CALCUL INTÉGRAL

CALCUL INTÉGRAL

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

P Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des séries, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

! Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

A partir de programme des concours 2015 la construction de l'intégrale est hors programme. On revient donc à la notion de primitive suivie de la notion d'intégrale.

Dans la suite les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

Sauf mention du contraire, dans tout ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Nous ne le dirons pas à chaque fois.

De même lorsque nous écrirons $[a, b]$, et sauf cas particulier, il sera entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Conformément au programme nous donnerons (le plus souvent) des énoncés pour des "fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$". Clairement beaucoup de résultats s'étendent à des fonctions dont le domaine de définition est une réunion finie (ou infinie et non pathologique) d'intervalles.

I PRIMITIVES ET INTÉGRALES

► 1. Notion de primitive

Déf. 1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

Une **primitive de f sur I** est une application dérivable F de I dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Th. 1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1. Si F est une primitive de f sur I, pour tout réel λ, $F + \lambda$ est encore une primitive de f sur I.

2. Si F est une primitive de f sur I, toutes les primitives de f sur I diffèrent de F d'une constante.

Autrement dit on obtient toutes les primitives de f sur I en ajoutant à F les constantes.

★★ Le premier résultat vaut si I n'est pas un intervalle mais pas le second ! $x \to \dfrac{1}{x}$ a sur $\mathbb{R}^*$ des primitives qui ne différent pas néccessairement d'une constante.

Th. 2 I est un $\boxed{\textbf{intervalle}}$ de $\mathbb{R}$. f est une application de I dans $\mathbb{R}$ possèdant une primitive sur I. c est un élément de I et λ un réel.

Il existe F_1 une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur λ en c ($\forall x \in I,\ F_1(x) = F(x)+\lambda-F(c)$).

★★ Ici encore ce résultat tombe en défaut si I n'est pas un intervalle.

★★ La fonction partie entière ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

▶ 2. Le cas des fonctions continues

Th. 3 Soit f une application **continue** d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. c est un élément de I et λ est un réel.

- f possède une primitive sur I.
- On obtient toutes les primitives de f en ajoutant à l'une d'entre elles les constantes.
- f possède une primitive sur I et une seule qui prend la valeur λ en c.
- Toute primitive F de f sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

★★ Il existe des fonctions qui possèdent des primitives sans être continue.

Posons $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 2\,x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}\cdot$ $F(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, F(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue en 0.

▶ 3. Quelques résultats utiles pour calculer des primitives...

Th. 4 u et v sont deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

- uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur I.
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est une primitive sur I de $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}\cdot$
- Si n appartient à $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ sur I.

Th. 5 u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur I.

- $\ln |u|$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I.
- Si n appartient à $\mathbb{Z}$ et si n est diférent de -1, $\dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}$ est une primitive de $u'u^n$ sur I.

Th. 6 u est une application de I dans $\mathbb{R}$ dérivable et strictement positive sur I.

- $\sqrt{u}$ est une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I.
- Si α appartient à $\mathbb{R}$ et si α est différent de -1, $\dfrac{1}{\alpha+1}\,u^{\alpha+1}$ est une primitive de $u'u^\alpha$ sur I.

P Pour trouver une primitive de $f = \dfrac{u'}{u^\beta}$ il est fortement conseillé de partir de $f = u'\,u^{-\beta}$, lorsque $\beta \neq 1$...

▶ 4. Quelques formules de trigonométrie utiles pour obtenir des primitives...

★★★ Il est essentiel de savoir par coeur les formules de trigonométrie et de maîtriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

Prop. 1 $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2\,a)}{2}$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbb{R},\ \sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2\,a)}{2}$

Prop. 2 a et b sont deux réels.

$\sin a\, \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$ $\qquad$ $\cos a\, \sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\Big)$

$\cos a\, \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$ $\qquad$ $\sin a\, \sin b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$

Prop. 3 θ est un réels tel que $t = \tan \dfrac{\theta}{2}$ soit défini c'est à dire tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\,\pi]$.

