PROBLEME 2 PARTIE I

A] Q1.. f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}[\sin x - x\cos x]$

f' est sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ du signe de $u: x\mapsto \sin x - x\cos x$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\cos x-\cos x + x\sin x = x\sin x$.

Par conséquent $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $u'(x)\geqslant 0$. u est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $u(0)=0$.

Donc $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $u(x)\geqslant 0$; $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)\geqslant 0$. <u>f est croissante sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.</u>

Q2.. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\left[\frac{x}{\sin x}-1\right]=\frac{1}{x\sin x}(x-\sin x)$.

$\sin x = x + o(x^2)$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\right)=0$; $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$.

Or $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x\sin x}(x-\sin x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x^2}(x-\sin x)$; par conséquent : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$

<u>f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$.</u>

Q3.. Résumons. f est dérivable en tout point de $[0,\frac{\pi}{2}]$

$f'(0)=0$ et $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$. Notons que f' est continue

sur $]0,\frac{\pi}{2}]$; pour montrer que f est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ il ne reste plus à prouver que

f' est continue en 0 c'est à dire que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}=f'(0)=0$

$\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\underset{0}{\sim}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ et $\sin x - x\cos x = x + x^2\varepsilon_1(x) - x(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x))$ avec

$\lim \varepsilon_1(x)=\lim\varepsilon_2(x)=0$; $\sin x - x\cos x = x^2[\varepsilon_1(x)+\frac{x}{2}-x\varepsilon_2(x)]$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\varepsilon_1(x)+\frac{x}{2}-x\varepsilon_2(x)\right)=0$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}=0$. C'est ce qu'il fallait

prouver.

Finalement f est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

<u>Remarque</u>.. La bonne démarche consistait à prouver que

1.. f est de classe C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}]$

2.. f est continue en 0

3.. f' admet pour limite 0 en 0. Le théorème de "la limite de la dérivée" faisait le reste.

Q4 Rouen ?

$\boxed{B}$

Q1.. Un grand classique ! Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^1 \underbrace{\sin(xt)}_{u'} \underbrace{g(t)}_{v}\,dt = \left[-\frac{1}{x}\cos(xt)\,g(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x}\cos(xt)\,g'(t)\right)dt$$

$$\left|\int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt\right| = \left|-\frac{\cos x}{x}g(1) + \frac{1}{x}g(0) + \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(xt)\,g'(t)\,dt\right|$$

$$\left|\int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{|\cos x|}{x}|g(1)| + \frac{1}{x}|g(0)| + \frac{1}{x}\left|\int_0^1 \cos xt\, g'(t)\,dt\right|$$

$$\left|\int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\times 1\times|g(1)| + \frac{1}{x}\times|g(0)| + \frac{1}{x}\int_0^1 |\cos(xt)|\,|g'(t)|\,dt$$

$$\left|\int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\left[|g(1)|+|g(0)| + \int_0^1 |g'(t)|\,dt\right].$$ Posons $A = |g(1)|+|g(0)|+\int_0^1 |g'(t)|\,dt$

$A \in \mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{A}{x}$.

Q2.. Ce qui précède et $\lim_{x\to+\infty} \frac{A}{x} = 0$ donne clairement : $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \sin(xt)g(t)\,dt = 0$.

$\boxed{C}$ Q1. a) Notons $\hat{\varphi}$ le quotient de P par X (X divise P car $P(0)=0$).

$$\forall x \in]0,1],\ \varphi(x) = \frac{x\,\hat{\varphi}(x)}{\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}\ \frac{\frac{\pi x}{2}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\times\hat{\varphi}(x) = \frac{2}{\pi}f\left(\frac{\pi x}{2}\right)\hat{\varphi}(x)$$

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} f\left(\frac{\pi x}{2}\right)\hat{\varphi}(x)$ ou $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} f\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{P(x)}{x}$.

b) Notons que : $\hat{\varphi}(0) = \lim_{x\to 0}\hat{\varphi}(x) = \lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{P(x)-P(0)}{x-0} = P'(0)$.

