R.

EXERCICE 8

Exercice **Etude d'une fonction définie par une intégrale.** $\boxed{\star}$

Q1. a) Étudier la nature des $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$ et de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$. En déduire deux limites (oui je sais c'est un peu vague, mais bon !).

b) Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$.

Q2. $\boxed{\star\star\star}$ Montrer que F est dérivable sur son domaine et calculer F'.

Q3. Étudier F aux bornes de son domaine de définition.

Q4. a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,dt$ converge et vaut $1 - F(0)$ (intégrer par parties entre 0 et A).

Q1 a) $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $]-1,+\infty[$.

→ 1 * $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$

2 * $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car c'est $\Gamma(1)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. $\displaystyle\underline{\underline{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \text{ converge.}}}$

→ 1 * $f(t) \underset{-1}{\sim} \dfrac{e}{1+t}$.

2 * $\forall t \in]-1,0]$, $\dfrac{e}{1+t} \geq 0$.

3 * $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e}{1+t}\,dt$ diverge car $1 \geq 1$!!

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ diverge. $\displaystyle\underline{\underline{\int_{-1}^{0} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \text{ diverge.}}}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente. $\displaystyle\underline{\underline{\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt = 0.}}$

1°.- $\int_{-1}^{0} h(t)\,dt$ diverge.

et $\forall t\in]-1,0]$, $h(t)\geq 0$.

Alors $\lim_{x\to -1^+} \int_x^0 h(t)\,dt = +\infty$.

Remarque.. Je considère cela comme un résultat de cours ... sur les limites.

En voici une preuve. Posons $\forall x \in]-1,0]$, $\varphi(x)=\int_x^0 h(t)\,dt$.

Comme h est positive sur $]-1,0]$, φ est décroissante sur $]-1,0]$ (φ est dérivable sur $]-1,0]$ et $\forall x \in]-1,0]$, $\varphi'(x) = -h(x)$).

Le théorème de la limite monotone indique que φ admet une limite L finie ou infinie à droite en -1.

mais si L est finie alors $\int_{-1}^0 h(t)\,dt$ converge. Cela n'est pas donc $L=+\infty$.

Ainsi $\lim_{x\to -1^+}\int_x^0 h(t)\,dt=+\infty$ ou $\lim_{x\to -1^+}\int_x^0 \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt=+\infty$.

Ce résultat est à retenir. Il vaut sur "$[a,b[$" (b fini ou infini) et "sur $]a,b]$ (a fini ou infini). C'est un générateur de limites intéressant.

Rappelons "l'analogue pour les séries". La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs (resp. négatifs) divergente tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

b) • $\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$ converge et h est continue sur $]-1,+\infty[$ donc $\int_x^{+\infty} h(t)\,dt$ converge pour tout x dans $]-1,+\infty[$.

Ainsi $]-1,+\infty[\subset D_F$

• $\int_{-1}^0 h(t)\,dt$ diverge donc $\int_{-1}^{+\infty}$ diverge également et $-1 \notin D_F$

• Soit $x \in]-\infty,-1[$. Supposons que $\int_x^{+\infty} h(t)\,dt$ converge.

Alors $\int_x^{-1} h(t)\,dt$ et $\int_{-1}^{+\infty} h(t)\,dt$ convergent. Or $\int_{-1}^{+\infty} h(t)\,dt$ diverge !!

Donc si $x \in]-\infty,-1[$, $\int_x^{+\infty} \ell(t)\,dt$ diverge et $x \notin D_F$.

Ainsi $\underline{D_F =]-1,+\infty[}$.

Q2 $\forall x \in D_F$, $F(x) = \int_x^0 \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt = -\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t} + F(0)$.

$x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car c'est la primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction continue sur $]-1,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

$x \mapsto F(0)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car c'est une fonction constante.

Alors 1) $\underline{F \text{ est dérivable sur }]-1,+\infty[}$.

2) $\underline{\forall x \in]-1,+\infty[,\ F'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x}}$.

A
R
E
T
E
N
I
R

<u>Remarque</u>.. $\forall x \in]-1,+\infty[$, $F'(x) < 0$. <u>F est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.</u>

Q3 Nous avons déjà vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \ell(t)\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

Nous avons aussi vu que $\lim\limits_{x \to -1^+} \int_x^0 \ell(t)\,dt = +\infty$.

Or $\forall x \in]-1,+\infty[$, $F(x) = \int_x^0 \ell(t)\,dt + F(0)$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} F(x) = +\infty$.

$\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0}$ et $\underline{\lim\limits_{x \to -1^+} F(x) = +\infty}$.

<u>Remarque</u>.. On peut retrouver ces deux limites de la manière suivante.

- $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leq F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

- $\forall x \in]-1,0]$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \geq \int_x^0 \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \geq \int_x^0 \frac{dt}{1+t} = -\ln(1+x)$.

$\left\{ \begin{array}{l} e^{-t} \geq 1 \\ \frac{1}{1+t} \geq 0 \end{array} \right.$

Or $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} [-\ln(1+x)] = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} F(x) = +\infty$.

<u>Exercice</u>.. Trouver un équivalent de F en -1 et en $+\infty$.

(Q4) <u>a)</u> Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $A \in [x,+\infty[$.

$$0 \leq \int_x^A \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{1+x}\int_x^A e^{-t}dt \leq \frac{1}{x}\int_x^A e^{-t}dt = \frac{1}{x}[e^{-x} - e^{-A}] \leq \frac{1}{x}e^{-x}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}e^{-x}$ ou $0 \leq xF(x) \leq e^{-x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq xF(x) \leq e^{-x}$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^{-x} = 0$.

Alors par encadrement on obtient $\underline{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (xF(x)) = 0}$.

b) F est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc <u>F est continue sur $[0,+\infty[$</u>. Soit $A \in [0,+\infty[$.

F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x}$. Alors F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. $x \mapsto x$ également.

Alors en intégrant par parties on obtient :

$$\int_0^A F(t)\,dt = [tF(t)]_0^A - \int_0^A tF'(t)\,dt = AF(A) + \int_0^A t\frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$$

$$\int_0^A F(t)\,dt = AF(A) + \int_0^A \left[e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t}\right]dt = AF(A) + [-e^{-t}]_0^A - \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt.$$

$$\int_0^A F(t)\,dt = AF(A) - e^{-A} + 1 - \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt.$$

donc $\lim\limits_{A \mapsto +\infty} \int_0^A F(t)\,dt = 0 - 0 + 1 - F(0) = 1 - F(0)$.

Ainsi $\underline{\int_0^{+\infty} F(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1 - F(0).}$

R

EXERCICE 9

J.F.C.

Exercice | **S** | **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 3. Edhec 2004 Ex. 2**

Q1. On pose, lorsque c'est possible, $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$.

Q2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q3. a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ par $\displaystyle g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$.

b) Pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $[1,+\infty[$, simplifier $\displaystyle \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}$.

c) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Q4. a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\quad 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

Q5. Dresser le tableau de variation de f.

---

1) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$. g_x est continue sur $[1,+\infty[$. Envisageons deux cas.

• Supposons x strictement positif.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+t+t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant g_x(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

Comme $x+1>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt$.

• Supposons x négatif ou nul.

Comme $x+1 \leqslant 1$, $\forall t \in [1,+\infty[,\ t^{x+1} \leqslant t$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 < 1+t+t^{x+1} \leqslant 1+t+t \leqslant t+t+t = 3t$.

Alors $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{3t} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} = g_x(t)$.

La divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{3t}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt$.

Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_x(t)\,dt$ converge si et seulement si x est strictement positif.

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]0,+\infty[.}$

Remarque *On pouvait également obtenir le résultat en montrant que :*

$$\frac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } x<0 \\[2mm] \dfrac{1}{2t} & \text{si } x=0 \\[2mm] \dfrac{1}{t^{x+1}} & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

2) Montrons que f est croissante en utilisant la définition.

