3

ϕ est continue sur $]0,\pi]$.

$\phi(x) = \frac{\cos(\lambda x)-1}{\sin(x/2)} = -\frac{1-\cos(\lambda x)}{\sin(x/2)} \underset{0}{\sim} -\frac{(\lambda x)^2/2}{x/2} = -\lambda^2 x$; $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\lambda x)-1}{\sin(x/2)} = 0 = \phi(0)$;

ϕ est donc continue en 0. $\underline{\underline{\phi \text{ est continue sur } [0,\pi].}}$ (1)

ϕ est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x \in]0,\pi]$, $\phi'(x) = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\left[-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$

ϕ' est alors continue sur $]0,\pi]$. $\underline{\underline{\phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,\pi]}}$ (2)

cherchons $\lim_{x\to 0^+} \phi'(x)$. $\phi'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{(x/2)^2}\left[-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right].$

R.

cherchons un DL de 2 du crochet.

$\sin(\lambda x) = (\lambda x) + o(x^2)$; $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$; $\cos(\lambda x) - 1 = -\frac{(\lambda x)^2}{2} + o(x^2)$; $\cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$.

Par conséquent :

$$-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = -\lambda(\lambda x)\left(\frac{x}{2}\right) - \left(-\frac{(\lambda x)^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)$$

$$= -\lambda^2\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda^2 x^2}{4} + o(x^2) = -\lambda^2\frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

donc $-\lambda\sin(\lambda x)\sin\frac{x}{2} - (\cos\lambda x - 1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{-\lambda^2 x^2}{4}$

Finalement : $\phi'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{(x/2)^2}\left(\frac{-\lambda^2 x^2}{4}\right) = -\lambda^2$; $\underline{\underline{\lim_{x\to 0}\phi'(x) = -\lambda^2.}}$ (3)

(1), (2) et (3) montrent que : ϕ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Notons que $\phi'(0) = -\lambda^2$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^\pi \underset{u}{\phi(x)}\underset{v'}{\sin(\sigma x)}\,dx = \left[\phi(x)\left(-\frac{\cos(\sigma x)}{\sigma}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \phi'(x)\left(-\frac{\cos(\sigma x)}{\sigma}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sigma}\Big[-\phi(\pi)\cos(\sigma\pi) + \underbrace{\phi(0)\cos(\sigma\times 0)}_{=0} + \int_0^\pi \phi'(x)\cos(\sigma x)\,dx\Big]$$

$$\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\sigma x)\,dx\right| \leq \frac{1}{\sigma}\ |\phi(\pi)||\cos(\sigma\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)||\cos\sigma x|\,dx$$

$$\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin\sigma x\,dx\right| \leq \frac{1}{\sigma}\left[|\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\,dx\right]$$

$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{1}{\sigma}\left[|\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\,dx\right] = 0$ donc $\underline{\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}\int_0^\pi \phi(x)\sin(\sigma x)\,dx = 0}}$ ... ce n'est pas nouveau !

(Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on passe d'une intégrale "simple" à une intégrale généralisée convergente ; ok ?

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \cos(\lambda x)\sum_{k=1}^n \cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \cos(\lambda x)\left[\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin x/2} - \frac{1}{2}\right]dx$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\lambda x - 1}{\sin x/2} + \frac{1}{\sin x/2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \phi(x)\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx$$ ... toutes

les intégrales convergent. Notons que : $\int_0^\pi \cos(\lambda x)\,dx = \left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^\pi = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda}$

donc $$\underline{\underline{\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \phi(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\,dx - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}.}}$$

R.

(Q5) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+3}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin x/2}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{2\cos\left(\frac{\frac{2n+3}{2}+\frac{2n+1}{2}}{2}x\right)\sin\left(\frac{\frac{2n+3}{2}-\frac{2n+1}{2}}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\,dx$$

$$I_{n+1}-I_n = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos((n+1)x)\,\sin(x/2)}{\sin(x/2)}\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos((n+1)x)\,dx = 2\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0.$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}=I_n$. $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x/2)}{\sin(x/2)}\,dx = \pi$. $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\pi$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\phi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx + \frac{1}{2}\pi - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$

D'après Q3 : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi}\phi(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)dx = 0$.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$.

