1ère partie.. Q1.. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons d'abord que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
C'est clair si $x = 0$. Supposons $x > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{n+1}$; par conséquent : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow 0 \leqslant \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \leqslant \frac{1}{2}$ (il suffit d'avoir $\frac{x}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ c'est à dire $n \geqslant 2x-1$; on peut donc prendre $p = E(2x-1)+1 = E(2x)$)

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u_n(x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p(x) = \frac{1}{2^n}(2^p u_p(x))$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}(2^p u_p(x))$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Montrons maintenant que : $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = e^x$. C'est évident si $x = 0$. Supposons $x > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists \theta_n \in]0,1[$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_n x}$ ($f : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = e^x$. MAC-LAURIN fait le reste !)
$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^x - v_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_n x} = u_{n+1}(x) e^{\theta_n x}$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) e^{\theta_n x} \leqslant u_{n+1}(x) e^x$; $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}(x) e^x = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}(x) e^{\theta_n x} = 0$; par conséquent $\lim_{n\to+\infty} (e^x - v_n(x)) = 0$ ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = e^x$
En clair la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ... ce n'est pas nouveau !
CL.. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers e^x (notons que ceci vaut encore pour $x \in \mathbb{R}^*_-$)
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n(x) = v_n(x) + u_n(x)$; $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = e^x$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$; par conséquent
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(w_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers e^x (c'est encore vrai pour $x \in \mathbb{R}^*_-$)

Q2.. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}(x) - v_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geqslant 0$; $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante.
Remarque.. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, $(v_n(x))_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}(x) - w_n(x) = (v_{n+1}(x) - v_n(x)) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} = 2\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{2x}{n+1} - 1\right)$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}(2x - (n+1))$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $2x - (n+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leqslant n$. Posons $p = E(2x)$; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow n \geqslant 2x-1$; donc
$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p \Rightarrow w_{n+1}(x) \leqslant w_n(x)$; $(w_n(x))_{n\geqslant p}$ est décroissante
CL.. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(w_n(x))_{n\geqslant 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang (rang qui dépend de x).
Q3.. Supposons $x \in]0, \ln 2[$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}(x) - w_n(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}(2x - (n+1)) \underset{\downarrow}{\overset{x>0 \text{ et } x<\ln 2}{<}} \frac{x^n}{(n+1)!}(2\ln 2 - n - 1) < \frac{x^n}{(n+1)!}(0{,}4 - n)$
Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1}(x) - w_n(x) < 0$; $(w_n(x))_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante et converge vers e^x donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n(x) > e^x$ (... raisonner par l'absurde).
Montrons cette inégalité pour $n = 0$
$e^x < e^{\ln 2} = 2 = 1 + 1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^0}{0!} = w_0(x)$
Finalement : $\forall x \in]0, \ln 2[$, $e^x < w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$ (1)

- Supposons $x \in]0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \theta_n \in]0,1[$, $e^x \underset{\uparrow}{=} v_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_n x} \leqslant v_n(x) + \frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!} \underset{\downarrow}{<} v_n(x) + \frac{e}{(n+1)!}$
voir plus haut — $\theta_n \in]0,1[$ et $x \in]0,1]$
$e^x < v_n(x) + \frac{e}{(n+1)!}$

Cette inégalité vaut encore pour $x=0$. $\left(1 < 1 + \frac{e}{(n+1)!}\right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}\left.\right)$

CL.. $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \; e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}$ (2)

<u>2ème partie</u>.. Nous sommes encore en terrain connu sinon conquis !

Rappel.. Ω est un ensemble. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la fonction caractéristique de A est l'application ϕ_A de Ω dans $\mathbb{R}$... ou dans $\{0,1\}$ telle : $\forall x \in A, \phi_A(x)=1$ et $\forall x \in \bar{A}, \phi_A(x)=0$. Soient A et B deux parties de Ω.

$A \subset B \Rightarrow \phi_A \leq \phi_B$, $\phi_A = \phi_B \Leftrightarrow A=B$; $\phi_{\bar{A}} = \phi_\Omega - \phi_A = 1-\phi_A$; $\phi_{A\cap B} = \phi_A \phi_B$; $\phi_{A \cup B} = \phi_A + \phi_B - \phi_A \phi_B$ ...