Soient deux éléments x et y de $]0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $f(y) \leqslant f(x)$.

Soit t un élément de $[1,+\infty[$. $\ln t \geqslant 0$ et $x \leqslant y$ donc $(x+1)\ln t \leqslant (y+1)\ln t$.

Alors $t^{x+1} = e^{(x+1)\ln t} \leqslant e^{(y+1)\ln t} = t^{y+1}$ donc $0 < 1+t+t^{x+1} \leqslant 1+t+t^{y+1}$.

Ainsi $\dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$.

Finalement : $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$.

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{y+1}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$, c'est à dire : $f(y) \leqslant f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

3) a. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ h_x(t) = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$. h_x est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,(1+t^x) = t + t^{x+1} \geqslant t^{x+1} > 0$ donc $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant h_x(t) \leqslant \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

Comme $x+1>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ converge. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0,+\infty[, \text{ la quantité } g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} \text{ existe.}}$$

Remarque *Notons que si x appartient à $]-\infty,0]$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)}$ diverge.*

En effet, si x appartient à $]-\infty,0]$, $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2\,t} \leqslant \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge.

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x} = \dfrac{1+t^x-t^x}{t\,(1+t^x)} = \dfrac{1}{t\,(1+t^x)}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1}{t\,(1+t^x)}.}$$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Soit A un élément de $[1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln|t| - \frac{1}{x}\ln|1+t^x|\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[x\ln t - \ln(1+t^x)\right]_1^A = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t^x}{1+t^x}\right]_1^A.$$

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{1}{x}\left(\ln\frac{A^x}{1+A^x} - \ln\frac{1}{2}\right) \quad (**).$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^x}{1+A^x} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{A^x}} = 1$ Alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\frac{A^x}{1+A^x} = 0$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (**) il vient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = -\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t^x)} = \frac{\ln 2}{x}.}$$

c. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$\forall t\in[1,+\infty[,\ 1+t+t^{x+1}\geqslant t+t^{x+1}=t\,(1+t^x)>0$ donc $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\leqslant\dfrac{1}{t\,(1+t^x)}\cdot$

En intégrant (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient : $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)=\dfrac{\ln 2}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln 2}{x}\cdot}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}=0$, l'encadrement précédent donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

4) a. Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$$\frac{\ln 2}{x}-f(x)=g(x)-f(x)=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t\,(1+t^x)}-\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right)dt=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\right)dt\cdot$$

$$\frac{\ln 2}{x}-f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\cdot$$

Soit t un élément de $[1,+\infty[$.

$t\geqslant t>0$, $1+t^x\geqslant t^x>0$ et $1+t+t^{x+1}\geqslant t^{x+1}>0$ donc $t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})\geqslant t\,t^x\,t^{x+1}=t^{2\,x+2}>0$.

Alors $\forall t\in[1,+\infty[,\ t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})\geqslant t^{2\,x+2}>0$.

Ainsi $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant\dfrac{1}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\leqslant\dfrac{1}{t^{2x+2}}\cdot$ (***)

Observons que $2x+2>1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2x+2}}$ converge. De plus :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{2x+2}}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{dt}{t^{2x+2}}=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{(2x+1)\,t^{2x+1}}\right]_1^A=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{(2x+1)\,A^{2x+1}}+\frac{1}{2x+1}\right)=\frac{1}{2x+1}\cdot$$

Alors en intégrant l'encadrement (***) (les bornes sont dans l'ordre croissant) il vient :

$0\leqslant\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\,(1+t^x)\,(1+t+t^{x+1})}\leqslant\frac{1}{2x+1}\cdot$ Ce qui donne $0\leqslant\dfrac{\ln 2}{x}-f(x)\leqslant\dfrac{1}{2x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant\frac{\ln 2}{x}-f(x)\leqslant\frac{1}{2x+1}\cdot}$$

b. $\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant\dfrac{\ln 2}{x}-f(x)\leqslant\dfrac{1}{2x+1}\cdot$ Donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ 0\leqslant\ln 2-x\,f(x)\leqslant\dfrac{x}{2x+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2x+1}=0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\big(x\,f(x)\big)=\ln 2$.

Comme $\ln 2$ n'est pas nul, $x\,f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\ln 2$ et donc $f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{\ln 2}{x}\cdot$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln 2}{x}=+\infty$ donne alors $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{\ln 2}{x}}\quad\text{et}\quad\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty.}$$

5) f est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Je vous laisse le tableau...

Exercice **S** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 4. Oral ESCP 1994 1.7.**

$f : x \to \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

Q1. Trouver le domaine de f.

Q2. Montrer que f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Q4. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f(x)+f(x+1) = \dfrac{1}{x}$. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Q5. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2x}$.

Q6. Montrer que pour n élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$$f(n) = (-1)^{n-1}\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{k}$$

En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\dfrac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^{x+1}} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$. Or cette dernière intégrale converge si et seulement si $x+1>1$ ou si et seulement si $x>0$.

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ converge si et seulement si $x>0$.

Le domaine de définition de f est $]0,+\infty[$.

Q2 Soient x et y deux éléments de $]0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $\ln t \geqslant 0$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $x \ln t \leqslant y \ln t$.

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 < e^{x\ln t} \leqslant e^{y \ln t}$ donc $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 < t^x \leqslant t^y$ et $1+t>0$.

$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 < t^x(1+t) \leq t^y(1+t).$

$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 < \dfrac{1}{t^y(1+t)} \leq \dfrac{1}{t^x(1+t)}.$

Alors $\quad 0 < f(y) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^y(1+t)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = f(x).$

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \Rightarrow 0 < f(y) \leq f(x).$

Cela doit pouvoir suffire pour dire que <u>f est (strictement) positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.</u>

Q3 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\quad \forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 < t \leq 1+t \leq 2t$ et $t^x > 0$.

$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 < t^{x+1} \leq t^x(1+t) \leq 2t^{x+1}$. $\forall t \in [1, +\infty[, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^{x+1}} \leq \dfrac{1}{t^x(1+t)} \leq \dfrac{1}{t^{x+1}}$

Alors $\forall A \in [1, +\infty[, \quad \displaystyle\int_1^A \frac{1}{2}\frac{1}{t^{x+1}} dt \underset{A \geq 1}{\leq} \int_1^A \frac{dt}{t^x(1+t)} \underset{A\geq 1}{\leq} \int_1^A \frac{dt}{t^{x+1}} \quad (*)$.

$x+1 > 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ converge. Alors en faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(*)$

il vient $\quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}.$

$\forall A \in [1, +\infty[, \quad \displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^{x+1}} = \int_1^A t^{-x-1} dt = \left[\frac{t^{-x}}{-x}\right]_1^A = \frac{1}{x}(1 - A^{-x}) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{A^x}\right).$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^{x+1}} = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{A^x}\right)\right) = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$ $\underline{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}}.$

Ainsi $\quad \underline{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}}$ <u>et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.</u>

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}\right) = +\infty$ donc $\underline{\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty}$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par encadrement, $\underline{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Q4 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x+1) + f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^{x+1}(1+t)} + \frac{1}{t^x(1+t)}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^{x+1}(1+t)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1)+f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1) f est décroissante sur $]1,+\infty[$

2) $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) \leq \frac{1}{x} \leq 1$ donc f est majorée sur $]1,+\infty[$.

Le théorème de la limite monotone montre alors que f admet une limite finie à droite en 1 que nous noterons L.

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x) = L$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x+1) = L$. Or $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Alors $f(x+1) \underset{x\mapsto 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et ainsi $\frac{1}{x} - f(x+1) \underset{x\mapsto 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

Alors $f(x) = \frac{1}{x} - f(x+1) \underset{x\mapsto 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$. $\quad f(x) \underset{x\mapsto 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

Q5 $\quad \forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) \leq f(x-1)$. ($f$ est décroissante sur $]0,+\infty[$).

$\forall x \in]1,+\infty[,\ 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$. $\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$.