La série de terme général u_n converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$.

PARTIE II

(Q1) a) $x \mapsto \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}$ et $x\mapsto \frac{x^{-\lambda}}{1+x}$ sont continues donc localement intégrables sur $]0,1]$

$\frac{x^{\lambda-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\lambda}}$; $x\mapsto \frac{1}{x^{1-\lambda}}$ est positive sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\lambda}}$ converge $(1-\lambda<1)$; par conséquent : $\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx$ converge.

$\frac{x^{-\lambda}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\lambda}}$; $x\mapsto\frac{1}{x^{\lambda}}$ est positive sur $]0,1]$ et $\int_0^1\frac{dx}{x^{\lambda}}$ converge $(\lambda<1)$; par conséquent : $\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx$ converge.

$x\mapsto \frac{1}{1+x^{\alpha}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ (et pourtant pas sur $[0,+\infty[$!) donc est localement intégrable sur $]0,+\infty[$. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{\alpha}} = 1$; la fonction est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1\frac{dx}{1+x^{\alpha}}$ converge.

$\frac{1}{1+x^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha}}$; $x\mapsto\frac{1}{x^{\alpha}}$ est positive sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ converge $(\alpha>1)$; donc $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}}$ converge

R

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ converge. $[x \mapsto x^\lambda$ est C^1 sur $]0,1]$. $x = t^{1/\lambda}$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx = \int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{(t^{1/\lambda})^{\lambda-1}}{1+t^{1/\lambda}} \frac{1}{\lambda} t^{1/\lambda-1}dt = \int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{t^{1-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}-1}}{1+t^\alpha}\frac{1}{\lambda}dt$

$t = x^\lambda$; $x = t^{1/\lambda}$; $dx = \frac{1}{\lambda}t^{1/\lambda-1}dt$

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon^\lambda}^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$; en faisant tendre ε vers 0 on obtient:

$$I = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

$[x \mapsto x^{-\lambda}$ est C^1 sur $]0,1]$

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}dx = \int_{\varepsilon^{-\lambda}}^1 \frac{t}{1+t^{-\frac{1}{\lambda}}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)t^{-\frac{1}{\lambda}-1}dt = \int_{\varepsilon^{-\lambda}}^1 \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{t^{-1/\lambda}}{1+t^{-1/\lambda}}dt = \frac{1}{\lambda}\int_1^{\varepsilon^{-\lambda}} \frac{dt}{t^{1/\lambda}(1+t^{-1/\lambda})}$

$t = x^{-\lambda}$; $x = t^{-1/\lambda}$; $dx = -\frac{1}{\lambda}t^{-\frac{1}{\lambda}-1}dt$

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{1/\varepsilon^\lambda} \frac{dt}{t^{1/\lambda}+1}$; $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} = +\infty$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}$. $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}.$

Donc $\displaystyle I + J = \frac{1}{\lambda}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\lambda}K = \alpha K$

Q2 a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^p (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{1-(-x)^{p+1}}{1-(-x)} - \frac{1}{1+x}\right| = \frac{x^{p+1}}{1+x} \leq x^{p+1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1]$.