Posons $\psi(0) = P'(0)$ et $\forall x \in]0,1]$, $\psi(x) = \varphi(x)$

On a : $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) = \frac{2}{\pi} f\left(\frac{\pi x}{2}\right)\hat{\varphi}(x)$.

ψ est continue sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $[0,1]$.

ψ est au moins un prolongement par continuité de φ sur $[0,1]$.

Montrons que ψ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Il suffit de prouver que $x \mapsto f\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$; ceci résulte sans problème du fait que f est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

φ possède donc un prolongement de classe C^1 sur $[0,1]$, la fonction ψ définie par $\psi(0) = \frac{2}{\pi} P'(0)$ et $\forall x \in]0,1]$, $\psi(x) = \varphi(x)$ (ou $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) = \frac{2}{\pi} f(\frac{\pi x}{2}) \hat{\varphi}(x)$).

Q2.. $\forall t \in]0,1]$, $P(t) \dfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]}{\sin(\frac{\pi t}{2})} = \varphi(t) \cdot \sin[(n+\frac{1}{2})\pi t] = \psi(t) \sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\int_0^1 \psi(t) \sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]\,dt$ existe donc $\int_0^1 P(t) \dfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]}{\sin(\frac{\pi t}{2})}\,dt$ aussi.

De plus, ψ est de classe C^1 sur $[0,1]$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \psi(t) \sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]\,dt = 0$ d'après B)

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 P(t) \dfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})\pi t]}{\sin\frac{\pi t}{2}}\,dt = 0$.

PARTIE II

A Q1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_0^x t\,P(t)\,dt - x\int_0^x P(t)\,dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,dt$

$x \mapsto \int_0^x t\,P(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x P(t)\,dt$ sont des primitives de fonctions continues sur $\mathbb{R}$; ce sont donc des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = x\,P(x) - \int_0^x P(t)\,dt - x\,P(x) + x\int_0^1 P(t)\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = x\int_0^1 P(t)\,dt - \int_0^x P(t)\,dt$.

b) φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = \int_0^1 P(t)\,dt - P(x)$.

Q2.. Soit $P \in E$. $x \mapsto \int_0^x t\,P(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x P(t)\,dt$ sont des fonctions polynomiales comme primitives de fonctions polynomiales

donc $x \mapsto \int_0^x t\,P(t)\,dt - x\int_0^x P(t)\,dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,dt$

Par conséquent $f_1(P) \in E$.

f_1 est donc une application de E dans E.

Montrons que f_1 est linéaire.

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $(U,V)\in E$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\alpha U+\beta V)(x)=\int_0^x(t-x)(\alpha U+\beta V)(t)\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1(\alpha U+\beta V)(t)\,dt$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\alpha U+\beta V)(x)=\alpha\left[\int_0^x(t-x)\,U(t)\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1 U(t)\,dt\right]+\beta\left[\int_0^x(t-x)\,V(t)\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1 V(t)\,dt\right]$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\alpha U+\beta V)(x)=[\alpha\varphi(U)+\beta\varphi(V)](x)$

Donc $h(\alpha U+\beta V)=\alpha\varphi(U)+\beta\varphi(V)$.

Finalement : $h\in\mathcal{L}(E)$.

Déterminons $\operatorname{Ker} h$. Soit $P\in\operatorname{Ker} h$. $h(P)=0_E$; en particulier $(h(P))''=0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^1 P(t)\,dt-P(x)=0$. $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=\int_0^1 P(t)\,dt$; donc P est constant.

Réciproquement soit $P\in\mathbb{R}_0[X]$. $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ P=\lambda$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(P)(x)=\int_0^x(t-x)\lambda\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1\lambda\,dt=\lambda\left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_0^x+\lambda\frac{x^2}{2}=-\lambda\frac{(-x)^2}{2}+\lambda\frac{x^2}{2}=0$.

Donc $h(P)=0_E$; $P\in\operatorname{Ker} h$.

Conclusion $\operatorname{Ker} h=\mathbb{R}_0[X]$

Montrons que $\operatorname{Im} h=S$ avec $S=\{\varphi\in\mathbb{R}[X]\mid\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0\}$.

