

PROBLÈME 2

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La résolution de la partie **III** utilise les notations et des résultats des parties **I** et **II**.

Partie I

A. Soit f l'application de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = \frac{x}{\sin x} . \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Prouver que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 5 cm).

B. Soit g une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$, tel que pour tout réel $x > 0$:

$$\left| \int_0^1 \sin(xt) g(t) dt \right| \leq \frac{A}{x} .$$

2. En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^1 \sin(xt) g(t) dt .$$

C. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme φ l'application de $]0,1[$ dans \mathbb{R} définie par $\varphi(x) = \frac{P(x)}{\sin \frac{\pi x}{2}}$.

a. Exprimer φ à l'aide de la fonction f étudiée au A.

b. En déduire que φ possède un prolongement de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi t}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P , associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t)dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P(t)dt .$$

A. Étude de h .

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q'(x) = x \int_0^1 P(t)dt - \int_0^x P(t)dt$.

b. Calculer Q'' .

2. Montrer que h est une application linéaire et que

- le noyau de h , $\mathcal{N}(h)$, est l'ensemble des polynômes constants,

- l'image de h , $\mathcal{I}(h)$, est l'ensemble des polynômes Q tel que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme Q , $h(Q'')$).

B. Étude d'une suite de polynômes.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = \frac{x^2}{2} - x \\ \text{et} \\ \forall n \geq 2, P_n = h(P_{n-1}) . \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3 .

2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$, pour $n \geq 2$?

3. Exprimer, en fonction de n , le monôme de plus haut degré de P_n .

4. Dédurre du II A. 1. la relation : pour $n \geq 2$, $P_n'' = \int_0^1 P_{n-1}(t)dt - P_{n-1}$.

Établir alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :

$$\forall n \geq 2, \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t) \cos(k\pi t) dt,$$

puis

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie III

A. 1. Établir, pour tout N entier naturel non nul :

$$\forall t \in]0, \pi], \sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \left(\frac{\sin(N + \frac{1}{2})\pi t}{2 \sin \frac{\pi t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) dt.$$

3. **Application.** Montrer que les sommes de séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.

B. 1. On pose $P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p} X^p$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{cases} a_{n,0} = 0, \\ a_{n,1} = 0, \\ a_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1}, \\ a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)}, \text{ pour tout entier } p \in [3, 2n]. \end{cases}$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \beta_n \pi^{2n},$$

pour un entier n , $1 \leq n \leq 25$, donné par l'utilisateur.

a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme ?

b. Écrire un programme en PASCAL qui calcule les coefficients de P_n puis le réel β_n et l'affiche.