$\displaystyle\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k\right] x^{\lambda-1}dx - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx\right| = \left|\int_\varepsilon^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right)x^{\lambda-1}dx\right|$

$\displaystyle\leq \int_\varepsilon^1 \left|\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}\right| x^{\lambda-1}dx$ Q1

$\displaystyle\leq \int_\varepsilon^1 x^{n+1}x^{\lambda-1}dx = \int_\varepsilon^1 x^{n+\lambda}dx = \left[\frac{x^{n+\lambda+1}}{n+\lambda+1}\right]_\varepsilon^1$

$\displaystyle\left|\int_\varepsilon^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k\right]x^{\lambda-1} - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx\right| \leq \frac{1}{n+\lambda+1} - \frac{\varepsilon^{n+\lambda+1}}{n+\lambda+1}$

En faisant tendre ε vers 0 il vient : $\displaystyle |A_n - I| \leq \frac{1}{n+\lambda+1}.$

$$\left|\int_\varepsilon^1\Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}\Big]x^{-\lambda}\,dx-\int_\varepsilon^1\frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx\right|\leq\int_\varepsilon^1\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}-\frac{1}{1+x}\right|x^{-\lambda}\,dx$$

Q1

$$\leq\int_\varepsilon^1\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}x^{k}-\frac{1}{1+x}\right|x^{-\lambda}\,dx\leq\int_\varepsilon^1 x^{(n-1)+1}x^{-\lambda}\,dx=\int_\varepsilon^1 x^{n-\lambda}\,dx$$

Donc $\displaystyle\left|\int_\varepsilon^1\Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}\Big]x^{-\lambda}\,dx-\int_\varepsilon^1\frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx\right|\leq\int_\varepsilon^1 x^{n-\lambda}\,dx=\frac{1}{n-\lambda+1}-\frac{\varepsilon^{n-\lambda+1}}{n-\lambda+1}.$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\varepsilon^{n-\lambda+1}\right)=0\quad(n\in\mathbb{N}^*\text{ et }\lambda\in]0,1[)$

Donc $\displaystyle |B_n-J|\leq\frac{1}{n-\lambda+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle|A_n-I|\leq\frac{1}{n+\lambda+1}$ et $\displaystyle|B_n-J|\leq\frac{1}{n-\lambda+1}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+\lambda+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\lambda+1}=0$

Par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A_n=I$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}B_n=J$

Q3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle A_n=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_\varepsilon^1 x^{k+\lambda-1}\,dx\Big)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{1-\varepsilon^{k+\lambda}}{k+\lambda}\Big]=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\lambda}.$

$$B_n=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_\varepsilon^1 x^{k-1-\lambda}\,dx\Big]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\frac{1-\varepsilon^{k-\lambda}}{k-\lambda}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k-\lambda}.$$

$$A_n+B_n-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\lambda}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k-\lambda}-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sin(\lambda\pi)}{\lambda^2-k^2}\lambda\Big].$$

$$A_n+B_n-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{\lambda}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{1}{k+\lambda}-\frac{1}{k-\lambda}\Big]-2\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\lambda^2-k^2}.$$

$$A_n+B_n-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{\lambda}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\frac{-2\lambda}{k^2-\lambda^2}-2\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\lambda^2-k^2}.$$

$$A_n+B_n-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{\lambda}+2\lambda\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{\lambda^2-k^2}-2\lambda\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{\lambda^2-k^2}=\frac{1}{\lambda}.$$

$\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A_n+B_n-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{\lambda}.$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\displaystyle I+J-\frac{2}{\sin(\lambda\pi)}\Big[\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}\Big]=\frac{1}{\lambda}$

Donc $\displaystyle I+J-\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$; $\displaystyle I+J=\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$; $\displaystyle\frac{1}{\lambda}K=\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$; $\displaystyle K=\frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)}.$

Finalement si $\alpha\in]1,+\infty[$ et si $\lambda=\frac{1}{\alpha}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha}=\frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)}=\frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$ ... classique !

PARTIE III

(Q1) $\gamma \in \mathbb{R}_+$ a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $u : t \mapsto \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et

$\lim_{t\to 0^+} u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma > 0 \end{cases}$ (car $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} = 1$ puisque $\alpha > 1$).

u est donc prolongeable par continuité en 0 ; $\int_0^1 u(t)\,dt$ converge.