Soit $\varphi\in\operatorname{Im} h$. $\exists P\in E,\ h(P)=\varphi$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=\int_0^x(t-x)\,P(t)\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,dt$ et $\varphi'(x)=x\int_0^1 P(t)\,dt-\int_0^x P(t)\,dt$

$\varphi(0)=\int_0^0(t-0)P(t)+\frac{0^2}{2}\int_0^1 P(t)\,dt=0$. $\varphi'(0)=0\int_0^1 P(t)\,dt-\int_0^0 P(t)\,dt=0$ et $\varphi'(1)=1\int_0^1 P(t)\,dt-\int_0^1 P(t)\,dt=0$

Donc $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. $\varphi\in S$

Soit $\varphi\in S$. $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\varphi'')(x)=\int_0^x\underset{u}{(t-x)}\,\underset{v'}{\varphi''(t)}\,dt+\frac{x^2}{2}\int_0^1\varphi''(t)\,dt$. Intégrons par parties la 1ère intégrale.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\varphi'')(x)=\left[(t-x)\varphi'(t)\right]_0^x-\int_0^x\varphi'(t)\,dt+\frac{x^2}{2}[\varphi'(1)-\varphi'(0)]$

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(\varphi'')(x)=-x\varphi'(0)-[\varphi(x)-\varphi(0)]+\frac{x^2}{2}(0-0)=-\varphi(x)$; $h(\varphi'')=-\varphi$

Donc $\varphi=h(-\varphi'')\in\operatorname{Im} h$

Finalement $\operatorname{Im} h=\{\varphi\in\mathbb{R}[X]\mid\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0\}$

B Etude d'une suite de polynômes

Q1.. $P_2 = h(P_1)$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$P_2(x)=\int_0^x (t-x)\left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt = \int_0^x\left(\frac{t^3}{2}-\left(1+\frac{x}{2}\right)t^2+xt\right)dt + \frac{x^2}{2}\left[\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$P_2(x)=\frac{x^4}{8}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x^3}{3}+x\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\left(-\frac13\right) = -\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{6}$$

$$\underline{\underline{P_2 = -\frac{1}{24}X^4+\frac16X^3-\frac16X^2}}.$$

Calculons $P_3=h(P_2)$ d'une autre manière.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $P_3''(x)=(h(P_2))''(x)=\int_0^1 P_2(t)\,dt - P_2(x)$

Donc $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_3''(x)=\alpha-P_2(x)=\alpha+\frac1{24}x^4-\frac16x^3+\frac16x^2$.

Donc $\exists\beta\in\mathbb{R}$, $P_3'=\beta+\alpha X+\frac1{120}X^5-\frac1{24}X^4+\frac1{18}X^3$

$P_3'(0)=P_3'(1)=0$ car $P_3\in\mathrm{Im}\,h$. Par conséquent : $\beta=0$ et $\alpha+\frac1{120}-\frac1{24}+\frac1{18}=0$

$\beta=0$ et $\alpha=-\frac1{45}$. $P_3'=\frac1{120}X^5-\frac1{24}X^4+\frac1{18}X^3-\frac1{45}X$

$\exists\gamma\in\mathbb{R}$, $P_3=\frac1{720}X^6-\frac1{120}X^5+\frac1{72}X^4-\frac1{90}X^2+\gamma$

Or $P_3(0)=0$ car $P_3\in\mathrm{Im}\,h$. Finalement : $\underline{\underline{P_3=\frac1{720}X^6-\frac1{120}X^5+\frac1{72}X^4-\frac1{90}X^2}}$

Q2.. Si $n\in[\![2,+\infty[\![$, $P_n=h(P_{n-1})\in\mathrm{Im}\,h$.

Donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\underline{\underline{P_n(0)=P_n'(0)=P_n'(1)=0}}$.

Q3.. Q1 laisse à penser que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ le terme de plus haut degré de P_n est : $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}X^{2n}$. Les arguments de la récurrence qui va donner ce résultat permettent de voir qu'il était aisé d'obtenir celui-ci sans avoir P_1, P_2, P_3.

→ La propriété est claire pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ $(n\geq2)$ et montrons la pour n.