Finalement $\forall x \in]1,+\infty[,\ \dfrac{1}{2x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$.

$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{2} \leq x f(x) \leq \frac{1}{2}\,\frac{x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

Il vient par encadrement $\lim (x f(x)) = \frac{1}{2}$. Ainsi $x f(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$.

Alors $f(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Q6 $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) + f(k+1) = \dfrac{1}{k}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(-1)^k}{k} = (-1)^k f(k) + (-1)^k f(k+1) = (-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1)$.

Donc $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1)\right] = -f(1) - (-1)^n f(n)$.

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\ln|t| - \ln|t+1|\right]_1^x = \left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^x = \ln \frac{x}{x+1} - \ln \frac{1}{2}$.

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \lim_{x \mapsto +\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2$. $f(1) = \ln 2$.

Alors $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 - (-1)^n f(n)$

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^n f(n)$.

Pour faire plaisir au concepteur, soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$(-1)^n f(n) = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$.

$f(n) = -(-1)^n \ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+n}}{k}$. Or $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{k+n} = (-1)^{n-k}$.

Ainsi $f(n) = (-1)^{n-1} \ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{k}$ et ceci pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$.

<u>Remarque</u>.. le concepteur attendait sans doute que l'on montre sa formule par récurrence...

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $|(-1)^n f(n)| = |f(n)| = f(n)$ et $\lim_{n \mapsto +\infty} f(n) = 0$.

Alors $\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} = \lim_{n \mapsto +\infty} \left(\ln 2 + (-1)^n f(n)\right) = \ln 2$.

Donc la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

ce qui n'est pas un scoop.

R.

EXERCICE 11

Exercice **ESCP 2006 1.18** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Déterminer le domaine de définition D de f.

Q2. Étudier le sens de variation de f sur D.

Q3. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

Q4. a) Calculer $f(0)$.

b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers la borne supérieure de D.

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. $\varphi_x : t \mapsto t^{-x}\sqrt{1+t}$ est continue sur $]0,1]$.

$1°/$ $\varphi_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{-x} = \dfrac{1}{t^x}$.

Et $\forall t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{t^x} \geq 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^1 \varphi_x(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 \frac{dt}{t^x}$ converge. Or le cours indique que $\int_0^1 \frac{dt}{t^x}$ converge si et seulement si $x < 1$.

Donc $\int_0^1 \varphi_x(t)\,dt$ converge si et seulement si $x<1$. Ainsi $\underline{D =]-\infty, 1[}$.

Q2 Soient x et y deux éléments de D tels que $x \leq y$.

$\forall t \in]0,1]$, $\ln t \leq 0$ donc $\forall t \in]0,1]$, $x \ln t \geq y \ln t$.

$\forall t \in]0,1]$, $-x\ln t \leq -y \ln t$.

Par croissance de la fonction exponentielle il vient : $\forall t \in]0,1]$, $t^{-x} = e^{-x\ln t} \leq e^{-y \ln t} = t^{-y}$.

Or $\forall t \in]0,1]$, $\sqrt{1+t} \geq 0$. Ainsi $\forall t \in]0,1]$, $t^{-x}\sqrt{1+t} \leq t^{-y}\sqrt{1+t}$.

En intégrant ($0 \leq 1$) on obtient $f(x) \leq f(y)$.

$\forall (x,y) \in D^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. f est croissante sur D.

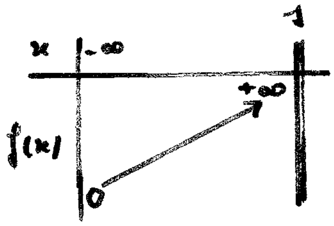
Q3 Soit $x \in D$. $\forall t \in]0,1]$, $1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$ et $t^{-x} \geq 0$.

$\forall t \in]0,1]$, $t^{-x} \leq t^{-x}\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}\, t^{-x}$, $\int_0^1 t^{-x}\,dt$ converge et $0 \leq 1$.

Alors $\int_0^1 t^{-x}\,dt \leq f(x) \leq \sqrt{2}\int_0^1 t^{-x}\,dt$.

$$\int_0^1 t^{-x}dt = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 t^{-x}dt = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{\varepsilon^{1-x}}{1-x}\right] \underset{x<1}{=} \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi $\forall x\in D =]-\infty,1[,\quad \frac{1}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{1-x}.$



$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{1-x} = 0.$

Alors $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

Q4 a) $f(0) = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt = \left[\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}[2^{3/2}-1].$ $\quad f(0) = \frac{2}{3}[2^{3/2}-1].$

b) Soit $x\in]-\infty,0[$. Soit $\varepsilon\in]0,1[$. Notons alors que $x\in D$ et $x+1\in D$.

Posons $\forall t\in]0,1]$, $u(t) = t^{-x}$ et $v(t) = \frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}$. u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$.

$\forall t\in]0,1]$, $u'(t) = -x\,t^{-x-1}$ et $v'(t) = \sqrt{1+t}$. En intégrant par parties il vient alors :

$$\int_\varepsilon^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt = \left[t^{-x}\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 -x\,t^{-x-1}\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}dt.$$

$$\int_\varepsilon^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\varepsilon^{-x}(1+\varepsilon)^{3/2} + \frac{2}{3}x\int_\varepsilon^1 t^{-x-1}(1+t)\sqrt{1+t}\,dt.$$

$$\int_\varepsilon^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\varepsilon^{-x}(1+\varepsilon)^{3/2} + \frac{2}{3}x\int_\varepsilon^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt + \frac{2}{3}x\int_\varepsilon^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt.$$

Or $\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{2}{3}\varepsilon^{-x}(1+\varepsilon)^{3/2}\right) = 0$ $(x>0)$ et $\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$ et $\int_0^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt$ convergent.

En faisant tendre ε vers 0 on obtient alors : $f(x) = \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3}x\,f(x+1) + \frac{2}{3}x\,f(x).$

$\forall x\in]-\infty,0[\quad (3-2x)f(x) = 2^{5/2} + 2x\,f(x+1).$

c) Admettons un instant que f est continue à gauche en 0 et rappelons que ce qui précède ne vaut que sur $]-\infty,0[$.

Alors $\lim_{x\to0^-}(2x\,f(x+1)) = \lim_{x\to0^-}\left((3-2x)f(x) - 2^{5/2}\right) = (3-2\times0)f(0) - 2^{5/2} = 3f(0) - 2^{5/2}.$

Or $3f(0) - 2^{5/2} = 2(2^{3/2}-1) - 2^{5/2} = -2 \neq 0.$

Alors $2x\,f(x+1) \underset{0^-}{\sim} -2$. Par translation $2(x-1)f(x) \underset{1^-}{\sim} -2$; $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}.$

Montrons que f est continue à gauche en 0 (ce qu'oublie de faire le rédacteur de la correction officielle!)

Soit $x \in]-\infty, 0[$ et soit $t \in]0,1]$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq u+1$ (archi connu). $\forall u \in \mathbb{R}$, $-u \geq 1-e^u$.

$\forall u \in]-\infty, 0]$, $-u \geq 1-e^u \geq 0$. $\underline{\forall u \in]-\infty, 0],\ 0 \leq 1-e^u \leq -u.}$

Or $-x \ln t \leq 0$ car $x<0$ et $\ln t \leq 0$. Appliquons alors ce qui précède à $u = -x\ln t$.

Il vient : $0 \leq 1-e^{-x\ln t} \leq x \ln t$. De plus $\sqrt{1+t} \geq 0$.

Donc $0 \leq \sqrt{1+t} - t^{-x}\sqrt{1+t} \leq x \ln t \sqrt{1+t}$ (1), ceci pour tout $t \in]0,1]$.

Montrons que $\int_0^1 x \ln t \sqrt{1+t}\, dt$ converge.

. $t \mapsto x \ln t \sqrt{1+t}$ est continue sur $]0,1]$.