Q1.. $a \in \mathbb{R}_+$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\phi_A(n)}{n!} a^n \leq \frac{1}{n!} a^n = \frac{a^n}{n!}$, la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ étant convergente. Il en est de même de la série de terme général $\frac{\phi_A(n)}{n!} a^n$ (règle de comparaison des séries <u>positives</u>)

Par conséquent la suite $(S_n^A(a))_{n \geq 0}$ converge.

Q2.. $\rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \phi_\emptyset(k) = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^A(a) = 0$; $m(\emptyset) = 0$.

$\rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \phi_{\{0\}}(k) = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^A(a) = 1$; $m(\{0\}) = 1$

$\rightarrow \forall k \in \mathbb{N}-\{p\}, \phi_{\{p\}}(k) = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow S_n^A(a) = \frac{a^p}{p!}$; $m(\{p\}) = \frac{a^p}{p!}$

$\rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \phi_{\mathbb{N}}(k) = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^A(a) = S_n(a)$; $m(\mathbb{N}) = e^a$

Q3.. Désormais : $a \in]0, \ln 2[$.

a.. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^A(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!} a^k \underset{A\subset B \Rightarrow \phi_A \leq \phi_B}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_B(k)}{k!} a^k = S_n^B(a)$

Donc $\lim_{n \to +\infty} S_n^A(a) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n^B(a)$; c'est à dire : $m(A) \leq m(B)$

b.. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), 0 \underset{a\geq 0}{\leq} m(A) \leq m(\mathbb{N}) = e^a \underset{a \in]0,\ln 2[}{<} 2$, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), m(A) \in [0, 2[$.

c.. C'est évident car $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \phi_{A\cup B} = \phi_A + \phi_B$! Je vous laisse détailler... c'est de l'écriture.

Q4..<u>a)</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, $e^a \overset{(1)}{<} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^n}{n}$; $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^n}{n!}$; $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < \frac{a^n}{n!}$

$$m(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\phi_B(k)}{k!} a^k = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\phi_B(k)}{k!} a^k \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < \frac{a^p}{p!}$$

$\llcorner \phi_B(k) = 0$ pour $k \leq p$ (p est le plus petit élément de $A \cup B$ et $p \notin B$)

$p \in A$; $\{p\} \subset A$; $m(\{p\}) \leq m(A)$; $\frac{a^p}{p!} \leq m(A)$

Finalement : $m(B) < \frac{a^p}{p!} \leq m(A)$.

<u>b)</u> $(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, $A \cap B = \emptyset$ et $m(A) = m(B)$. Supposons $A \cup B \neq \emptyset$. Soit p le plus petit élément de $A \cup B$; ou $p \in A$ et $p \notin B$ ou $p \notin A$ et $p \in B$ $(A \cap B = \emptyset)$. Dans le premier cas $m(B) < m(A)$ et dans le second $m(A) < m(B)$ (Q4a). Ceci est impossible, par conséquent $A \cup B = \emptyset$; $A=B=\emptyset$

Finalement : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, $A \cap B = \emptyset$ et $m(A) = m(B) \Rightarrow A = B = \emptyset$

Q5 a.. Il suffit de montrer que : $\phi_A - \phi_B = \phi_{A \cap \bar{B}} - \phi_{\bar{A} \cap B}$.

$\phi_{A\cap\bar{B}} - \phi_{\bar{A}\cap B} = \phi_A \phi_{\bar{B}} - \phi_{\bar{A}} \phi_B = \phi_A(1-\phi_B) - (1-\phi_A)\phi_B = \phi_A - \phi_A\phi_B - \phi_B + \phi_A \phi_B = \phi_A - \phi_B$.

Q5 b.. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que : $m(A)=m(B)$.

$0=m(A)-m(B)=m(A\cap\bar{B})-m(B\cap\bar{A})$; $m(A\cap\bar{B})=m(B\cap\bar{A})$ et $(A\cap\bar{B})\cap(B\cap\bar{A})=\emptyset$,

donc $A\cap\bar{B}=B\cap\bar{A}=\emptyset$ (Q4b).

$A\cap\bar{B}=\emptyset$ donne : $A\subset B$, et $B\cap\bar{A}=\emptyset$ donne : $B\subset A$. donc $A=B$.

Cl.. $\forall(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, $m(A)=m(B)\Rightarrow A=B$. m est une application injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans [0,

3ème Partie.. Q1.. a)

. Soit $f\in E$. $U(f)$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui vaut 0 en 0 donc $U(f)$ est en particulier continue sur [0

$\forall f\in E$, $U(f)\in E$; U est bien une application de E dans E.

