PROBLÈME 2

Pour tout réel x, on note E(x) la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier relatif E(x) tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_+ , \quad f_\alpha(x) = x^\alpha \, E\left(\frac{1}{x}\right) .$$

PREMIÈRE PARTIE

1. Étudier la continuité de f_0 sur $\left[\frac{1}{4}\,;\,2\right]$, et tracer la courbe représentative de f_0 sur cet intervalle (repère orthonormé, unité 5 cm).

2. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fixé, la limite de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. Pour quelles valeurs de α f_α peut-elle être prolongée par continuité à droite en 0 ?

3. Tracer les représentations graphiques de f_2, f_1, $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\,2\right]$ (sur trois figures distinctes, repère orthonormé, unité 5 cm).

DEUXIÈME PARTIE

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$I_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p)\,.$$

1. Calculer $I_\alpha(n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

   a. Exprimer $J_\alpha(n)$ sous forme d'une seule intégrale.

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$.

   c. Conclure quant à la convergence de la suite $\left(J_\alpha(n)\right)_{n\geq 1}$.

4. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1}\frac{1}{p}$.

   b. Établir : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1}\frac{dx}{x}$.

   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(n) \geq \int_2^{n+2}\frac{dx}{x}.$$

   d. Conclure quant à la convergence de la suite $\left(J_0(n)\right)_{n\geq 1}$.

TROISIÈME PARTIE

On note $M = 3 \lim_{n \to \infty} J_2(n)$, c'est-à-dire $M = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^3} , \quad v_n = \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} , \quad w_n = v_n - u_n .$$

1. a. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} , \quad v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1} ,$$

et calculer a, b, c.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n\,(n+1)} .$$

c. Montrer que la série $\sum_{p \geq 2} v_p$ converge et calculer sa somme.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, calculer $\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$.

2. a. Calculer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

b. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $w_n = \frac{v_n}{n^2}$.

c. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leq \frac{1}{2n^4} .$$

3. a. Déterminer un entier naturel n tel que $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

b. En déduire une valeur approchée de M à 10^{-7} près.