PREMIERE PARTIE

Q1.. Etudions la continuité de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous aurons ainsi largement traité le problème posé.

Rappelons que : $x \mapsto E(x)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; par composition $x \mapsto E(\frac{1}{x})$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^* - \{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{Z}^*\}$

Notons encore que $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent f_α est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = \frac{1}{p}$ et étudions la continuité de f_α en $a = \frac{1}{p}$

Notons que $f_\alpha(a) = f_\alpha(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p^\alpha} \times p = \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ et étudions successivement $\lim\limits_{x \mapsto a^+} f_\alpha(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto a^-} f_\alpha(x)$

Supposons $p \neq 1$

$\forall x \in]\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}[$, $f_\alpha(x) = x^\alpha(p-1)$; donc $\lim\limits_{x \mapsto a^+} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\mapsto a^+} (x^\alpha(p-1)) = \frac{p-1}{p^\alpha} \neq \frac{p}{p^\alpha} = f_\alpha(a)$; f_α est discontinue à droite en a

Supposons $p = 1$. $a = 1$. $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{x} \in]0,1[$; $\forall x \in]1,+\infty[$, $E(\frac{1}{x}) = 0$; $\forall x \in]1,+\infty[$, $f_\alpha(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\mapsto a^+} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+} f_\alpha(x) = 0 \neq f_\alpha(1)$ ($f_\alpha(1) = 1$) ; f est encore discontinue à droite en a.

$\forall x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $f_\alpha(x) \underset{\uparrow}{=} x^\alpha \times p$; $\lim\limits_{x\mapsto a^-} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\mapsto \frac{1}{p}^-} (x^\alpha p) = \frac{p}{p^\alpha} = f_\alpha(a)$; f_α est continue à gauche en a.

$p \leq \frac{1}{x} < p+1$

Pour conclure

1°.. f_α est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{N}^*\}$

2°.. f_α est continue à gauche en tout point de $\{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{N}^*\}$

3°.. f_α est discontinue à droite " " " " (tout en possédant une limite finie à droite en ces points). Notons que f_α est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$

Remarque .. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_0(x) = E(\frac{1}{x})$.

$f_0(\frac{1}{4}) = 4$ $\quad \forall x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, $f_0(x) = 3$

$\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $f_0(x) = 2$

$\forall x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $f_0(x) = 1$

$\forall x \in]1, 2]$, $f_0(x) = 0$

Q2.. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1$; c'est la définition.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x^\alpha\left(\frac{1}{x}-1\right) < f_\alpha(x) \leq \frac{x^\alpha}{x}.$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x^{\alpha-1}-x^{\alpha} < f_\alpha(x) \leq x^{\alpha-1}$

1er cas.. $\alpha>1$. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} x^\alpha = 0$; par encadrement $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f_\alpha(x)=0$. f_α est prolongeable par continuité en 0

2ème cas.. $\alpha=1$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $1-x < f_\alpha(x) \leq 1$; par encadrement $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f_\alpha(x) = 1$. f est prolongeable par continuité en 0

3ème cas.. $\alpha<1$. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}(x^{\alpha-1}-x^\alpha)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f_\alpha(x)=+\infty$; f n'est pas prolongeable par continuité en 0

Remarque. On pouvait aussi utiliser : $E(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ soit $E\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

Q3.. 3 fonctions et 4 segments c'est trop !

$f_2(1/4)=1/4 \quad f_1(1/4)=1 \quad f_{1/2}(1/4)=2$

$\forall x\in\left]\frac14,\frac13\right]$, $f_2(x)=3x^2$, $f_1(x)=3x$ et $f_{1/2}(x)=3\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]\frac13,\frac12\right]$, $f_2(x)=2x^2$, $f_1(x)=2x$ et $f_{1/2}(x)=2\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]\frac12,1\right]$, $f_2(x)=x^2$, $f_1(x)=x$ et $f_{1/2}(x)=\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]1,2\right]$, $f_2(x)=f_1(x)=f_{1/2}(x)=0$.