$h(P_{n-1})=P_n$ donc $P_n'' = (h(P_{n-1}))'' = \int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt - P_{n-1}$.

Le monome de plus haut degré de P_n'' est celui de $-P_{n-1}$ c'est à dire $-\frac{(-1)^{n+1-1}}{(2(n-1))!}X^{2(n-1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

En "primitivant deux fois" on obtient pour monome de plus haut degré de P_n :

$$-\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}\,\frac{1}{2n-2+1}\times\frac{1}{2n-2+2}\times X^{2n-2+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}X^{2n}$$ ce qui achève la récurrence.

Remarque.. On pouvait aussi raisonner directement sur $P_n = h(P_{n-1})$.

Q4.. $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\underline{\underline{P_n'' = (h(P_{n-1}))'' = \int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt - P_{n-1}}}$.

Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in[\![2,+\infty[\![$

$$\int_0^1 P_n''(t)\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1\left(\int_0^1 P_{n-1}(u)\,du\right)\cos(k\pi t)\,dt - \int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt$$

(1) $$\int_0^1 P_n''(t)\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 P_{n-1}(u)\,du}_{\text{c'est une constante}}\ \underbrace{\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1}_{\text{c'est nul !}} - \int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt = -\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt$$ (1)

(2) $$\int_0^1 \underset{u'}{P_n''(t)}\underset{v}{\cos(k\pi t)}\,dt = \underbrace{[P_n'(t)\cos(k\pi t)]_0^1}_{\text{vaut 0 car } P_n'(0)=P_n'(1)=0\ (n\geq 2)} - \int_0^1 P_n'(t)(-k\pi\sin(k\pi t))\,dt = (k\pi)\int_0^1 P_n'(t)\sin(k\pi t)\,dt$$ (2)

intégration par parties

(3) $$\int_0^1 \underset{u'}{P_n'(t)}\underset{v}{\sin(k\pi t)}\,dt = \underbrace{[P_n(t)\sin(k\pi t)]_0^1}_{=0\text{ à cause des sinus}} - \int_0^1 (k\pi)P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = -k\pi\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt$$ (3)

Donc $$-\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt \underset{(1)}{=} \int_0^1 P_n''(t)\cos(k\pi t)\,dt \underset{(2)\text{ et }(3)}{=} (k\pi)(-k\pi)\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt$$

Finalement :

$$\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt$$

$\left(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt\right)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{(k\pi)^2}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{((k\pi)^2)^{n-1}}\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\,dt$

$$\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1 \underset{u}{\left(\tfrac{t^2}{2}-t\right)}\underset{v'}{\cos(k\pi t)}\,dt = \underbrace{\left[\left(\tfrac{t^2}{2}-t\right)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (t-1)\,\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = -\frac{1}{k\pi}\int_0^1 (t-1)\sin(k\pi t)\,dt$$

$$\int_0^1 \underset{u}{(t-1)}\underset{v'}{\sin(k\pi t)}\,dt = \left[(t-1)\left(-\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right)dt = -\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos(k\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1}_{=0} = -\frac{1}{k\pi}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\,dt = -\frac{1}{k\pi}\times\left(-\frac{1}{k\pi}\right) = \frac{1}{(k\pi)^2}$.

par conséquent : $\displaystyle \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}$ et ceci pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

PARTIE III

A

Q1.. Version 1.. Récurrence sur N (rapide et propre)

Version 2.. Incontournable (?!) lorsque l'on ne donne pas le résultat...

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]0,\pi]$

$$\sum_{k=1}^N \cos(kt) = \sum_{k=1}^N \mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^N e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\,\frac{1-(e^{it})^N}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}e^{iNt/2}}{e^{it/2}}\times\frac{e^{-iNt/2}-e^{iNt/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^N \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(e^{i(N+1)t/2}\,\frac{-2i\sin(Nt/2)}{-2i\sin(t/2)}\right) = \frac{\cos((N+1)t/2)\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{(N+1)t}{2}+\frac{Nt}{2}\right)-\sin\left(\frac{(N+1)t}{2}-\frac{Nt}{2}\right)}{\sin t/2}$$

$$\sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin t/2} - \frac{\sin(t/2)}{\sin(t/2)}\right] = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{2\sin t/2} - \frac{1}{2}.$$ Ceci achève Q1.