. $x \ln t \sqrt{1+t} \underset{0}{\sim} x \ln t$

. $\forall t \in]0,1]$, $x \ln t \geq 0$ $(x<0)$

. $\int_0^1 x \ln t\, dt$ converge (archi connu).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^1 x \ln t \sqrt{1+t}\, dt$ converge.

En intégrant (1) il vient alors $0 \leq f(0) - f(x) \leq x \int_0^1 \ln t \sqrt{1+t}\, dt$.

Alors par encadrement $\lim_{x \to 0^-} (f(0) - f(x)) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

Donc f est continue à gauche en 0.

Comme nous l'avons vu plus haut ceci donne $\underline{\underline{f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}}}$.

EXERCICE 12

Exercice **PC** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 6. Oral ESCP 2001 1.15.**

Q1. Montrer que $P = X^5 - X + 1$ n'a qu'une racine réelle et que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note a l'unique racine réelle de P.

Q2. Trouver le domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{P(t)}\, \mathrm{d}t$. Déterminer les variations de f et étudier f aux bornes de son domaine.

Q3. Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$ et en a.

Q1. P est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 5x^4 - 1 = 5\left(x^4 - \dfrac{1}{5}\right) = 5\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x - \dfrac{1}{5^{1/4}}\right)\left(x + \dfrac{1}{5^{1/4}}\right)$.

Posons $b = \dfrac{1}{5^{1/4}}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 5(x^2 + b^2)(x - b)(x + b)$.

P' est strictement positive sur $]-\infty, -b[\cup]b, +\infty[$, strictement négative sur $]-b, b[$ et nulle en b et $-b$.

P est stictement croissante sur $]-\infty, -b]$ et sur $[b, +\infty[$, et strictement décroissante sur $[-b, b]$.

Un calcul simple montre que $P(-b) > 0$ et $P(b) > 0$. Alors $\forall x \in [-b, b],\ P(x) \geqslant P(b) > 0$ et $\forall x \in [b, +\infty[,\ P(x) \geqslant P(b) > 0$. P ne s'annule pas sur $[-b, +\infty[$.

P est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur <u>l'intervalle</u> $]-\infty, -b[$.

Donc P définit une bijection de $]-\infty, -b]$ sur l'intervalle $]\displaystyle\lim_{x \to -\infty} P(x), P(-b)[=]-\infty, P(-b)[$.

Comme $P(-b)$ est strictement positif ce dernier intervalle contient 0. Alors il existe un unique élément a de $]-\infty, -b[$ tel que $P(a) = 0$. Ceci achève de montrer que

$$\boxed{P \text{ admet une racine réelle et une seule}}.$$

Remarque. $a \sim -1,17$.

Supposons que c soit une racine de P dans $\mathbb{C}$ d'ordre au moins 2. $P(c) = P'(c) = 0$.

$c^5 - c + 1 = 0$ et $5c^4 - 1 = 0$. Alors $c^4 = 1/5$. Donc $0 = c^5 - c + 1 = c/5 - c + 1 = -4c/5 + 1$. $c = 5/4$. $c^4 = 625/256$ et $c^4 = 1/5$! ! Alors

$$\boxed{P \text{ n'a que des racines simples dans } \mathbb{C}}.$$

Q2. Il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a)\,Q$. Q n'a pas de racine réelle dans $\mathbb{R}$.

L'étude faite dans la première question montre également que $\forall x \in]a, +\infty[,\ P(x) > 0$.

Notons également que $x \to \dfrac{1}{P(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$.

$\forall x \in [1, +\infty[,\ \dfrac{1}{P(x)} > 0,\ \dfrac{1}{P(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^5}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}\, dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{P(t)}\, dt$.

Si x est élément de $]a, +\infty[$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\, dt$ existe car $1/P$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$.

Par conséquent si x est un élément de $]a,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,dt$ converge et x appatient au domaine de f.

$\forall x\in]a,1]$, $\dfrac{1}{P(x)}>0$, $\dfrac{1}{P(x)}=\dfrac{1}{(x-a)\,Q(x)}\underset{a}{\sim}\dfrac{1}{(x-a)\,Q(a)}$ (car $Q(a)$ n'est pas nul) et $\displaystyle\int_a^1\frac{1}{(x-a)\,Q(a)}\,dt$ diverge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent la divergence de $\displaystyle\int_a^1\frac{1}{P(t)}\,dt$.

Donc $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,dt$ diverge et a n'est pas dans le domaine de f.

Ceci indique également, que si x est un élément de $]-\infty,a[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,dt$ diverge et x n'est pas dans le domaine de f. Finalement :

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]a,+\infty[}.$$

$\forall x\in]a,+\infty[, f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,dt-\int_1^x\frac{1}{P(t)}\,dt=f(1)-\int_1^x\frac{1}{P(t)}\,dt.$

$x\to\displaystyle\int_1^x\frac{1}{P(t)}\,dt$ est la primitive de $1/P$ sur $]a,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. C'est donc une fonction dérivable sur $]a,+\infty[$.

Alors f est dérivable sur $]a,+\infty[$ et $\forall x\in]a,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{P(x)}<0$.

$$\boxed{f \text{ est stictement décroissante sur }]a,+\infty[}.$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(1)-\int_1^x\frac{1}{P(t)}\,dt\right)=f(1)-f(1)=0.$ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

$\dfrac{1}{P}$ est positive sur $]a,1]$ et $\displaystyle\int_a^1\frac{1}{P(t)}\,dt$ diverge donc $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^1\frac{1}{P(t)}\,dt=+\infty$.

Or $\forall x\in]a,+\infty[$, $f(x)=\displaystyle\int_x^1\frac{1}{P(t)}\,dt+f(1)$ donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=+\infty}$.

Q3. $\dfrac{1}{P(x)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^5}$ peut laisser que espérer $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^5}\,dt$. Notons que : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^5}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{1}{4\,x^4}$.

Soit x un élément de $[1,+\infty[$ et A un réel supérieur à x.

$$\left|\int_x^A\left(\frac{1}{t^5-t+1}-\frac{1}{t^5}\right)dt\right|\leqslant\int_x^A\left|\frac{1}{t^5-t+1}-\frac{1}{t^5}\right|dt=\int_x^A\frac{|t^5-t^5+t-1|}{t^5\,(t^5-t+1)}\,dt=\int_x^A\frac{t-1}{t^5\,(t^5-t+1)}\,dt.$$

x est dans $[1,+\infty[$ donc si $t\in[x,+\infty[$, $\dfrac{t-1}{t^5\,(t^5-t+1)}=\dfrac{t-1}{t^5\,(t(t^4-1)+1)}\leqslant\dfrac{t}{t^5\,(1\times(t^4-1)+1)}=\dfrac{1}{t^8}$.

Donc $\displaystyle\left|\int_x^A\left(\frac{1}{t^5-t+1}-\frac{1}{t^5}\right)dt\right|\leqslant\int_x^A\frac{1}{t^8}\,dt=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x^7}-\frac{1}{A^7}\right)\leqslant\frac{1}{7\,x^7}$. En faisant tendre a vers $+\infty$ il vient :

$$\left|\int_x^{+\infty}\left(\frac{1}{t^5-t+1}-\frac{1}{t^5}\right)dt\right|\leqslant\frac{1}{7\,x^7}\text{ ou }\left|f(x)-\frac{1}{4\,x^4}\right|\leqslant\frac{1}{7\,x^7}.$$

En multipliant par x^4 on peut encore écrire : $\left|x^4\,f(x)-\dfrac{1}{4}\right|\leqslant\dfrac{1}{7\,x^3}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{7\,x^3}=0$ le théorème d'encadrement donne : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^4\,f(x))=\frac{1}{4}$.