DEUXIEME PARTIE

Q1.. $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$ $\qquad E\left(\frac1x\right)=n$ si $x\in\left]\frac{1}{n+1},\frac1n\right]$

$$I_\alpha(n)=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac1n} f_\alpha(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+}\int_\varepsilon^{\frac1n} x^\alpha E\left(\frac1x\right)dx \overset{\downarrow}{=} \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+}\left(n\int_\varepsilon^{1/n} x^\alpha dx\right) = \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+} n\left[\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}-\varepsilon^{\alpha+1}\right]\right]$$

$$\underline{\underline{I_\alpha(n)=\frac{n}{\alpha+1}\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\right]}}.$$

Q2.. $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$$J_\alpha(n)=\sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p)=\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{\alpha+1}\left[\frac{1}{p^{\alpha+1}}-\frac{1}{(p+1)^{\alpha+1}}\right]=\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{p^{\alpha+1}}-\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{(p+1)^{\alpha+1}}\right]$$

$p\to p-1$ dans le 2ème Σ

$$J_\alpha(n)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{p^{\alpha+1}}-\sum_{p=2}^{n+1}\frac{p-1}{p^{\alpha+1}}\right]=\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n+1}\frac{p-(p-1)}{p^{\alpha+1}}-\underbrace{\frac{n+1}{(n+1)^{\alpha+1}}}\right]$$

terme ajouté au niveau du 1er Σ.

$$\underline{\underline{J_\alpha(n)=\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^{\alpha+1}}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right]}}.$$

Q3.. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a.. $J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p) = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} f_\alpha(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f_\alpha(x)dx$ (ce qui a un sens car f

est continue par morceaux sur $[\frac{1}{n+1}, 1]$ ... ma généralisation de I n'était pas un luxe mais une nécessité ; d'accord le concepteur ?)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f_\alpha(x)dx.$$

b.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$J_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^\alpha E(\frac{1}{x})dx$. $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

Donc $\quad J_\alpha(n) \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^\alpha \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\left[x^\alpha\right]_{\frac{1}{n+1}}^{1} = \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$.

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$.

c.. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; J_\alpha(n+1) - J_\alpha(n) = I_\alpha(n+1) = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f_\alpha(x)dx \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; J_\alpha(n+1) \geq J_\alpha(n)$.

$(J_\alpha(n))_{n\geq 1}$ est une suite croissante. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha}$.

$(J_\alpha(n))_{n\geq 1}$ est donc croissante et majorée ; cette suite est donc convergente.

<u>Remarque</u>.. D'après la 1ère partie f_α est localement intégrable sur $]0,1]$ (f_α est continue par morceaux sur tous les segments de $]0,1]$ car f_α est continue par morceaux sur tous les segments $[\frac{1}{n}, 1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$\varphi : x \mapsto \int_x^1 f_\alpha(t)dt$ est décroissante sur $]0,1]$ car f_α est positive sur $]0,1]$. Donc si φ est majorée φ admet une limite finie en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{1}{n+1} \leq x$. $\quad \varphi(x) = \int_x^1 f_\alpha(t)dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f_\alpha(t)dt = J_\alpha(n) \underset{\substack{\uparrow \\ (J_\alpha(n))_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}}{\leq} L = \lim_{n\to+\infty} J_\alpha(n)$

Donc φ est décroissante sur $]0,1]$ et majorée ; φ admet une limite finie en 0^+.

Donc $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ existe. Notons encore que : $\int_0^1 f_\alpha(t)dt = \lim_{n\to+\infty} J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{+\infty} I_\alpha(p)$ <u>pour $\alpha > 0$</u>

Q4.. a.. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $J_0(n) = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} E\left(\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} p\,dx = \sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)$

$x \in \left]\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right] \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = p$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_0(n) = \sum_{p=1}^{n} p\,\frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}$

b.. $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[p\ ,p+1],\qquad \frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{p}$

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \int_p^{p+1}\frac{dx}{x} \leqslant \int_p^{p+1}\frac{dx}{p} = \frac{1}{p}.$

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{p} \geqslant \int_p^{p+1}\frac{dx}{x}.$

c.. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p} \geqslant \sum_{p=2}^{n+1}\int_p^{p+1}\frac{dx}{x} = \int_2^{n+2}\frac{dx}{x}.$

d.. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_0(n) \geqslant \int_2^{n+2}\frac{dx}{x} = \ln(n+2) - \ln 2$

$\lim_{n\to+\infty} J_0(n) = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty}(\ln(n+2)-\ln 2) = +\infty$

Remarque .. Normal car $\int_0^1 E\left(\frac{1}{x}\right)dx$ diverge car $E\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x}$ ...

