DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0;1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0;1[\\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1.a. Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $]0;1[$.

c. Etablir que $f'(t)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0;1[$.

d. Montrer, pour tout réel t de $[0;1[$: $\quad \ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0$.

e. Dresser le tableau de variation de f. On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. (On n'étudiera pas la dérivée seconde de f, et on admettra que f est convexe.)

2.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0;1[$ et $x = 1$.)

On note $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0;1]$, par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

b. Montrer que g est continue sur $[0;1]$, de classe C^2 sur $[0;1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;1[$.

c. Etablir que $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

d. Dresser le tableau de variation de g. On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est : 1,65.

e. Etablir que g est convexe sur $[0;1[$.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de g. On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3.a. Justifier que, pour tout réel t de $[0;1[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t^n$ converge.

Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel n, $R_n : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall t \in [0;1[,\ R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k .$$

b. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0;1[$: $\quad R_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$
et en déduire que, pour tout entier naturel n, R_n est continue sur $[0;1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

d. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

e. Démontrer que, pour tout réel x de $[0;1[$, la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;1]$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n, $\rho_n : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0;1[,\ \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}.$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, ρ_n est continue sur $[0;1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t .$$

d. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

f. Conclure que, pour tout réel x de $[0;1[$: $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}.$