DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, dt .$$

En particulier : $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

I. Étude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.

2. Démontrer : $\forall x \in [1 ; +\infty[, \ (x+1)f(x+1) = x f(x-1)$.

   On pourra intégrer par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.

On note $g : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, par :

$$g(x) = (x+1)\, f(x+1)\, f(x) .$$

3. a. Montrer que g est 1– périodique, c'est-à-dire :

   $$\forall x \in [0 ; +\infty[, \ g(x+1) = g(x) .$$

   b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ g(x+n) = g(x)$.

   c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ g(n) = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Soit $x \in [0 ; 1]$.

   α. En utilisant 1., montrer :

   $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \le (x+n+1)\, f(n+1)\, f(n+2) \le g(x+n) \le (x+n+1)\, f(n)\, f(n+1)$.

   β. En déduire :

   $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+2} \le g(x) \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n+x+1}{n+1}$.

   γ. Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

   b. En déduire : $\forall x \in [0 ; +\infty[, \ g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. a. Établir : $\forall x \in [1 ; +\infty[, \ 0 \le f(x) \le \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

II. Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout n de IN : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

1. a. Montrer que les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (On pourra utiliser **I**.1. et **I**.5.)

   b. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

On considère l'application $\varphi : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $\varphi(t) = \frac{1}{1+\sin t}$.

2. a. Montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}$.

   b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt$.

3. On note, pour tout n de IN : $D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\,dt - S_n$.

   a. Montrer, pour tout n de IN :

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k \right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt.$$

   b. En déduire : $D_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   c. Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$?