. Soit $(f,g)\in E^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$\forall x\in[0,1]$, $(U(\alpha f+\beta g))(x)=\int_0^x(\alpha f+\beta g)(t)dt=\alpha\int_0^x f(t)dt+\beta\int_0^x g(t)dt=\alpha U(f)(x)+\beta U(g)(x)=(\alpha U(f)+\beta U(g))(x)$;

donc $U(\alpha f+\beta g)=\alpha U(f)+\beta U(g)$.

Par conséquent U est un endomorphisme de E.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: ▲ $\forall f\in E$, $\forall x\in[0,1]$, $U^n(f)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt$

. Pour n = 1 c'est évident.

. Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour n+1. Soient $f\in E$ et $x\in[0,1]$.

$$U^{n+1}(f)(x)=U^n(U(f))(x)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{H.R. } (U(f)\in E)}}{=}\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}U(f)(t)dt=\left[-\frac{(x-t)^n}{n!}U(f)(t)\right]_0^x-\int_0^x-\frac{(x-t)^n}{n!}(U(f))'(t)dt$$

intégration par parties

$$U^{n+1}(f)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt \quad\text{car } (x-x)^n\underset{n\in\mathbb{N}^*}{=}0,\ U(f)(0)=0 \text{ et } (U(f))'=f\ .\quad \text{cqfd !}$$

Par conséquent : $\forall f\in E$, $U^{n+1}(f)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt$ pour tout $x\in[0,1]$

▲ Remarque.. Le $\forall f\in E$ est indispensable ; en effet nous avons appliqué l'hypothèse de récurrence à $U(f)$ et non pas à f. Toute démonstration commençant par "montrons que si $f\in E$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1]$, $U^n(f)(x)=\dots$" ne peut-être que fausse ! You se

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $V_n\circ U=\left(\sum_{k=1}^n U^k\right)\circ U=\sum_{k=1}^n U^{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}U^k=V_{n+1}-U$ (... toujours vrai).

$$U\circ V_n=U\circ\left(\sum_{k=1}^n U^k\right)\underset{\uparrow}{=}\sum_{k=1}^n U\circ U^k=\sum_{k=1}^n U^{k+1}=V_{n+1}-U$$

utilise la linéarité de U

"Morale".. $\circ$ est distributive à droite par rapport à + mais en général pas à gauche ... sauf dans $\mathcal{L}(E)$.

Q2 a.. . $\forall f\in E$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\|\alpha f\|=\sup_{x\in[0,1]}|\alpha f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|\alpha||f(x)|=|\alpha|\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=|\alpha|\|f\|$.

. Soit $(f,g)\in E^2$. $\forall x\in[0,1]$, $|(f+g)(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\|f\|+\|g\|$

$\forall x\in[0,1]$, $|(f+g)(x)|\leq\|f\|+\|g\|$ donc $\sup_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)|\leq\|f\|+\|g\|$

... plus petit des majorants...

donc $\forall(f,g)\in E^2$, $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$.

. Soit $f\in E$. $\|f\|=0\Rightarrow\forall x\in[0,1]$, $|f(x)|\leq\|f\|=0\Rightarrow\forall x\in[0,1]$, $f(x)=0\Rightarrow f=0$.

b.. Soit $f\in E$. $|U(f)(x)|=\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leq\int_0^x|f(t)|dt\leq\int_0^x\|f\|dt=x\|f\|\leq\|f\|$ pour tout $x\in[0,1]$

Par conséquent : $\sup_{x\in[0,1]}|U(f)(x)|\leq\|f\|$; $\|U(f)\|\leq\|f\|$... qui assure la continuité de U !!

U est 1-lipschitzienne.