$\int_0^1 \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout réel x.

Exercice.. Reprendre l'étude avec α et γ quelconque.

b) Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $\int_0^1 \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge d'après a).

Rappelons que $u : t \mapsto \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,+\infty[$.

$u(t) \overset{\alpha>1}{\underset{+\infty}{\sim}} \dfrac{t^\gamma}{t^\alpha} e^{-xt^\alpha} = t^{\gamma-\alpha} e^{-xt^\alpha}$, $t^2 u(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{\gamma-\alpha+2} e^{-xt^\alpha} = e^{-xt^\alpha + (\gamma-\alpha+2)\ln t}$.

$t^2 u(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-xt^\alpha\left(1 - \frac{\gamma-\alpha+2}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)}$. Or $\lim_{t\to+\infty}(-x\,t^\alpha) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

Par conséquent $\lim_{t\to+\infty} (t^2 u(t)) = 0$.

$\exists A \in [1,+\infty[$, $\forall t \in [A,+\infty[$, $|t^2 u(t)| \leqslant 1$. $\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leqslant u(t) = |u(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$.

Ainsi pour tout réel x strictement positif, $\int_1^{+\infty} \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ convergent.

(Q2) a) Q1 montre que, pour tout réel x strictement positif et tout réel γ positif :

$\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge ; en particulier $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout réel x strictement positif.

Ainsi $]0,+\infty[\ \subset D_f$.

Nous avons montré dans II que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge alors $0 \in D_f$.

Soit x un élément de $]-\infty, 0[$. Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ diverge. Il suffit pour cela de prouver que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ diverge.

$t \mapsto \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}$ est toujours continue (et positive) sur $[1,+\infty[$.

$$\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}\, e^{-xt^\alpha} = e^{-xt^\alpha - \alpha \ln t} = e^{-xt^\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)}$$

$\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \left(-xt^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)\right) = +\infty$ car $-x>0$, $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} t^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} = \lim\limits_{t\mapsto+\infty} e^{-xt^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}\frac{\ln t}{t^\alpha}\right)} = +\infty$.

$\exists A \in [1,+\infty[,\ \forall t \in [A,+\infty[,\ \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \geqslant 1 \geqslant 0$!

La divergence de $\int_1^{+\infty} 1\,dt$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ diverge et $x \notin D_f$.

<u>Finalement le domaine de f est $]0,+\infty[$.</u>

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in D_f,\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in D_f$. $\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-xt^\alpha} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha} \leqslant 1$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant \int_0^{\varepsilon/2} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt \leqslant \int_0^{\varepsilon/2} 1\,dt = \frac{\varepsilon}{2}$. (a)

$\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[,\ (\frac{\varepsilon}{2})^\alpha \leq t^\alpha$; $\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[,\ 0 \leq e^{-xt^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha}$.

$\forall t \in [\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[,\ 0 \leq \dfrac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.

Rappelons que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge. Ainsi $0 \leq \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Comme $\forall t \in]0, +\infty[,\ \frac{1}{1+t^\alpha} \geq 0$: $\int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

Finalement $0 \leq \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$. (b)

Par addition de (a) et (b) il vient :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\varepsilon/2} 1\, dt + e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_{\varepsilon/2}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2} + e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \right) = 0$:

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [A, +\infty[,\quad e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \left| e^{-x(\frac{\varepsilon}{2})^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in [A, +\infty[,\ 0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; $\forall x \in [A, +\infty[,\ |f(x)| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in D_f,\ x \geq A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Q3 a) Nous avons que si $\gamma \in [0, +\infty[$ et si $x \in]0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

Pour $\gamma = \alpha$ et $x = c$ on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$.

Pour $\gamma = 2\alpha$ et $x = \frac{c}{2}$ on obtient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$.

Ainsi $g(c) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$ existent.