$\boxed{\sin\theta = \dfrac{2\,t}{1+t^2}}$ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\boxed{\tan\theta = \dfrac{2\,t}{1-t^2} \text{ si } \theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\,\pi]}$

▸ 5. Primitives usuelles

	f	D	**Une primitive de f sur D**
$n \in \mathbb{N}$	$x \to x^n$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1}$
$n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$x \to \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to -\dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{1}{x^{n-1}}$
	$x \to \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \ln\lvert x\rvert$
	$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \sqrt{x}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$x \to x^\alpha$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$
$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$x \to a^x$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{\ln a}\, a^x$
	$x \to \dfrac{\ln x}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{2}\ \ln^2 x$
	$x \to \dfrac{1}{x\ln x}$	$\mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$x \to \ln\lvert \ln x\rvert$
	$x \to \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to x\ln x - x$
	$x \to \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \to \sin x$
	$x \to \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \to -\cos x$
	$x \to 1 + \tan^2 x$	$D_{\tan}$	$x \to \tan x$
	$x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D_{\tan}$	$x \to \tan x$
	$x \to 1 + \cot^2 x$	$D_{\cot}$	$x \to -\cot x$
	$x \to \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$D_{\cot}$	$x \to -\cot x$
$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$x \to \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{a}\ \sin(ax+b)$
$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$x \to \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \to -\dfrac{1}{a}\ \cos(ax+b)$

	f	D	**Une primitive de f sur D**
	$x \to \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \to \arctan x$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\mathbb{R}$	$x \to \dfrac{1}{a}\ \arctan \dfrac{x}{a}$

Et encore...

	f	D	**Une primitive de f sur D**
	$x \to \tan x$	$D_{\tan}$	$x \to -\ln\lvert\cos x\rvert$
	$x \to \dfrac{1}{\sin x}$	$D_{\cot}$	$x \to \ln\lvert\tan \dfrac{x}{2}\rvert$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\mathbb{R}$	$x \to \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$
	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \to \arcsin x$
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$x \to \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$]-a,a[$	$x \to \dfrac{1}{a}\ \arcsin \dfrac{x}{a}$

II INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

▶ 1. Définition

Th. 7 et **déf. 2** Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux élément de I.

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Si F et G sont deux primitives de f sur I : $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

On appelle **intégrale de** f **de** a **à** b le réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Cette intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \cdots = \int_a^b f(\clubsuit)\,\mathrm{d}\clubsuit$

★ Dans $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, t est une variable muette d'où les autres notations...

Th. 8 et **déf. 3** Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Soit c un élément de I.

- **PP** $h : x \to \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en c.
- En particulier h est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ h'(x)=f(x)$.

Th. 9 $\boxed{\textbf{SD}}$ I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. u est une application dérivable de J dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{à valeurs dans } I}$. F est une primitive de f sur I et c est un élément de I.

1. $\forall x \in J,\ \displaystyle\int_c^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(u(x)) - F(c)$.

2. $\varphi : x \to \displaystyle\int_c^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$\varphi'(x) = u'(x) f\big(u(x)\big).$$

Th. 10 $\boxed{\textbf{SD}}$ I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue sur I dans R. u et v sont deux applications dérivables de J dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{à valeurs dans } I}$. F est une primitive de f sur I.

1. $\forall x \in J,\ \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big)$.

2. $\psi : x \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$\psi'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big) - u'(x) f\big(u(x)\big).$$

★★★ Les points 2 de ces deux derniers résultats ne sont pas dans le programme. On les redémontrera en partant du point 1. Ne pas oublier de $\boxed{\text{justifier la dérivabilité}}$ en utilisant par exemple le théorème de composition des fonctions dérivables. On évitera de dire que φ (resp. ψ) est dérivable comme intégrale d'une fonction continue ! !

▶ 2. Relation de Chasles

Th. 11 **Relation de Chasles** f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a, b et c sont des éléments de I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ 3. Linéarité de l'intégrale

Th. 12 **Linéarité** f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. λ est un réel.

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

L'application qui à tout élément f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

▶ 4. Croissance de l'intégrale

Th. 13 **Croissance** f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. f est positive sur $[a,b]$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Cor. 1 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant g(t)$

$$\text{Alors : } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. 2 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. m et M sont deux réels tels que : $m \leqslant M$. On suppose :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$.

$$\text{Alors : } \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

PP Ce dernier résultat rend alors aisé l'encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone. Qu'on se le dise et qu'on se l'utilise. Voir à ce propos les compléments.