Comme $\dfrac{1}{4}$ n'est pas nul : $x^4\, f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}\cdot$ Alors

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\,x^4}\cdot}$$

Rappelons que $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t = +\infty$ donc $\displaystyle f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t + f(1) \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t.$

Retenons que $\displaystyle f(x) \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t.$

Rappelons également que $\displaystyle\frac{1}{P(x)} \underset{a}{\sim} \frac{1}{(x-a)\,Q(a)}\cdot$ Alors montrons que $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t \in]a,1]$, $\displaystyle\frac{1}{P(t)} - \frac{1}{(t-a)\,Q(a)} = \frac{1}{(t-a)\,Q(t)} - \frac{1}{(t-a)\,Q(a)} = \frac{Q(a)-Q(t)}{(t-a)\,Q(t)\,Q(a)}.$

$Q(a)-Q$ est un polynôme qui s'annule en a il est donc divisible par $X-a$. Ainsi il existe un élément H de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(a)-Q=(X-a)\,H$.

Alors $\forall t \in]a,1]$, $\displaystyle\frac{1}{P(t)} - \frac{1}{(t-a)\,Q(a)} = \frac{(t-a)\,H(t)}{(t-a)\,Q(t)\,Q(a)} = \frac{H(t)}{Q(t)\,Q(a)}\cdot$

$t \to \dfrac{H(t)}{Q(t)\,Q(a)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (Q n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$). Cette fonction possède donc une primitive L sur $\mathbb{R}$. Alors :

Alors $\forall x \in]a,1]$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 \left(\frac{1}{P(t)} - \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\right)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{H(t)}{Q(t)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t = L(1)-L(x).$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t\right) = L(1)-L(a).$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t}\left(\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t\right)\right] = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t = +\infty.$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(1 - \frac{\int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t}{\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t}\right) = 0.$

Ainsi $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t.$ Alors $\displaystyle f(x) \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t.$

$\forall x \in]a,1]$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{(t-a)}\,\mathrm{d}t = \ln|1-a| - \ln|x-a| = \ln(1-a) - \ln(x-a).$

$\displaystyle\lim_{x\to a}(-\ln(x-a)) = +\infty$ donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{(t-a)}\,\mathrm{d}t = \ln(1-a) - \ln(x-a) \underset{a}{\sim} -\ln(x-a).$

Finalement $\displaystyle f(x) \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{(t-a)\,Q(a)}\,\mathrm{d}t \underset{a}{\sim} -\frac{1}{Q(a)}\,\ln(x-a).$

$P=(X-a)\,Q$; $P'=Q+(X-a)\,Q'$. Alors $P'(a)=Q(a)$ ou $Q(a)=P'(a)=5a^4-1$. Donc

$$\boxed{f(x) \underset{a}{\sim} -\frac{1}{5a^4-1}\,\ln(x-a).}$$

R-

EXERCICE 13

Exercice | PC | **Etude d'une fonction définie par une intégrale impropre 7. ECRICOME 2009 Ex 2.**

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2 e^{2t}}\,dt$.

1. Domaine de définition de f :

(a) Justifier que pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ est convergente et donner sa valeur.

(b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2 e^{2t}}\,dt$.

Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va l'étudier sur $[0,+\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

$$x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2 e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\cdot$$

(b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}\cdot$

(c) Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) À l'aide du changement de variable $u = x\,e^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$$

(b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = \frac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante : $2\,f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot$

4. Étude locale de f et de f' en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ est convergente

(b) À l'aide des questions précédentes, démontrer que l'on a : $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$ et $f(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x^2\ln x}{2}\cdot$

(c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

R.

1. Domaine de définition de f :

(a) Soit a un réel strictement positif. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_a(t) = \begin{cases} a\, e^{-a\, t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

φ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\, dt$ existe et vaut 1. Il en est alors de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_a(t)\, dt$.

En remarquant que $\forall t \in [0, +\infty[,\ e^{-at} = \dfrac{1}{a}\, \varphi_a(t)$ on peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ existe et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif, l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\cdot}$$

(b) Soit x un réel. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[,\ \psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\, e^{2t}}$. ψ_x est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

- Supposons que x vaut 0. $\forall t \in [0, +\infty[, \psi_x(t) = \psi_0(t) = e^{-2t}$. (a) montre alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$

Remarque *f est définie en 0 et* $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_0(t)\, dt = \dfrac{1}{2}\cdot$

- Supposons x non nul. $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} (x^2\, e^{2t}) = +\infty$ donc $1 =_{t \to +\infty} o(x^2\, e^{2t})$. Alors $1 + x^2\, e^{2t} \underset{t \to +\infty}{\sim} x^2\, e^{2t}$.

Par conséquent : $\psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\, e^{2t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} e^{-2t}\sqrt{x^2\, e^{2t}} = e^{-2t}\, |x|\, e^t = |x|\, e^{-t}$.

◇ $\psi_x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} |x|\, e^{-t}$.

◇ $\forall t \in [0, +\infty[,\ |x|\, e^{-t} \geqslant 0$.

◇ D'après (a), $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|\, e^{-t}\, dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\, dt$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\, e^{2t}}\, dt \text{ converge.}}$$

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Soit x un réel strictement positif. Soit t un réel positif ou nul.

- $x\, e^t = |x\, e^t| = \sqrt{x^2\, e^{2t}} \leqslant \sqrt{1 + x^2\, e^{2t}}$. Ainsi : $x\, e^t \leqslant \sqrt{1 + x^2\, e^{2t}}$.
- $\left(x\, e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\, e^{2t} + 2\, x\, e^t\, \dfrac{e^{-t}}{2x} + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} = x^2\, e^{2t} + 1 + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} \geqslant 1 + x^2\, e^{2t}$.

Alors $\sqrt{1 + x^2\, e^{2t}} \leqslant \sqrt{\left(x\, e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2} = \left|x\, e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right|$.

Or $x\, e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$ est un réel positif. Ainsi $\sqrt{1 + x^2\, e^{2t}} \leqslant x\, e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout réel } t \text{ positif ou nul : } x\, e^t \leqslant \sqrt{1 + x^2\, e^{2t}} \leqslant x\, e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\cdot}$$

(b) Soit x un réel strictement positif.

R.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$ et $e^{-2t} \geqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^t\,e^{-2t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t\,e^{-2t} + \dfrac{e^{-t}}{2x}\,e^{-2t}$.

Ou : $\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,e^{-t} \leqslant \psi_x(t) \leqslant x\,e^{-t} + \dfrac{1}{2x}\,e^{-3t}\quad (\Delta)$.

D'après la première question $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt$ convergent et valent respectivement 1 et $\dfrac{1}{3}$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x\,e^{-t}+\frac{1}{2x}e^{-3t}\right)dt$ convergent et valent respectivement x et $x+\dfrac{1}{2x}\times\dfrac{1}{3}$.

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt$ converge également.

Alors l'inégalité (Δ) et la croissance de l'intégrale $(0\leqslant+\infty)$ donnent $x \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt \leqslant x+\frac{1}{6x}$ ou $x\leqslant f(x)\leqslant x+\dfrac{1}{6x}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif} : x \leqslant f(x) \leqslant x+\frac{1}{6x}.}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ x \leqslant f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donnent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant f(x)-x \leqslant \dfrac{1}{6x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6x}=0$ donnent par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=0$. Alors

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet pour asymptote en } +\infty \text{ la droite d'équation } y=x.}$$

Remarques *1.* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x)-x = \dfrac{1}{6x} \geqslant 0$. *Notons encore que* $f(0)-0=f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x)-x\geqslant 0$.

Mieux encore : $\forall x \in]-\infty,0[,\ f(x)\geqslant 0\geqslant x$ *donc* $\forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)-x\geqslant 0$. *Finalement :* $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-x\geqslant 0$.

Ainsi la courbe représentative de f *est au-dessus de la droite d'équation* $y=x$.

2. Par parité, la droite d'équation $y=-x$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *en* $-\infty$ *et se trouve au-dessous de cette courbe.*

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) Soit x un réel strictement positif.