R.

b) $w : u \mapsto e^u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à w donne :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |w(u) - w(0) - (u-0)w'(0)| \leq \frac{|u-0|^2}{2} \max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} |w''(z)|.$$

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z.$$

Si $u \geq 0$: $\max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z = e^u = e^{|u|}$. Si $u < 0$ $\max_{z \in [\overleftrightarrow{0,u}]} e^z = 1 \leq e^{|u|}$.

Finalement $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

c) $h\Delta(h) = f(c+h) - f(c) + h g(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(c+h)t^\alpha}}{1+t^\alpha} - \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} + h t^\alpha \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \right) dt$

$$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \left(e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha \right) dt.$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| = \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} |e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha| \underset{b)}{\leq} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} \frac{|-ht^\alpha|^2}{2} e^{|ht^\alpha|}.$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| \leq \frac{h^2}{2} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-t^\alpha(c-|h|)} \underset{|h| \leq \frac{c}{2}}{\leq} \frac{h^2}{2} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha}.$$

La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt$ donne alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| dt$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) dt$ est absolument convergente. Ceci permet alors d'écrire que :

$$|h\Delta(h)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha} (e^{-ht^\alpha} - 1 + h t^\alpha) \right| dt \leq \frac{|h|^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt.$$

En divisant par $|h|$ il vient :

$$|\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha} e^{-(c/2)t^\alpha} dt.$$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(|h|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\,e^{-c(h)t^\alpha}dt\right)=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\Delta(h)=0$.

Alors $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}+g(c)\right)=0$; $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=-g(c)$.

Par conséquent f est dérivable en c et $f'(c)=-g(c)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha}dt$ et ceci pour tout c dans $\mathbb{R}_+^*$.

| a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0 \iff \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\forall x\in\eta,\ |x|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

Q4 b) $x\in[0,+\infty[$ et $A\in[0,+\infty[$. $|f(x)-f(0)|=\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}-\frac{1}{1+t^\alpha}\right)dt\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|$

$|f(x)-f(0)|=\left|\displaystyle\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt+\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leqslant\left|\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|+\left|\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|$

$\forall t\in]0,A]$, $\left|\dfrac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|=\dfrac{1}{1+t^\alpha}|e^{-xt^\alpha}-1|\underset{\uparrow\ \frac{1}{1+t^\alpha}\leqslant 1}{\leqslant}|e^{-xt^\alpha}-1|=1-e^{-xt^\alpha}\leqslant 1$!!

La convergence de $\displaystyle\int_0^A 1\,dt$ assure alors la convergence de $\displaystyle\int_0^A\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt$ et de $\displaystyle\int_0^A|e^{-xt^\alpha}-1|\,dt$. Ceci permet d'écrire que :

$\left|\displaystyle\int_0^A\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leqslant\int_0^A\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt\leqslant\int_0^A|e^{-xt^\alpha}-1|\,dt$.

$\forall t\in[A,+\infty[$, $\left|\dfrac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|\leqslant\dfrac{|e^{-xt^\alpha}|+1}{1+t^\alpha}=\dfrac{e^{-xt^\alpha}+1}{1+t^\alpha}\leqslant\dfrac{2}{1+t^\alpha}$.

La convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{2}{1+t^\alpha}dt$ donne la convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty}\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt$ et permet d'écrire que : $\left|\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}dt\right|\leqslant\int_A^{+\infty}\left|\frac{e^{-xt^\alpha}-1}{1+t^\alpha}\right|dt\leqslant 2\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}$.

$w: u\mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à w à l'ordre 0 donne $\forall u\in]-\infty,0]$, $|w(u)-w(0)|\leqslant|u|\max\limits_{z\in[u,0]}|w'(z)|$.

$\forall u\in]-\infty,0]$, $|e^u-1|\leqslant|u|\max\limits_{z\in[u,0]}e^z=|u|$. $\forall u\in]-\infty,0]$, $|e^u-1|\leqslant|u|$.