★ **P** Dans les résultats précédents des inégalités strictes dans les hypothèses donnent des inégalités strictes dans les conclusions. Voir mieux dans les compléments.

Cor. 3 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que : $\boxed{a \leqslant b}$.

$$\text{Alors : } \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Notons que l'on a encore le résultat suivant. **SD** f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que : $\boxed{a \leqslant b}$. Alors : $\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a) \underset{t \in [a,b]}{\mathrm{Max}} |f(t)|$.

Le dernier majorant était au programme précédent...

★★★ Il est indispensable avant d'intégrer une inégalité de vérifier que les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant. Il est également indispensable de mentionner cette hypothèse dans sa solution.

★★★ Les réciproques des résultats précédents sont fausses.

★★★ La première chose à faire avant toute majoration ou minoration d'une intégrale est de regarder la position relative des bornes et de se ramener au cas où elles sont dans l'ordre croissant.

P Pour majorer la valeur absolue d'une intégrale la première étape consiste à vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant et à faire "passer la valeur absolue à l'intérieur " de l'intégrale.

P L'inégalité $\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (avec f continue sur $[a, b]$ et $a \leqslant b$) s'utilise le plus souvent de la gauche vers la droite mais on n'oubliera pas, si nécessaire, de l'utiliser de la droite vers la gauche.

▶ 5. Fonction continue de signe constant et d'intégrale nulle

Th. 14 **SD** f est une application **continue** de I dans $\mathbb{R}$. **a et b sont deux éléments distincts** de I.

On suppose que **f garde un signe constant** sur le segment d'extrémités a et b et que $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(t)}\,\mathrm{d}\mathbf{t} = \mathbf{0}}$.

Alors f est nulle sur ce segment.

★★★ On se gardera de penser et d'écrire qu'une fonction d'intégrale nulle est nulle.

★★ On est prié de se rappeler que ce théorème contient **quatre hypothèses** importantes.

Cor. 1 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

Si $\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0$ et si $\exists t_0 \in [a,b],\ f(t_0) > 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Cor. 2 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

Si $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$ et si $\exists t_0 \in [a,b],\ f(t_0) < g(t_0)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 6. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Th. 15 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}.$$

Th. 16 **Égalité dans Cauchy-Schwarz**

f et g sont deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ $(a < b)$.

$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$ si et seulement (f,g) est une famille liée.

★ Ces résultats sont souvent donnés au niveau de l'algèbre bilinéaire

▶ 7. Valeur moyenne

Déf. 4 Soit f une application continue de $[a,b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$.

La valeur moyenne de f sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ est le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

C'est la valeur de la fonction constante qui a même intégrale que f entre a et b.

Prop. 4 Soit f une application continue de $[a,b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$.

f prend au moins une fois sa valeur moyenne sur $[a,b]$. Autrement dit :

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

★ C'est une version faible du théorème des accroissements finis.

IV POUR CALCULER DES INTÉGRALES OU DES PRIMITIVES

▶ 1. Intégration par parties

Th. 17 Soient u et v deux applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si a et b sont deux éléments de I : $\boxed{\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.}$

PP L'intégration par parties permet, en particulier, de calculer des intégrales du type :

• $\int_a^b P(t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où P est une fonction polynôme (on fait par des intégrations par parties successives "baisser le degré du polynôme").

• $\int_a^b P(t)\,\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_a^b P(t)\,\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t$) où P est un polynôme (même technique).

• $\int_a^b \cos(\beta t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b \sin(\beta t)\,e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ (en intégrant deux fois par parties).

PP De la même manière on peut trouver une primitive pour les fonctions du type $t \to P(t)\,e^{\alpha t}$, $t \to P(t)\,\sin(\alpha t)$, $t \to P(t)\,\cos(\alpha t)$, $t \to \cos(\beta t)\,e^{\alpha t}$, $t \to \sin(\beta t)\,e^{\alpha t}$... ($P$ étant une fonction polynôme).

▶ 2. Changement de variable

Th. 18 I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$ et φ est une application de J dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs dans I.

Si a et b sont deux éléments de J :

$$\int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

★★★ Ne surtout pas oublier de parler (et de vérifier) l'aspect $\mathcal{C}^1$ de φ.

Remarques • D'après le programme les changements de variable non affines devront être indiqués. Hum ? ?

