Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \,]0\,;\pi]$:

$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(m+1)t}{2}} \quad , \text{ puis } \quad \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit l'application $f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ si $t \in \,]0\,;\pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,\mathrm{d}t$.

b. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0\,;+\infty[)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3.a. Établir : $\forall (x,y) \in \left([0\,;+\infty[\right)^2, \quad S(y) - S(x) = (y-x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$

b. En déduire : $\forall (x,y) \in \left([0\,;+\infty[\right)^2, \quad |S(y) - S(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} |y-x|.$

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0\,;+\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x,y) de $\left([0\,;+\infty[\right)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[, \quad S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in \,]0\,;+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1\,;+\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n),$

et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

c. Conclure : $\quad S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x.$

7.a. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.