I Etude de f. Remarque .. dans la suite nous pouvons être amenés à écrire que : $(\sin 0)^x = \begin{cases} 1 \text{ si } x=0 \\ 0 \text{ si } x>0 \end{cases}$

Q1 Soit $x \in [0,+\infty[$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], \sin t \geq 0$; $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], (\sin t)^x \geq 0$; donc $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \geq 0$.

f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x,x') \in [0,+\infty[^2$ tel que : $x \leq x'$.

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^x \geq (\sin t)^{x'}$; $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \geq \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x'} dt$; $f(x) \geq f(x')$

f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Q2 Soit $x \in [1,+\infty[$. Par prudence prenons ε dans $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x \sin t \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ u(t)=(\sin t)^x \text{ et } v'(t)=\sin t}}{=} [(\sin t)^x (-\cos t)]_\varepsilon^{\pi/2} - \int_\varepsilon^{\pi/2} x \cos t (\sin t)^{x-1} (-\cos t) dt$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \cos\varepsilon (\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^{x-1} dt = \cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} (1-\sin^2 t)(\sin t)^{x-1} dt$$

Donc $\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x-1} dt - x\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt$ (*)

$\lim_{\varepsilon \to 0} (\cos\varepsilon (\sin\varepsilon)^x) = 0$ car $x \geq 1$

Par conséquent en faisant tendre ε vers 0 dans (*) il vient : $f(x+1) = x f(x-1) - x f(x+1)$.

c'est à dire **$(x+1) f(x+1) = x f(x-1)$.**

Q3 a) Soit $x \in [0,+\infty[$. $g(x+1) = (x+2) f(x+2) f(x+1) \underset{Q2}{=} (x+1) f(x+1-1) f(x+1) = (x+1) f(x+1) f(x) = g(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x+1) = g(x)$. g est 1-périodique.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x+n) = g(x)$.

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$g(x+n+1) = g((x+n)+1) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ est 1-périodique}}}{=} g(x+n) \underset{(HR)}{=} g(x)$. Ceci achève la récurrence.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x+n) = g(x)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = g(0+n) = g(0) = 1 f(1) f(0) = f(1) f(0) = \frac{\pi}{2} f(1) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} [-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \frac{\pi}{2}$.

Q4 a) α. Soit $x\in[0,1]$ et soit $n\in\mathbb{N}$. $g(x+n)=(x+n+1)f(x+n+1)f(x+n)$.

$n+1\leq x+n+1\leq n+2$ donc $f(n+1)\geq f(x+n+1)\geq f(n+2)\geq 0$

$n\leq x+n\leq n+1$ donc $f(n)\geq f(x+n)\geq f(n+1)\geq 0$

Par produit il vient : $f(n+1)f(n)\geq f(x+n+1)f(x+n)\geq f(n+1)f(n+2)$.

En multipliant par $x+n+1$ on obtient :

$(x+n+1)f(n+1)f(n+2)\leq g(x+n)\leq (x+n+1)f(n+1)f(n)$.

β. Soit $x\in[0,1]$ et soit $n\in\mathbb{N}$

$\frac{\pi}{2}=g(n)=(n+1)f(n+1)f(n)$; $f(n+1)f(n)=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n+1}$.

De même $f(n+2)f(n+1)=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n+2}$.

α. donne alors : $\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+2}\leq g(x+n)=g(x)\leq\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+1}$.

Par conséquent : $\forall x\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+2}\leq g(x)\leq\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+1}$

γ. Soit $x\in[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+2}\leq g(x)\leq\frac{\pi}{2}\;\frac{x+n+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x+n+1}{n+2}=\lim\frac{x+n+1}{n+1}=1$. Donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans ce qui précède

on obtient : $\frac{\pi}{2}\leq g(x)\leq\frac{\pi}{2}$. Par conséquent : $\forall x\in[0,1]$, $g(x)=\frac{\pi}{2}$.

b) Soit $x\in[0,+\infty[$. Posons $n=E(x)$ et $y=x-E(x)=x-n$. Notons que $y\in[0,1[$

$g(x)=g(y+n)\underset{Q3\,b)}{=}g(y)\underset{r.}{=}\frac{\pi}{2}$

Finalement : $\forall x\in[0,+\infty[$, $g(x)=\frac{\pi}{2}$; $\forall x\in[0,+\infty[$, $(x+1)f(x+1)f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Q5 a) Soit $x\in[1,+\infty[$. $g(x-1)=\frac{\pi}{2}$; $xf(x)f(x-1)=\frac{\pi}{2}$.

$f(x-1)\geq f(x)\geq 0$ (Q1) ; $f(x)f(x-1)\geq(f(x))^2\geq 0$.

Donc $\frac{\pi}{2}=xf(x)f(x-1)\geq x(f(x))^2\geq 0$; $0\leq(f(x))^2\leq\frac{\pi}{2x}$; $0\leq\sqrt{(f(x))^2}\leq\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

$0\leq f(x)=|f(x)|=\sqrt{(f(x))^2}\leq\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

$\forall x\in[1,+\infty[$, $0\leq f(x)\leq\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

b) Par encadrement il vient alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

II Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

Q1 a) c'est presque du cours..

$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p+2} - S_{2p} = (-1)^{2p+1} f(2p+1) + (-1)^{2p+2} f(2p+2) = f(2p+2) - f(2p+1) \leq 0$; (f est décroissante)

$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p+3} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} f(2p+2) + (-1)^{2p+3} f(2p+3) = f(2p+2) - f(2p+3) \geq 0$;

$(S_{2p})_{p\geq 0}$ est donc décroissante et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante.

$\lim_{p\to+\infty} (S_{2p+1} - S_{2p}) = \lim_{p\to+\infty} \left((-1)^{2p+1} f(2p+1)\right) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Les suites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont donc adjacentes.

b) $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont alors convergentes et ont même limite ; par conséquent la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, ce qui signifie que la série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge.

Q2 a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin t} \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\pi/2}^{0} \frac{-du}{1+\sin(\frac{\pi}{2}-u)} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}.$$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \left[\tan\frac{u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = 1.$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle D_n \overset{\text{d'où !}}{=} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k\right] dt = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1+\sin t} - \frac{1-(-1)^{n+1}(\sin t)^{n+1}}{1-(-\sin t)}\right] dt$

$\displaystyle D_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^{n+1}(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt.$ $\displaystyle D_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt.$

b) $\displaystyle |D_n| = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt\right| = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt \underset{1+\sin t \geq 1}{\leq} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1}\,dt = f(n+1).$

$\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$; par conséquent $\lim_{n\to+\infty} D_n = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt - S_n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} D_n = 0$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = 1$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n) = 1.$