• La connaissance de ce résutat est nécessaire mais pas suffisante. Il faut surtout en avoir une bonne pratique.

★★ On peut utiliser le résultat précédent de la droite vers la gauche et réciproquement. Précisons

PP • Dans le premier sens (la nouvelle variable s'exprime en fonction de l'ancienne) :

→ On pose $u = \varphi(t)$ (u est la nouvelle variable).

→ On écrit $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; on remplace alors $\varphi'(t)\,f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ par $f(u)\,\mathrm{d}u$. C'est la phase délicate car il faut faire apparaître $\varphi'(t)\,f(\varphi(t))$.

PP Penser à exprimer t en fonction de u pour calculer aisément "$\mathrm{d}t$" en fonction de "$\mathrm{d}u$".

→ On termine en remarquant que $t = a$ donne $u = \varphi(a)$ et $t = b$ donne $u = \varphi(b)$.

PP • Dans l'autre sens (l'ancienne variable s'exprime en fonction de la nouvelle).

On part de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u$.

→ On pose $u=\varphi(t)$ (t est la nouvelle variable).

→ On écrit $\mathrm{d}u=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

→ On cherche a et b tels que φ soit $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle défini par a et b et tels que : $\alpha=\varphi(a)$ et $\beta=\varphi(b)$.

PP • Des considérations de bijection sur φ permettent opportunément de passer d'un cas à l'autre.

PP Quelques morales pour les intégrales du type $\displaystyle\int f(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Si "$f(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta\to-\theta$ on pose $u=\cos\theta$.

Si "$f(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta\to\pi-\theta$ on pose $u=\sin\theta$.

Si "$f(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$" est invariant par le changement $\theta\to\pi+\theta$ on pose $u=\tan\theta$.

Dans les autres cas on pourra poser $u=\tan\theta/2$.

Prop. 5 Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.

Si f est paire sur I : $\quad\forall a\in I,\ \displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est impaire sur I : $\quad\forall a\in I,\ \displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Prop. 6 f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et périodique de période T. a et b sont deux réels.

$\boxed{\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$ et $\boxed{\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$.

V FORMULES DE TAYLOR

▶ 1. La formule de Taylor avec reste intégral

Th. 19 **Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall x\in I,\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore :

$$\boxed{\forall x\in I,\ f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Cor. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\boxed{\forall x\in I,\ f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}\,f^{(k)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

▶ 2. L'inégalité de Taylor-Lagrange

Th. 20 **Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall x \in I,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{u\in[a,x] \text{ ou } u\in[x,a]}{\mathrm{Max}} |f^{(n+1)}(u)|.$$

P Après avoir écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange on essaie le plus souvent de trouver le max ou plus modestement d'en trouver un majorant raisonnable.

▶ 3. La formule de Taylor-Young

Th. 21 **La formule de Taylor-Young**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n}$. Au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est :

$x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$

Cor. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n}$.

Au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + o(x^n).$$

Ainsi f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est :

$x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k.$

Th. 22 **Les cinq développements limités du programme au voisinage de 0.**

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Soit encore, au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \text{ ou } \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

▶ 4. Remarques

PP La formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Lagrange et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont très utiles pour obtenir des sommes de séries, pour majorer des restes de séries, pour développer des fonctions en séries entières, pour établir des inégalités...

PP La formule de Taylor-Young est essentielle pour construire des développements limités.

PP Pour faire un développement limité de $x \to f(x)$ au voisinage de a on peut se ramener en 0 en posant $y = x - a$.

VI SOMMES DE RIEMANN A PAS CONSTANT

Dans cette section a et b sont deux réels tel que $a < b$.

▶ 1. Définition

Déf. 5 Une subdivision pointée de $[a,b]$ est un couple (σ, ξ) ou $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ une famille de points de $[a,b]$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Prop. 7 f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et (σ,ξ) est une subdivision pointée de $[a,b]$.

Si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(\xi_k)$ est la **somme de Riemann** de f associée à la subdivision pointée (σ,ξ) de $[a,b]$.

Prop. 8 f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$ on pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}\cdot$

Pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, ξ_k est un élément de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

- $\sigma = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a,b]$ à pas constant.
- Les sommes de Riemann de f associées à la subdivision pointée (σ,ξ) de $[a,b]$ est : $\dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$.