Q3.- Soit $f\in\mathcal{C}$. $\forall x\in[0,1]$, $V(f)(x)=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$; $V(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions dérivables ; en particulier $V(f)$ est continue sur $[0,1]$; $V(f)\in\mathcal{C}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$
Soit $x\in[0,1]$. $V(f)(x)-V_n(f)(x)=V(f)(x)-\sum_{k=1}^{n}U^k(f)(x)=\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f(t)\,dt$

$$|V(f)(x)-V_n(f)(x)|\le\int_0^x\left|e^{x-t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\right||f(t)|\,dt=\int_0^x\left|e^{x-t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\right||f(t)|\,dt$$

$$|V(f)(x)-V_n(f)(x)|\le\int_0^x\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}\right||f(t)|\,dt=\int_0^x\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}\right)|f(t)|\,dt$$

$\forall t\in[0,x]$, $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(x-t)^k}{k!}<\frac{e}{n!}$. (Inégalité (2) appliquée à $x-t$ qui appartient à $[0,1]$ pour $\underline{\underline{n-1}}$)

$e^{x-t}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(x-t)^k}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}$

donc $|V(f)(x)-V_n(f)(x)|\le\int_0^x\frac{e}{n!}|f(t)|\,dt\le\frac{e}{n!}\|f\|$ Déjà vu !

$\forall x\in[0,1]$, $|V(f)(x)-V_n(f)(x)|\le\frac{e}{n!}\|f\|$ donc $\|V(f)-V_n(f)\|\le\frac{e}{n!}\|f\|$.

Q4a.- $(I-U)\circ(I+V)=I-U+V-U\circ V=I+(V-U)-U\circ V\overset{U\circ V=V-U}{=}I$
$(I+V)\circ(I-U)=I-V\circ U-U+V=I+V-U-V\circ U=I$
Ceci suffit pour prouver la bijectivité de $I-U$ et $I+V$ et pour dire que : $(I-U)^{-1}=I+V$ et $(I+V)^{-1}=I-U$

b.- Soit $f\in\mathcal{C}$. Posons $g(x)=e^{-x}$ pour tout $x\in[0,1]$
$\forall x\in[0,1]$, $f(x)-\int_0^x f(t)\,dt=e^{-x}$
$\Updownarrow$
$I(f)-U(f)=g$
$\Updownarrow$
$(I-U)(f)=g$
$\Updownarrow$
$f=(I-U)^{-1}(g)=(I+V)(g)=g+V(g)$
$\Updownarrow$
$\forall x\in[0,1]$, $f(x)=g(x)+V(g)(x)=e^{-x}+\int_0^x e^{x-t}e^{-t}\,dx=e^{-x}+e^x\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x=e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^x=\operatorname{ch}x$

Comme $x\mapsto\operatorname{ch}x$ est continue sur $[0,1]$, l'équation proposée admet une solution et une seule la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=\operatorname{ch}x$.

Complément.. Notons que $\underline{V\circ U=V-U}$. $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|V_n(f)(x)-V(f)(x)|\le\|V_n(f)-V(f)\|\le\frac{e}{n!}\|f\|$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
$\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n!}=0$; par conséquent : $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}V_n(f)(x)=V(f)(x)$; donc $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty}V_n(U(f))(x)=V(U(f))(x)$

Donc $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in[0,1]$, $V(U(f))(x)=\lim_{n\to+\infty}((V_n\circ U)(f))(x)=\lim_{n\to+\infty}((V_{n+1}-U)(f))(x)=\lim_{n\to+\infty}(V_{n+1}(f)(x)-U(f)(x))$

mais $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}V_{n+1}(f)(x)=V(f)(x)$ donc $\lim_{n\to+\infty}(V_{n+1}(f)(x)-U(f)(x))=V(f)(x)-U(f)(x)$ pour tout $f\in\mathcal{C}$ et tout $x\in[0,1]$

Finalement : $\forall f\in\mathcal{C}$, $\forall x\in[0,1]$, $V(U(f))(x)=V(f)(x)-U(f)(x)=(V(f)-U(f))(x)$; donc :
$\forall f\in\mathcal{C}$, $V(U(f))=V(f)-U(f)$; par conséquent : $V\circ U=V-U$ ... avouez de montrer

que : $U\circ V=V-U$ (ce n'est pas le plus simple ! utilisez $\|U(f)\|\le\|f\|$)
" En fait $V=\sum_{k=1}^{+\infty}U^k$, donc $V\circ U=\sum_{k=1}^{+\infty}U^{k+1}$, $U\circ V=\sum_{k=1}^{+\infty}U^{k+1}$, $V-U=\sum_{k=1}^{+\infty}U^k-U=\sum_{k=2}^{+\infty}U^k=\sum_{k=1}^{+\infty}U^{k+1}$ " !
Mieux $V+I=\sum_{k=0}^{+\infty}U^k=(I-U)^{-1}$ en regardant bien cela ressemble à $\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ ... à méditer.