Version 1. La fonction $t\to x\,e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u=x\,e^t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,dt = x^2\int_0^A\frac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t\,dt = x^2\int_x^{x\,e^A}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(x\,e^A)=+\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ converge et

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,dt = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

Version 2. Ramons pour utiliser avec précision le théorème du programme (qui en particulier "fonctionne" sur des intervalles ouverts ! !).

Posons $\forall t \in]0,+\infty[,\ \ell(t) = x\,e^t$ et $\forall u \in]x,+\infty[,\ g(u) = x^2\,\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$.

ℓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[,\ \ell'(t) = x\,e^t > 0$.

ℓ est donc continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle définit alors une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{t\to 0}\ell(t), \lim\limits_{t\to+\infty}\ell(t)[$ c'est à dire sur $]x,+\infty[$. Ainsi :

- ◇ g est continue sur $]x,+\infty[$.
- ◇ ℓ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]x,+\infty[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

Notons que $\forall t \in]0,+\infty[,\ g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t) = x^2\,\dfrac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t = e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}} = \psi_x(t)$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ converge et est égale à $f(x)$. Ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,dt$ donc $f(x)$.

Finalement $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,du = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du \text{ converge et } f(x) = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.}$$

(b) Notons que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = x^2\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - \int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du\right)$.

Posons $\forall u \in]0,+\infty[,\ h(u) = \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$. h est continue sur $]0,+\infty[$. La primitive H de h sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Notons que $\forall x \in]0,+\infty[,\ H(x) = \displaystyle\int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - H(x)\right)$.

$x \to x^2$ et $x \to \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - H(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ($\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ est une constante...).

Par produit :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = 2\,x\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - H(x)\right) - x^2\,h(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = 2\,x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{1}{x}\left(2\,x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - \sqrt{1+x^2}\right)$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

R.

(c) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u \in [x,+\infty[,\ v(u) = \sqrt{1+u^2}$ et $w(u) = -\dfrac{1}{2\,u^2}\cdot$

v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$. De plus $\forall u \in [x,+\infty[,\ v'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $w'(u) = \dfrac{1}{u^3}\cdot$

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \left[-\frac{1}{2\,u^2}\sqrt{1+u^2}\right]_x^A - \int_x^A \left(-\frac{1}{2\,u^2}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot$$

$\diamond$ $\dfrac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{2\,A^2} = \dfrac{1}{2\,A}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\,A} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} = 0.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}\cdot$

$\diamond$ $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot$

Alors $2\,f(x) = 2\,x^2 \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \text{ converge et } 2\,f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot}$$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\cdot$

Soit x un réel strictement positif. $u \to \dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $[x,+\infty[$, $x < +\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge. Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} > 0$. Donc $x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} > 0.$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) > 0.$

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

4. Etude locale de f et f′ en 0 :

(a) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u \in [x,+\infty[,\ z(u) = \ln u$ et $t(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot$ Notons que $\forall u \in [x,+\infty[,\ t(u) = (1+u^2)^{-\frac{1}{2}}.$

z et t sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$.

De plus $\forall u \in [x,+\infty[,\ z'(u) = \dfrac{1}{u}$ et $t'(u) = -\dfrac{1}{2}(2\,u)(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A - \int_x^A (\ln u)\left(-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)du = \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\cdot$$

R.

$\diamond$ $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln A}{A}$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln A}{A} = 0$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} = 0$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\diamond$ $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} : \int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du \text{ converge et } \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du.}$$

Nous venons de voir que pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge.

En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge. Ne reste plus qu'à montrer que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge.

$\lim\limits_{u\to0^+} \dfrac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ car $\lim\limits_{u\to0^+} (u\,\ln u) = 0$ et $\lim\limits_{u\to0^+} (1+u^2)^{\frac{3}{2}} = 1$.

Alors $u \to \dfrac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité à $[0,1]$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{1} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du \text{ converge.}}$$

(b) $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2} =}{x} = x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{x\,\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$.

$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = -\dfrac{x\,\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ et $-x\,\ln x \neq 0$.

Alors $\forall x \in]0,1[,\ \dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ (car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du$ converge).

Alors $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{f'x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\,\ln x.}$$

Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

$2\,f(x) - \sqrt{1+x^2} = x\,f'(x)$. $2\left(f(x) - \dfrac{1}{2}\right) = 2\,f(x) - 1 = x\,f'(x) + \sqrt{1+x^2} - 1 = x\,f'(x) + \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

$2\left(f(x) - \dfrac{1}{2}\right) = x\,f'(x) + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

R.

En divisant par $-x^2 \ln x$ qui n'est pas nul on obtient : $2\,\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\ln x} = \dfrac{f'(x)}{-x\ln x} - \dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{-x\ln x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{\ln x}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(2\,\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\ln x}\right) = 1$.

Alors $2\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^2\ln x$ et :

$$\boxed{f(x)-\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}.}$$

(c) Nous avons déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

∇ Version 1 $f(x)-\dfrac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x^2\ln x}{2}$ et par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2\ln x}{2}\right) = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$. Par conséquent f est continue à droite en 0. Ainsi f est continue SUR $[0,+\infty[$.

$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$ et par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(-x\ln x) = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

Résumons : f est continue sur $[0,+\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et f' admet une limite finie à droite en 0. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

∇ Version 2 Retrouvons rapidement ce résultat en utilisant très strictement le programme.

Soit $\tilde{f}$ la restriction de f à $]0,+\infty[$.

$\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\tilde{f})'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ donc $(\tilde{f})'$ admet une limite finie en 0.

Le cours indique alors que $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction $\widehat{\tilde{f}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $]0,+\infty[$.

De plus par continuité : $\displaystyle\widehat{\tilde{f}}(0) = \lim_{x\to 0}\widehat{\tilde{f}}(x) = \lim_{x\to 0^+}\widehat{\tilde{f}}(x) = \lim_{x\to 0^+}\tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ainsi $\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $[0,+\infty[$. f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Remarque *Ceci montre que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$. Notons que nous ne pouvons pas encore parler de $f'(0)$ car nous n'avons pas montré que f est dérivable en 0.*

Par parité $\forall x \in]-\infty,0]$, $f(x) = f(-x)$.

$x \to -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$, $\forall x \in]-\infty,0]$, $-x \in [0,+\infty[$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Par composition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

Alors f est dérivable à gauche en 0 et $\displaystyle f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f(-x)$ et f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -f'(-x)$.

Donc : $\displaystyle f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\big(-f'(-x)\big) = -\lim_{x\to 0^-} f'(-x) = -\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -f'_d(0)$.

$f'_g(0) = -f'_d(0)$ or $f'_d(0) = 0$. Ainsi $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$$

EXERCICE 14

Exercice **Limite de l'intégrale et intégrale de la limite...** $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t}\,dt.$

Q1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ (on pourra intégrer par parties). Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q2. On rappelle que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

Montrer que : $|f(x) - I| = |x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du| \leqslant x \int_0^1 \frac{1}{u+x}\,du + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du.$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\cdot$ Morale ?

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $h_x(t) = \dfrac{\sin(xt)}{1+t}$.

h_x est continue sur $[0,+\infty[$

1er cas.. $x = 0$. h_x est alors nulle sur $[0,+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)$ existe et vaut 0. f est définie en 0 et $f(0) = 0$.

2ème cas.. $x \neq 0$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $u(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et $v_x(t) = -\dfrac{\cos(xt)}{x}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $u'(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $v_x'(x) = \sin(xt)$.

Soit $A \in [0,+\infty[$. En intégrant par partie il vient :

$$\int_0^A \frac{\sin xt}{1+t}\,dt = \int_0^A u(t)\,v_x'(t)\,dt = \Big[u(t)\,v_x(t)\Big]_0^A - \int_0^A u'(t)\,v_x(t)\,dt.$$

$$\int_0^A h_x(t)\,dt = -\frac{1}{x}\,\frac{\cos(xA)}{1+A} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^A \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt \qquad (1)$$

$$\left|-\frac{1}{x}\,\frac{\cos(xA)}{1+A}\right| \leqslant \frac{1}{|x|}\,\frac{1}{1+A} \text{ et } \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{|x|}\,\frac{1}{1+A}\right) = 0.$$

Alors par encadrement $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\,\frac{\cos(xA)}{1+A}\right) = 0.$

Donc $A \mapsto -\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\cos(xA)}{1+A} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$.