Prop. 9 f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$ on pose $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}\cdot$

- La somme de Riemann de f associée à la subdivision pointée $\big(\sigma, (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})\big)$ est :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

- La somme de Riemann de f associée à la subdivision pointée $\big(\sigma, (x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$ est :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

▸ 2. Le théorème fondamental

Th. 23 Soit f une application $\boxed{\textbf{continue}}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\sigma^{(n)}$ est la subdivision à pas constant égale à $\dfrac{b-a}{n}$ de $[a,b]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(\sigma^{(n)}, \xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de subdivision pointé à pas constant de $[a,b]$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^{(n)}) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Cor. 1 Soit f une application $\boxed{\textbf{continue}}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. 2 Soit f une application $\boxed{\textbf{continue}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

P Ces résultats sont très précieux pour obtenir des limites de suites. Même en probabilités...

Th. 24 Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est croissante, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Si f est décroissante, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

VII INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

▶ 1. Définition d'une fonction continue par morceaux

Déf. 6 Soit f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ telle que, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$:

- f est continue en tout point de $]x_k, x_{k+1}[$
- f admet une limite finie à droite en x_k et une limite finie à gauche en x_{k+1}.

(le tout revient à dire que la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$).

On dit alors que σ est une **subdivision adaptée** à f.

On notera $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b]$.

Déf. 7 f est une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est **continue par morceaux** sur I si pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

On notera $\mathcal{CM}\big(I,\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur I.

▶ 2. Une caractérisation

Th. 25 Soit f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ si et seulement si : il existe une partie **finie** D de $[a,b]$ (éventuellement vide) telle que f soit continue en tout point de $[a,b] - D$ et possède une limite finie à droite et à gauche en tout point de D (où cela est raisonnable... penser aux bornes).

▶ 3. Quelques propriétés

Prop. 10 Toute application continue de I dans $\mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I.

Prop. 11 Toute application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a,b]$, est bornée sur $[a,b]$.

Prop. 12 Si f et g sont des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b]$, il existe une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à f et à g.

Th. 26 λ est un réel, f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux sur I.

$|f|$, f^n $(n \in \mathbb{N})$, $\lambda f + g$, $f \times g$, $\mathrm{Max}(f,g)$ et $\mathrm{Min}(f,g)$ sont des fonctions continues par morceaux sur I.

Cor. $\Big(\mathcal{CM}\big(I,\mathbb{R}\big), +, \cdot\Big)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (... et même une algèbre).

▶ 4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Th. 27 et **déf. 8** Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$ on note $\overline{f_k}$ le prolongement par continuité de la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \overline{f_k}(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la subdivision σ, de $[a,b]$, adaptée à f choisie.

On l'appelle l'intégrale de f entre a et b et on la note encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est continue sur $[a,b]$ cette intégrale coïncide avec celle définie plus haut.

Déf. 9 f est une application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. a et b sont deux éléments quelconques de I.

Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale sur $[a,b]$ de la restriction de f à $[a,b]$!

Par convention si $a = b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et si $a > b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ 5. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Remarque Beaucoup de propriétés de l'intégrale des fonctions continues sont encore vraies pour les fonctions continues par morceaux. En particulier :

- Chasles. • La linéarité. • La croissance. • Cauchy-Schwarz.

Th. 28 **Relation de Chasles** f est une application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. a, b et c sont des éléments de I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Th. 29 **Linéarité** f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux. a et b sont deux éléments de I. λ est un réel.

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

L'application qui à tout élément f de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.

Th. 30 **Croissance** f est une application continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. f est positive sur $[a,b]$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Cor. 1 f et g sont deux applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant g(t)$

$$\text{Alors : } \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cor. 2 f est une application continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. m et M sont deux réels tels que : $m \leqslant M$. On suppose :

1. $\boxed{a \leqslant b}$
2. $\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$.

$$\text{Alors : } \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Cor. 3 f est une application continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

On suppose que : $\boxed{a \leqslant b}$.

$$\text{Alors : } \quad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Th. 31 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

f et g sont deux applications continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ et a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$.

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}.$$

★ Le cas d'égalité de "Cauchy-Schwarz intégral" ne vaut plus pour les fonctions continues par morceaux.

Prop. 13 f et g sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux. a et b sont deux élément de I.