Q2.. Soient $N\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\sum_{k=1}^N \frac{1}{(k\pi)^{2n}} = \pi^{2n}\sum_{k=1}^N \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\sum_{k=1}^N \cos(k\pi t)\,dt$$

D'après Q1 $t\mapsto \sum_{k=1}^N \cos(k\pi t)$, qui est continue sur $[0,1]$ coïncide sur $]0,1]$ avec $t\mapsto \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})\pi t)}{2\sin(\frac{\pi t}{2})} - \dfrac{1}{2}$; par conséquent : $$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\pi t)}{2\sin\frac{\pi t}{2}} - \frac{1}{2}\right)dt.$$

Pour montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt$ il suffit de montrer que :

$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\,\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\pi t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = 0$ ou $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)\,\frac{\sin((N+\frac{1}{2})\pi t)}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = 0$ or ceci

résulte de manière évidente de I C Q2 en changeant dans cette question n en N et P en P_n car $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et $P_n(0)=0$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt$

Q3 .. D'après ce qui précède : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 P_1(t)\,dt$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = -\frac{\pi^4}{2}\int_0^1 P_2(t)\,dt$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = -\frac{\pi^6}{2}\int_0^1 P_3(t)\,dt$

Ne reste plus qu'à calculer ces intégrales.

$\int_0^1 P_1(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt = \left[\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$; $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$.

$\int_0^1 P_2(t)\,dt = \int_0^1 \left(-\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}t^2\right)dt = -\frac{1}{120}+\frac{1}{24}-\frac{1}{18} = \frac{1}{360}(-3+15-20) = -\frac{8}{360} = -\frac{1}{45}$; $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}}}$.

$\int_0^1 P_3(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{720}t^6-\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{72}t^4-\frac{1}{90}t^2\right)dt = \frac{1}{5040}-\frac{1}{720}+\frac{1}{360}-\frac{1}{270} = -\frac{2}{945}$. $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}}}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}$; $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$; $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

$\boxed{B}$ Q1.. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$. $P_n'' = \int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt - P_{n-1}$.

Donc $\sum_{p=2}^{2n} a_{n,p}\,p(p-1)X^{p-2} = \int_0^1 \sum_{p=0}^{2n-2} a_{n-1,p}\,t^p\,dt - \sum_{p=0}^{2n-2} a_{n-1,p}X^p$

$\sum_{p=2}^{2n} a_{n,p}\,p(p-1)X^{p-2} = \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1} - \sum_{p=2}^{2n} a_{n-1,p-2}X^{p-2}$

Par identification on obtient :

$a_{n,2}\times 2\times 1 = \sum_{p=0}^{2n-2}\frac{a_{n-1,p}}{p+1} - a_{n-1,0}$ (identification des termes constants)

et $\forall p\in [\![3,2n]\!]$, $a_{n,p}\,p(p-1) = -a_{n-1,p-2}$.

Remarquons encore que : $a_{n-1,0} = P_{n-1}(0)=0$, $a_{n,0} = P_n(0) = 0$, $a_{n,1} = P_n'(0) = 0$.

Il vient donc pour tout n dans $[\![2,+\infty[$:

$$\begin{cases} a_{n,0} = 0 \\ a_{n,1} = 0 \\ a_{n,2} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{p=0}^{2n-2} \dfrac{a_{n-1,p}}{p+1} \\ \forall p \in [\![3, 2n]\!],\ a_{n,p} = - \dfrac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)} \end{cases}.$$

Q2 a) les tableaux !

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Rappelons que $\beta_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt$ et que :

$$P''_{n+1} = \int_0^1 P_n(t)\,dt - P_n \quad (\text{II B Q4}).$$

Donc, en particulier : $P''_{n+1}(0) = -2\beta_n - P_n(0) = -2\beta_n$; $\beta_n = -\frac{1}{2} P''_{n+1}(0)$.