$\longrightarrow$

$\forall t \in]0,A]$, $|e^{-xt^\alpha}-1| \underset{\substack{\uparrow \\ -xt^\alpha \leq 0}}{\leq} |xt^\alpha| = x t^\alpha$; ainsi $\int_0^A |e^{-xt^\alpha}-1|\,dt \leq x\int_0^A t^\alpha dt$ ... les deux intégrales convergent.

Finalement $|f(x)-f(0)| \leq \int_0^A |e^{-xt^\alpha}-1|\,dt + 2\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt \leq x\int_0^A t^\alpha dt + 2\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,dt$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

c) $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt - \int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}dt\right) = 0$.

Ainsi peut-on trouver A dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\left|\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}dt\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Alors $2\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim_{x\to0}\left(x\int_0^A t^\alpha dt\right) = 0$ donc $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|<\eta \Rightarrow \left|x\int_0^A t^\alpha dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|<\eta \Rightarrow x\int_0^A t^\alpha dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[$, $|x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)| \leq x\int_0^A t^\alpha dt + 2\int_A^{+\infty}\frac{2}{1+t^\alpha}dt < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Par conséquent : $\forall x \in D_f$, $|x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon$.

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in D_f$, $|x|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon$. $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$.

Q5 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $-f'(x) + f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} + \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A e^{-xt^\alpha}dt \underset{\uparrow}{=} \int_{x\varepsilon^\alpha}^{xA^\alpha} e^{-u}\frac{1}{x^{1/\alpha}}\frac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du = \frac{x^{-1/\alpha}}{\alpha}\int_{x\varepsilon^\alpha}^{xA^\alpha} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du$$

$u = xt^\alpha$

$t = (u/x)^{1/\alpha} = \frac{1}{x^{1/\alpha}}u^{1/\alpha}$ $\Big\}$ $t\mapsto xt^\alpha$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$\lim_{\varepsilon\to0^+}(x\varepsilon^\alpha) = 0$; $\lim_{A\to+\infty}(xA^\alpha) = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du$ converge et vaut $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt$ existe et vaut $\frac{x^{-1/\alpha}}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) = x^{-1/\alpha}\frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) = x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Donc $-f'(x)+f(x) = x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = f(x) - x^{-1/\alpha}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \frac{f(x)}{e^x} = f(x)e^{-x}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = e^{-x}(f'(x)-f(x)) = -e^{-x}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$h(A)-h(x) = \int_x^A h'(t)dt = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^A e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$ (h' est continue sur $]0,+\infty[$ car f et f' le sont !)

$f(A)e^{-A} - f(x)e^{-x} = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^A e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$.

Comme $\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$, $\lim_{A\to+\infty}(f(A)e^{-A}) = 0$. Ceci donne la

convergence de $\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{\alpha}}dt$ (qui était déjà claire... $\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1)$ et l'égalité $-\frac{1}{\alpha}+1>0$.

$-f(x)e^{-x} = -\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$

$x \mapsto f(x)e^{-x}$ admet pour limite $f(0)$ à droite en 0 et $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$

admet pour limite à droite en 0 : $\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

On peut donc prolonger sans difficulté l'égalité précédente en 0.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}dt$.

(Q6) L'égalité de Q5 b) appliquée en 0 donne :

$f(0) = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\,\Gamma(-\frac{1}{\alpha}+1)$. Or $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$.

Ainsi $\frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})$.

Alors $\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} = \Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)$ pour tout $\alpha \in]1,+\infty[$.

Soit z un élément de $]0,1[$. $\frac{1}{z}$ appartient à $]1,+\infty[$.

Alors, d'après ce qui précède $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$.

Finalement $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Remarques. 1. Avec $z = 1/2$ on retrouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2. Cette formule permet d'obtenir Γ sur $]0,\frac{1}{2}[$ à partir de Γ sur $]\frac{1}{2},1[$ et réciproquement.