1. On ne change pas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en modifiant f en un nombre fini de points de l'intervalle d'extrémité a et b.

2. Si f et g coïncident sur l'intervalle d'extrémité a et b sauf peut-être en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

► 6. Quelques différences importantes

★★ Une fonction continue par morceaux peut être de signe constant et d'intégrale nulle sans être nulle.

Th. 32 f est application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. c est un élément de I.

$x \to \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Th. 33 I est un intervalle de $\mathbb{R}$. f est application de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. c est un élément de I.

1. $h : x \to \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable en tout point ou f est continue.

2. Si f est continue en un point x de $I : h'(x) = f(x)$.

VIII SAVOIR FAIRE

- Calculer des intégrales simples.
- Majorer, minorer, encadrer une intégrale.
- Utiliser les variations d'une fonction pour encadrer son intégrale.
- Faire une intégration par parties.
- Faire un changement de variable.
- Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \to \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Montrer et utiliser Cauchy-Schwarz. Étudier le cas d'égalité pour des fonctions continues.
- Utiliser des sommes de Riemann pour calculer des limites de suites.
- Utiliser les différentes formules de Taylor et l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Majorer l'erreur dans une méthode de calcul approché d'une intégrale.
- Étudier une fonction définie par une intégrale.
- Dériver sous le signe somme.
- Permuter une somme infinie et une intégrale.
- Montrer et utiliser que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer et utiliser que, lorsque f est continue (ou bornée) sur $[0, 1]$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)\, t^n\,\mathrm{d}t = 0$.
- Montrer qu'une fonction est continue par morceaux et calculer son intégrale sur un segment.
- Étudier un endomorphisme défini à l'aide d'une intégrale.
- Encadrer une somme (finie ou infinie) en utilisant des intégrales.
- Maîtriser la technique de linéarisation pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions circulaires.

IX UN BREF RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

★ Écrire $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

★ Écrire une séquence du type : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

★ Écrire $a \leqslant b$ et $f(t) \leqslant g(t)$ donnent $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ à la place de $a \leqslant b$ et $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t)$ donnent $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

★ $x \to \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable car f est continue ou comme intégrale d'une fonction continue.

★ Écrire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sans démonstration.

★ Écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\,\mathrm{d}t$ (ou plus généralement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$) sans démonstration.

★ $\displaystyle\int_0^x (-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(-t)^p}{p}\right]_0^x$ (avec p dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$).

★ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc f est nulle sur $[a,b]$.

★ La dérivée de $x \to F(x) - F(0)$ est $x \to F'(x) - F'(0)$. La dérivée de $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \to f(x) - f(a)$.

★ Une primitive de $|f'|$ est $|f|$.

★ $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t = |f(b)| - |f(a)|$ ou $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t = |f(b) - f(a)|$.

★ Une primitive de $t \to e^{t^2}$ est : $t \to \dfrac{e^{t^2}}{2t}\cdot$

★ n est un élément de $\mathbb{N}$. $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi = 0$ (vaut pour $n \geqslant 1$; $I_0 = \pi$).

X COMPLÉMENTS

▶ 1. Moins que rien

Il est souvent préférable de "primitiviser" $t \to t-\alpha$ en $t \to \dfrac{(t-\alpha)^2}{2}$ plutôt qu'en $t \to \dfrac{t^2}{2} - \alpha t$.

▶ 2. Une banalité bien utile

Th. 34 **PP** **SD** Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$.

▶ 3. Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone

Prop. 14 **P** f une application continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

Si f est croissante sur I et si $a \leqslant b$ alors $(b-a)\,f(a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,f(b)$.

Si f est décroissante sur I et si $a \leqslant b$ alors $(b-a)\,f(b) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,f(a)$.

Prop. 15 **P** f une application continue ou continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que k est un élément de I tel que $k+1$ soit encore dans I.

Si f est croissante sur I alors $f(k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1)$.

Si f est décroissante sur I alors $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$.

P Ce résultat est très utile pour encadrer des sommes partielles de séries, des restes de séries convergentes,...

▶ 4. Des intégrales usuelles

Prop. 16 **SD** Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$: $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\;q!}{(p+q+1)!}$.