Dans ces conditions (1) montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt$. Montrons la convergence de cette dernière intégrale

$\forall t \in [1,+\infty[,\ \left|\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\right| \leq \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{t^2}.$

1. $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leq \left|\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (2>1 !)

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_{\underline{\underline{0}}}^{+\infty} \left|\frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\right| dt$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t)^2}\,dt$

est absolument convergente donc convergente. Donc $\int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt$ converge et f est définie en x.

Finalement $\underline{\underline{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-xt)}{1+t}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = -f(x).$

$\underline{\underline{f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}}$

(Q2) $\underline{\underline{\text{Lemme.}}}$ $\forall z \in \mathbb{R},\ |\sin z| \leq |z|.$

$\sin$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall \omega \in \mathbb{R},\ |\sin'\omega| = |\cos \omega| \leq 1.$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$\forall z \in \mathbb{R},\ |\sin z - \sin 0| \leq 1\,|z - 0|.$ donc $\forall z \in \mathbb{R},\ |\sin z| \leq |z|$ ▲

Soit x un réel strictement positif. Posons $\forall t \in [0,+\infty[,\ \varphi(t) = xt$

φ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, strictement croissante et de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Ceci autorise le changement de variable $u = xt$ dans ce qui suit.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt \underset{\substack{u=xt\\ t=\frac{1}{x}u\\ dt=\frac{1}{x}du}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1+\frac{u}{x}}\,\frac{1}{x}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du.$$

sous ces conditions $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Comme la première converge, la seconde converge.

Finalement $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du$.

$$|f(x)-I| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{-x\sin u}{u(u+x)}\,du\right| = \left|x\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right|.$$

$|f(x)-I| = x\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right|$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et soit $A \in]1,+\infty[$.

$$\underbrace{\left|\int_\varepsilon^A \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right|}_{I(\varepsilon,A)} = \left|\int_\varepsilon^1 \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du + \int_1^A \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right| \leq \left|\int_\varepsilon^1 \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right| + \left|\int_1^A \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right|.$$

$$|I(\varepsilon,A)| \underset{\substack{\varepsilon<1\\A>1}}{\leq} \int_\varepsilon^1 \frac{|\sin u|}{|u(u+x)|}\,du + \int_1^A \frac{|\sin u|}{|u(u+x)|}\,du \underset{\substack{\varepsilon<1\\A>1}}{\leq} \int_\varepsilon^1 \frac{|u|}{|u||u+x|}\,du + \int_1^A \frac{1}{|u||u+x|}\,du.$$

$\varepsilon<1$ et $A>1$

$$|I(\varepsilon,A)| \leq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{u+x}\,du + \int_1^A \frac{1}{u(u+x)}\,du \underset{u(u+x)\geq u^2>0}{\leq} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{u+x}\,du + \int_1^A \frac{1}{u^2}\,du.$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{u+x}\,du$ existe car $u \mapsto \frac{1}{u+x}$ est continue sur $[0,1]$ $(x>0)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge car $2>1$. En faisant tendre ε vers 0 puis A vers $+\infty$ il vient :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,du\right| \leq \int_0^1 \frac{du}{u+x} + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$

Alors $|f(x)-I| \leq x\int_0^1 \frac{du}{u+x} + x\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$.

$$x\int_0^1 \frac{du}{u+x} = x\left[\ln(1+x) - \ln x\right] = x\ln(1+x) - x\ln x.$$

Alors $\lim_{x\to 0} x\int_0^1 \frac{du}{u+x} = 0 - 0 = 0$. Donc $\lim_{x\to 0^+}\left(x\int_0^1 \frac{du}{u+x} + x\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}\right) = 0$.

Par encadrement on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = I = \frac{\pi}{2}$. Or $f(0) = 0$.

Donc f n'est pas continue à droite en 0. f n'est pas continue en 0.

Et pourtant $(x,t) \to \frac{\sin(xt)}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

Notons encore que $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t} dt = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^{+\infty} \text{“} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(xt)}{1+t} \text{”} dt$.

Qu'on se le dise.

Exercice | **ESCP 97** **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

f est une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout élément x de $]0,1]$ on pose :

$$g(x) = \ln x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$$

Q1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$.

Q2. Montrer que g se prolonge en une fonction $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Préciser $\widehat{g}(0)$.

Q3. Ici : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$. $\widehat{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$?

Q1 • f est continue sur $[0,1]$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$.

• $t \mapsto f(t)\ln t$ est continue sur $]0,1]$ donc $x \mapsto \int_1^x f(t)\ln t\,dt$ est dérivable sur $]0,1]$; $x \mapsto \int_x^1 f(t)\ln t\,dt$ également.

• $\ln$ est dérivable sur $]0,1]$.

Par produit et somme, g est dérivable sur $]0,1]$.

$\forall x \in]0,1],\ g'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \ln x\, f(x) - f(x)\ln x = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car c'est une primitive de f qui est continue sur $[0,1]$.

Par produit g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$.

Q2 * g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ (1)

* Soit F une primitive de f.

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0)$$

g' admet une limite finie à gauche en 0 (2)

(1) et (2) montrent que g se prolonge en une fonction $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Notons que $\widehat{g}'(0) = f(0)$.

$\hat{g}$ est continue en 0 donc $\hat{g}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\hat{g}(x)$. Ainsi $\hat{g}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\int_0^x f(t)\,dt\right)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x\ln x)\ \frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right]=0\times f(0)=0.$$

f est continue sur $[0,1]$ donc $M=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$ existe.

$h : t\mapsto f(t)\ln t$ est continue sur $]0,1]$

1) $\forall t\in\,]0,1]$, $\quad 0\leq |f(t)\ln t|\leq M|\ln t|=-M\ln t$

2) $\int_0^1(-M\ln t)\,dt$ converge... car comme $\left(-M\ln t\underset{t\to 0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right)$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_0^1|f(t)\ln t|\,dt$.

Alors $\underline{\int_0^1 f(t)\ln t\,dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

Ainsi $\hat{g}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\ln t\,dt\right]=0+\int_0^1 f(t)\ln t\,dt$.

$$\underline{\underline{\hat{g}(0)=\int_0^1 f(t)\ln t\,dt.}}$$

Q3 $\hat{g}'(0)=f(0)=0$ et $\forall x\in\,]0,1]$, $\hat{g}'(x)=g'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^x t^{1/2}\,dt$

$\forall x\in\,]0,1]$, $\hat{g}'(x)=\frac{1}{x}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]=\frac{2}{3}\sqrt{x}$.

Alors $\forall x\in[0,1]$, $\hat{g}'(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}$.

$\underline{\underline{\hat{g}' \text{ n'est pas dérivable en 0 donc } \hat{g} \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1].}}$

Exercice **Version longue** **PC** **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Dans les questions 1, 2 et 3, f est un élément de E.

Q1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

b) Montrer que $x \to \ln x \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet pour limite 0 en 0.

Q2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Dans la suite on pose $I(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$.

Q3. On pose $F(x)=\begin{cases}\ln x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t & \text{si } x\in]0,1]\\ I(f) & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et préciser sa fonction dérivée.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$ et que :

$$\forall x\in]0,1],\ xF''(x)+F'(x)=f(x)$$

c) Préciser $F(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(xF''(x))$.

Q4. φ est l'application qui à tout élément f de E associe l'application F définie dans Q3.

a) Montrer que φ est un endomorphisme injectif de E.

b) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments g de E tels que :

- $g(1)=0$;
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$;
- $g''(x)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0.