Mais $P_{n+1} = \sum_{p=0}^{2n+2} a_{n+1,p} X^p$; $P''_{n+1} = \sum_{p=2}^{2n+2} a_{n+1,p}\, p(p-1) X^{p-2}$; $P''_{n+1}(0) = 2a_{n+1,2}$

Donc $\underline{\underline{\beta_n = -a_{n+1,2}}}$ (nous pouvons grâce à cette égalité confirmer les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$)

ou $\underline{\beta_n = \frac{-1}{2} \sum_{p=0}^{2n} \frac{a_{n,p}}{p+1}}$ (et nous retrouvons $-\frac{1}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt$!!)

La seule difficulté du programme réside dans le stockage ! En utilisant un tableau à deux dimensions c'est sans gloire. Nous utiliserons donc un tableau a une seule dimension ! Ce tableau a (!) contiendra successivement les coefficients de $P_1, P_2, P_3, \dots$, Observons le passage de P_{n-1} à P_n et notons que pour avoir $a_{n,p}$ il est nécessaire d'avoir $a_{n-1,p-2}$ et pour avoir $a_{n,2}$ il nous faut $a_{n-1,0}$ $a_{n-1,1}$ $\cdots$ $a_{n-1,2n-2}$.

Sachant que a contient les coefficients de P_{n-1} (a[p] contient $a_{n-1,p}$ pour tout $p \in [\![0, 2n-2]\!]$)

il faut, calculer $a_{n,2}$ et le mettre de côté

(I) calculer $a_{n,2n}$ et le mettre dans a[2n] ; calculer $a_{n,2n-1}$ et le mettre dans a[2n-1], …

(II) calculer $a_{n,3}$ et le mettre dans a[3]

• Ne reste plus qu'à mettre $a_{n,2}$ (déjà calculé) dans a[2] puis 0 dans a[1] et a[0].

<u>Remarques</u> 1.. En fait $a_{n,0}$ est toujours nul et ne sert à rien ! Je l'ai supprimé !

2.. (I) et (II) peuvent se faire simultanément dans la même boucle.

3.. Tout cela est sans intérêt ! les coefficients de P_n, ainsi que β_n, étant des rationnels ce qui est intéressant c'est de les avoir sous forme de fractions. C'est l'objet du deuxième programme qui tourne rapidement mal ...

```
     program lyon93;

  uses crt;
  const r=50;
  var i,p,n:integer;s:real; a :array[1..r] of real;

  begin
  clrscr;
  write('Donnez la valeur de n (0<n<26) ');readln(n);

  {Calcul des coefficients de Pn}

  a[1]:=-1;a[2]:=0.5;
  for i:=2 to n do
    begin
      s:=0;
      for p:= 2*i downto 3 do
         begin
           s:=s+a[p-2]/(p-1);
           a[p]:=-a[p-2]/p/(p-1);
         end;
      a[1]:=0;
      a[2]:=s/2;
    end;
   {Calcul de BETAn}
    s:=0;
    for p:=1 to 2*n do
      s:=s+a[p]/(p+1);
      writeln('BETA indice ',n,' vaut ',-s/2)
   end.
```

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 1
BETA indice 1 vaut  1.6666666667E-01
```
1/6

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 2
BETA indice 2 vaut  1.1111111111E-02
```
1/90

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 3
BETA indice 3 vaut  1.0582010582E-03
```
1/945

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 4
BETA indice 4 vaut  1.0582010582E-04
```
1/9450

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 5
BETA indice 5 vaut  1.0688899578E-05
```
1/93555

```
Donnez la valeur de n (0<n<26) 6
BETA indice 6 vaut  1.0822021404E-06
```
691/638 512 875

```
program lyon93b;
uses crt;
const r=50;
var i,p,n:integer;ns,ds,u,max,min:longint;s:real; a,b :array[1..r] of longint;

{Cette fonction calcul le PGCD de deux entiers}

function pgcd(a,b:longint):longint;
var u:longint;
begin
a:=abs(a);b:=abs(b);
while b<>0 do
      begin
      u:=a mod b;
      a:=b;b:=u
      end;
pgcd:=a;
end;

{Cette fonction rend irréductible une fraction}

procedure simpl(var a,b:longint);
var u:longint;
begin
u:=pgcd(a,b);
a:=a div u;b:=b div u
end;