Prop. 17 **SD** Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \cos pt\ \cos qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi & \text{si } p=q=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p=q\neq 0 \\ 0 & \text{si } p\neq q \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin pt\ \sin qt\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } p=q=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p=q\neq 0 \\ 0 & \text{si } p\neq q \end{cases}.$$

★ Il importe avant tout de savoir qu'il faut distinguer trois cas.

Prop. 18 **SD** **Wallis**. $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ ou $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$! !

- $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ I_n = \dfrac{n-1}{n}\,I_{n-2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\,I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$.
- $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

▶ 5. Lemme de Riemann-Lebesgue

Th. 35 $\boxed{\textbf{PP}}$ $\boxed{\textbf{SD}}$ f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0 \quad\text{et}\quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0.$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0 \quad\text{et}\quad \lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t=0.$$

▶ 6. Encore la stricte croissance

Du banal.

Prop. 19 f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a<b}$
2. f est strictement positive sur $[a,b]$

$$\text{Alors : }\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0$$

Prop. 20 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I. On suppose que :

1. $\boxed{a<b}$
2. $\forall t\in[a,b],\ f(t)<g(t)$

$$\text{Alors : }\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t<\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ 7. Intégrations par parties itérées

Th. 36 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. u et v sont deux applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. a et b sont deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b u(t)\,v^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,u^{(k)}(t)\,v^{(n-k-1)}(t)\Big]_a^b+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ 8. Calcul de primitives classiques

Prop. 21 $\boxed{\textbf{P}}$ P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. α est un réel non nul.

Il existe un élément Q de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on peut obtenir par identification) tel que

$$x\to Q(x)\ e^{\alpha x}\text{ soit une primitive de }x\to P(x)\ e^{\alpha x}.$$

Prop. 22 $\boxed{\textbf{P}}$ α et β sont deux réels non simultanément nuls.

Il existe deux constantes A et B (que l'on peut obtenir par identification) telles que

$$x\to[A\sin(\beta x)+B\cos(\beta x)]\ e^{\alpha x}\text{ soit une primitive de }x\to\sin(\beta x)\ e^{\alpha x}.$$

Même chose pour $x\to\cos(\beta x)\ e^{\alpha x}$.

▶ 9. Premier théorème de la moyenne

Th. 37 f et g sont deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$. a et b sont deux éléments de I.

Si g garde un signe constant sur l'intervalle déterminé par a et b alors il existe un élément c de cet intervalle tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

▶ 10. Beaucoup plus sur les sommes de Riemann

Déf. 10 Le **pas** de la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ est le réel $\underset{0\leqslant k\leqslant n-1}{\operatorname{Max}}(x_{k+1}-x_k)$.

Th. 38 Les sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment convergent vers l'intégrale de la fonction sur le segment lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Précisons.

Soit f une application **continue** de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel ε strictement positif il existe un réel η strictement positif tel que pour toute subdivision $\sigma=(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ de pas strictement inférieur à η et pour toute famille $(\xi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ de réels telle que $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f(\xi_k)\right|<\varepsilon.$$

▶ 11. Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Les résultats de cette section concernent plus le chapitre calcul différentiel mais leurs démonstrations utilisent la notion de primitive. Notons que ces résultats ont été supprimés à partir des concours 2015.

Th. 39 SD Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' admet une limite finie en b.

Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à l'intervalle $[a,b]$.

Cor. SD Soit f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

H1 f est continue sur le segment $[a,b]$;

H2 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$;

H3 f' admet une limite finie ℓ à gauche en b.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'(b)=\ell$.

★★ On est prié de faire la différence entre ces deux résultats. Dans le second f est définie en b mais pas dans le premier.

Th. 40 SD p est un élément de $\mathbb{N}$ et f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$. On suppose que $f^{(p)}$ admet une limite finie en b.

Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^p$ à l'intervalle $[a,b]$.

★ Il est clair que l'on peut extrapoler ce résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$, ou $]a,b[$ ou encore $I-\{x_0\}$. Dans le dernier cas cela donne :

Th. 41 p est un élément de $\mathbb{N}$. x_0 est un élément de I. f est une application de $I-\{x_0\}$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I-\{x_0\}$ et si $f^{(p)}$ admet une limite finie en x_0 alors f admet **un prolongement** de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

▶ 12. La formule de Taylor-Lagrange

Notons que ce résultat a été supprimés à partir des concours 2015.