R

(Q1) a) Soit $\tilde{F}$ une primitive de f sur $[0,1]$. $\tilde{F}$ est dérivable en 0.

$$f(0)=\tilde{F}'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right).$$

Ainsi $\underline{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)=f(0)}$

b) $\forall x\in]0,1]$, $\ln x\int_0^x f(t)dt=(x\ln x)\,\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$

$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(0)$. Alors $\underline{\lim_{x\to0^+}\left(\ln x\int_0^x f(t)dt\right)=0}$.

(Q2) f est continue sur $[0,1]$. $[0,1]$ étant un segment, f est bornée sur $[0,1]$.

$\exists M\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[0,1]$, $|f(t)|\leq M$.

$h: t\mapsto f(t)\ln t$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall t\in]0,1]$, $0\leq|h(t)|=|f(t)||\ln t|\leq M|\ln t|=-M\ln t$.

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_\varepsilon^1\ln t\,dt\right)=\lim_{\varepsilon\to0^+}[t\ln t-t]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon)=-1$; $\int_0^1\ln t\,dt$ converge.

La positivité de $|h|$ et la convergence de $\int_0^1(-M\ln t)dt$ donnent la convergence de $\int_0^1|h(t)|dt$

Alors $\underline{\int_0^1 f(t)\ln t\,dt \text{ est absolument convergente}}$ ... donc convergente.

(Q3) a) $x\mapsto\int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0 ; cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ donc sur $]0,1]$

$x\mapsto\int_1^x f(t)\ln t\,dt$ est la primitive de $t\mapsto f(t)\ln t$ sur $]0,1]$ qui prend la valeur 0 en 1 ; cette fonction est dérivable sur $]0,1]$. $x\mapsto\int_x^1 f(t)\ln t\,dt$ également.

Comme $x\mapsto\ln x$ est aussi dérivable sur $]0,1]$:

$\underline{F \text{ est dérivable sur }]0,1]}$.

R

$\forall x \in]0,1], F'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + f(x)\ln x - f(x)\ln x = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ étant continues sur $]0,1]$: F' est continue sur $]0,1]$.

Ainsi <u>F est de classe C^1 sur $]0,1]$.</u>

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\ln x \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt\right) = 0 + \int_0^1 f(t)dt = I(f) = F(0)$; F est continue en 0.

Ainsi F est continue sur $[0,1]$ et de classe C^1 sur $]0,1]$. (1)

Notons alors que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(0)$ (2)

Le théorème de la limite de la dérivée et son extension permettent de dire à partir de (1) et (2) que <u>F est de classe C^1 sur $[0,1]$.</u>

$$\forall x \in [0,1],\ F'(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

b) $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ sont C^1 sur $]0,1]$ donc F' est de classe C^1 sur $]0,1]$.

<u>F est donc de classe C^2 sur $]0,1]$.</u>

$\forall x \in]0,1], F''(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x).$

$\forall x \in]0,1], xF''(x) + F'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + f(x) + \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(x).$

<u>$\forall x \in]0,1],\ xF''(x) + F'(x) = f(x).$</u>

c) $F(1) = \ln 1 \int_0^1 f(t)dt + \int_1^1 f(t)\ln t\,dt = 0$; $F(1) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (xF''(x)) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (f(x) - F'(x)) = f(0) - f(0) = 0$; <u>$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (xF''(x)) = 0.$</u>

Q4 a). Notons que $\forall f \in E$, $\varphi(f) \in E$ ($\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$).

• Notons que φ est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(f,g) \in E^2$.

Notons que $\varphi(\lambda f+g)=\lambda\varphi(f)+\varphi(g)$. Il nous faut donc montrer que :

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x)=\lambda\varphi(f)(x)+\varphi(g)(x)$ et $\varphi(\lambda f+g)(0)=\lambda\varphi(f)(0)+\varphi(g)(0)$.

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x)=\ln x\int_0^x(\lambda f+g)(t)\,dt+\int_x^1(\lambda f+g)(t)\ln t\,dt=\ln x\left(\lambda\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x g(t)\,dt\right)+\lambda\int_x^1 f(t)\ln t\,dt+\int_x^1 g(t)\ln t\,dt$

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(\lambda f+g)(x)=\lambda\left[\ln x\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\ln t\,dt\right]+\left[\ln x\int_0^x g(t)\,dt+\int_x^1 g(t)\ln t\,dt\right]=\lambda\varphi(f)(x)+\varphi(g)(x)$.

De plus $\varphi(\lambda f+g)(0)=I(\lambda f+g)=\int_0^1(\lambda f+g)(t)\ln t\,dt=\lambda\int_0^1 f(t)\ln t\,dt+\int_0^1 g(t)\ln t\,dt=\lambda I(f)+I(g)=\lambda\varphi(f)(0)+\varphi(g)(0)$.

toutes les intégrales convergent.

Ceci achève de prouver que <u>φ est un endomorphisme de E.</u>

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Posons $F=\varphi(f)$. $F=0_E$!

Alors $\forall x \in]0,1]$, $f(x)=xF''(x)+F'(x)=0$, $\forall x \in]0,1]$, $f(x)=0$.

Rappelons que f est continue en 0, alors $f(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=0$.

Finalement $f=0_E$.

$\operatorname{Ker}\varphi=\{0_E\}$. <u>$\varphi$ est un endomorphisme injectif de E.</u>

<u>Remarque</u>. φ n'est pas surjectif car $\operatorname{Im}\varphi$ est contenue dans l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc $\operatorname{Im}\varphi \subsetneq E$.

b) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois points.

Notons que $\operatorname{Im}\varphi=\mathcal{S}$.

Soit $h \in \operatorname{Im}\varphi$. $\exists f \in E$, $h=\varphi(f)$. Alors $h=F$.

Ainsi • $h(1)=F(1)=0$ • $h=F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x h(x))=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(xF''(x))=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{h(x)}{1/x}=0$; $h(x)=o(1/x)$ au voisinage de 0.

Par conséquent $h \in \mathcal{S}$. Finalement <u>$\operatorname{Im}\varphi \subset \mathcal{S}$</u>.

Réciproquement soit $g \in S$. Montrons que : $\exists f \in E,\ \varphi(f)=g$.

Q3 invite à poser : $\forall x \in]0,1],\ f(x)= x g''(x)+g'(x)$ et $f(0)=g'(0)$.

Il reste plus qu'à vérifier que : $f \in E$ et $\varphi(f)=g$.

$x \mapsto x g''(x)+g'(x)$ est continue sur $]0,1]$ car g est de classe C^2 sur $]0,1]$.

donc f est continue sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} (xg''(x)+g'(x)) \underset{*}{=} g'(0) = f(0)$; f est continue en 0.

$*$ $g''(x)=o(\frac{1}{x})$ au voisinage de 0 et g' est continue en 0.

Ainsi g est continue sur $[0,1]$. $g \in E$.

Vérifions que $\varphi(f)=g$. Posons $F=\varphi(f)$ et montrons que $F'=g'$.

Observons que $F'(0)=f(0)=g'(0)$.

Soit $x \in]0,1]$, $F'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

Soit $\varepsilon \in]0,1]$, $\int_\varepsilon^x f(t)dt=\underbrace{\int_\varepsilon^x tg''(t)dt}_{\text{ipp}}+\int_\varepsilon^x g'(t)dt=[tg'(t)]_\varepsilon^x-\int_\varepsilon^x g'(t)dt+\int_\varepsilon^x g'(t)dt$.

$\int_\varepsilon^x f(t)dt = xg'(x)-\varepsilon g'(\varepsilon)$; alors $\int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x f(t)dt = xg'(x)-0=xg'(x)$.

Ainsi $F'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = g'(x)$.

$\forall x \in [0,1]$, $F'(x)=g'(x)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1]$, $F(x)=g(x)+\lambda$.

Or $F(1)=0=g(1)$ donc $\lambda=0$ et ainsi $g=F=\varphi(f)$; $g \in \operatorname{Im}\varphi$.

Finalement $\operatorname{Im}\varphi = S$.