CODE SUJET :
295
EML_MATS

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I
Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2. On considère l'application

$$A : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

b. Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c. Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0\,;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d. Dresser le tableau de variation de A.

En déduire que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B.

En déduire que f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0\,;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$: $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}.$

4. En déduire que, pour tout $x \in [0\,;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\,. \end{cases}$$

4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F : \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G : \left]0\,;+\infty\right[^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $\left]0\,;+\infty\right[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in \left]0\,;+\infty\right[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1\,,1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?