{Programme principal}

begin
write('Donnez la valeur de N (0<N<26) ');readln(n);

{Calcul des coefficients de Pn}

a[1]:=-1;a[2]:=1;b[1]:=1;b[2]:=2;
for i:=2 to n do
  begin
   ns:=0;ds:=1;
    for p:= 2*i downto 3 do
       begin
         ns:=ns*b[p-2]*(p-1)+ds*a[p-2];ds:=ds*b[p-2]*(p-1);
         simpl(ns,ds);
         a[p]:=-a[p-2];
         b[p]:=b[p-2]*p*(p-1);
         simpl(a[p],b[p]);
       end;
    a[1]:=0;b[1]:=1;
    a[2]:=ns;b[2]:=ds*2;simpl(a[2],b[2]);
  end;
  clrscr;writeln('Voici les coefficients de P',n);writeln;
  for p:=1 to 2*n do
      begin
      Write('Le coefficient de x puissance ',p,' est : ');
      if a[p]=0 then writeln(0)
                else writeln(a[p],' / ',b[p])
      end;


{Calcul de BETAn}

     ns:=0;ds:=1;
     for p:=1 to 2*n do
       begin
       ns:=ns*b[p]*(p+1)+ds*a[p];ds:=ds*b[p]*(p+1);simpl(ns,ds);
       end;
       ns:=-ns;ds:=ds*2;simpl(ns,ds);
       writeln('Beta indice ',n,' vaut ',ns,' / ',ds)
    end.
```

```
Donnez la valeur de N (0<N<26) 1

Voici les coefficients de P1

Le coefficient de x puissance 1 est : -1 / 1
Le coefficient de x puissance 2 est : 1 / 2
Beta indice 1 vaut 1 / 6
```

```
Donnez la valeur de N (0<N<26) 2


Voici les coefficients de P2

Le coefficient de x puissance 1 est : 0
Le coefficient de x puissance 2 est : -1 / 6
Le coefficient de x puissance 3 est : 1 / 6
Le coefficient de x puissance 4 est : -1 / 24
Beta indice 2 vaut 1 / 90
```

```
Donnez la valeur de N (0<N<26) 3

Voici les coefficients de P3

Le coefficient de x puissance 1 est : 0
Le coefficient de x puissance 2 est : -1 / 90
Le coefficient de x puissance 3 est : 0
Le coefficient de x puissance 4 est : 1 / 72
Le coefficient de x puissance 5 est : -1 / 120
Le coefficient de x puissance 6 est : 1 / 720
Beta indice 3 vaut 1 / 945
```

Sur le même sujet HEC 89 est intéressant.

$$\beta_n = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n-1}\, b_{2n}}{(2n)!}$$

$b_2 = \frac{1}{6}$; $b_4 = -\frac{1}{30}$; $b_6 = \frac{1}{42}$; $b_8 = -\frac{1}{30}$

$b_{10} = \frac{5}{66}$; $b_{12} = -\frac{691}{2730}$; $b_{14} = \frac{7}{6}$; $b_{16} = -\frac{3617}{510}$ ...

(Bourbaki. Fonction numérique d'une variable réelle p VI.8)

Voici les coefficients de P4

Le coefficient de x puissance 1 est : 0
Le coefficient de x puissance 2 est : -1 / 945
Le coefficient de x puissance 3 est : 0
Le coefficient de x puissance 4 est : 1 / 1080
Le coefficient de x puissance 5 est : 0
Le coefficient de x puissance 6 est : -1 / 2160
Le coefficient de x puissance 7 est : 1 / 5040
Le coefficient de x puissance 8 est : -1 / 40320
Beta indice 4 vaut 24867 / -84482

$$\beta_n = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n-1}\, b_{2n}}{(2n)!}$$

$b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$; $b_6 = \frac{1}{42}$; $b_8 = -\frac{1}{30}$

$b_{10} = \frac{5}{66}$; $b_{12} = -\frac{691}{2730}$; $b_{14} = \frac{7}{6}$

$b_{16} = -\frac{3617}{510}$ ...

BOURBAKI p VI 8