Th. 42 **Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n**

a est un élément de I et f est une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour tout élément x de $I - \{a\}$, il existe un élément c appartenant à $]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

ou :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).}$$

★★★ Pour n et a fixés, il est essentiel de remarquer que c dépend de x.

▶ 13. Validité des formules de Taylor

★ La formule de Taylor-Young vaut encore en supposant simplement que f est n fois dérivable en a ; c'est à dire que f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

La formule de Taylor-Lagrange vaut encore en supposant simplement que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $n+1$ fois dérivable sur l'intérieur de I.

▶ 14. L'équation différentielle $y' + a\,y = 0$

Les résultats de cette section concernent plus le chapitre calcul différentiel mais leurs démonstrations utilisent la notion de primitive. Notons que ces résultats ont été supprimés à partir des concours 2015.

Th. 43 **SD** a est une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

Une application f de I dans $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + a\,y = 0$ si et seulement si il existe un (unique) réel λ tel que :

$$f = \lambda\, e^{-A}.$$

Cor. a est une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur I.

L'ensemble des applications dérivables f de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)\,f(x) = 0$ est la droite vectorielle engendrée par e^{-A} dans l'espace vectoriel des applications (dérivables) de I dans $\mathbb{R}$.

XI COMPLÉMENTS (suite) : VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE

Dans ce qui suit f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

▶ 1. Généralités

But Dans la mesure ou on ne sait pas calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ on se propose d'en trouver une valeur approchée.

Le principe On considère une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b)$.

Pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, on "remplace" f sur $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction "plus simple" φ_k dont on sait calculer l'intégrale sur ce segment. On pose :

$$I_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

On prend alors I_σ comme valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pratiquement Le plus souvent on se fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et on considère la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}\cdot$$

Pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$, on "remplace" f sur $[x_k, x_{k+1}]$ par une fonction constante (méthode des rectangles ou du point moyen), affine (méthode des trapèzes) ou polynômiale de degré inférieur ou égal à deux (méthode de Simpson).

Les exigences Il importe avant tout de savoir calculer simplement I_σ et d'avoir une idée sur l'erreur que l'on commet en remplaçant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par I_σ.

Dans la suite n est dans $\mathbb{N}^*$ et $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est la subdivision de $[a,b]$ définie par $\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}\cdot$

C'est la subdivision de $[a,b]$ qui partage cet intervalle en n intervalles de même longueur $\dfrac{b-a}{n}\cdot$

▶ 2. Méthode des rectangles

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k (resp. $\widehat{\varphi}_k$), constante sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k (resp. en x_{k+1}). On pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$ et $\widehat{R}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \widehat{\varphi}_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $R_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\widehat{R}_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

2. f étant une fonction continue sur $[a,b]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \widehat{R}_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. **SD** Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et si $M_1 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f'(t)|$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_n\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \widehat{R}_n\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}\cdot$$

4. Si f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$: $R_n \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \widehat{R}_n$ (resp. $\widehat{R}_n \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant R_n$).

▶ 3. Le point moyen

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, constante sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\cdot$

On pose : $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $M_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + (2k+1)\dfrac{b-a}{2n}\Big)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ alors : $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - M_n\Big| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}\cdot$

▶ 4. La méthode des trapèzes

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, affine sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k et x_{k+1}.

On pose : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $T_n = \dfrac{R_n + \widehat{R}_n}{2} = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = \dfrac{b-a}{n} \left[\dfrac{f(a)}{2} + \dfrac{f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\Big(a + k\dfrac{b-a}{n}\Big) \right]$.

2. f étant continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} T_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et si $M_2 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t \in [a,b]} |f''(t)|$ alors : $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n \right| \leqslant \dfrac{M_2 (b-a)^3}{12 n^2}$.

▶ 5. Simpson

Pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, on considère la fonction φ_k, polynômiale de degré au plus 2 sur $[x_k, x_{k+1}]$ et qui coïncide avec f en x_k, $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. $S_n = \dfrac{1}{6}(R_n + \widehat{R}_n + 4M_n) = \dfrac{b-a}{6n} \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) \right]$.

2. f étant continue sur $[a, b]$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ et si $M_4 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$ alors : $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - T_n \right| \leqslant \dfrac{M_4 (b-a)^5}{2880 n^4}$.