PARTIE III

ouaoc !

Q1.. a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1/2}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n+1} = \frac{1}{2n(n^2-1)}\left[n(n+1) - 2(n^2-1) + n(n-1)\right] = \frac{2}{2n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}.$

b) Soit $n\in[2,+\infty[$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{p=1}^{n-1}}_{p\mapsto p+1 \text{ dans le } 1^{er}\Sigma}\frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{p=3}^{n+1}}_{p\mapsto p-1 \text{ dans le } 2^e\Sigma}\frac{1}{p}$$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{4} + \frac{-(n+1)+n}{2n(n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\quad \sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

c.. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}\right) = \frac{1}{4}$ donc la série de terme général v_p converge et $\sum_{p=2}^{+\infty} v_p = \frac{1}{4}$

d.. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \sum_{p=2}^{+\infty} v_p - \sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}.$

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Q2.. a.. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

$\omega_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} - \frac{1}{n^3} = \frac{n^2-(n^2-1)}{(n^2-1)n^3} = \frac{1}{n^3(n-1)(n+1)}$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \omega_n = \frac{1}{n^3(n-1)(n+1)}.$

b.. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \omega_n = \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n^2} v_n$

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \omega_n = \frac{v_n}{n^2}$$

c.. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \omega_n = \frac{v_n}{n^2} \leq v_n$ (fin, non ?)

La série de terme général ω_n est donc convergente car celle de terme général v_n l'est (règle de comparaison des séries à termes positifs)

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{v_p}{p^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^4}$

classique, très classique ! Attention.
si $p \in [\![n+1,+\infty[\![\,,\ \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$!

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ 0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p \leq \frac{1}{2n^4}.$$

Q3.a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2} \Leftrightarrow n^4 \geq 10^7 \Leftrightarrow n \geq 10^{7/4}$; $10^{7/4} \simeq 56,23$

Donc pour $n \geq 57$: $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\Pi - 1 = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^3} = \sum_{p=2}^{+\infty} u_p = \sum_{p=2}^{n} u_p + \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$

$$\Pi - 1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p = \frac{1}{2n(n+1)} - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p$$

Pour $n = 57$.

$$\Pi - 1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} - \frac{1}{2n(n+1)} = - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p \in \left[-\frac{10^{-7}}{2}, 0\right]$$

Donc $\Pi^* = 1 + \sum_{p=2}^{57} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2\times 57\times 58}$ est une valeur approchée de Π à $\frac{10^{-7}}{2}$ près

Si ma machine donne une valeur approchée de Π^* à $\frac{10^{-7}}{2}$ près j'aurai une valeur approchée de Π à 10^{-7} près.

Notons encore que : $\Pi^* = \sum_{p=1}^{57} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2\times 57\times 58} \simeq 1{,}202 / 056\ 926$

1,2020569 est (certainement) une valeur approchée à 10^{-7} près de Π.

? → N : 0 → S : 0 → P : Lbl 0 : Isz P : S+1÷P÷P² → S : P<N ⇒ GOTO 0 :
S+1÷2÷N÷(N+1) ◢

oui il reste de la place pour écrire un programme en T. P. !

```
program lyon92;

uses crt;
var i,n:integer;s:real;

begin

clrscr;
n:=57;s:=0;

for i:=1 to n do
s:=s+1/i/i/i;

s:=s+1/2/n/(n+1);
write(s,' est certainement une valeur approchée à 10 moins 7 près de M');
end.
```

```
1.2020569260E+00 est certainement une valeur approchée à 10 moins 7 près de M
```