PARTIE 1

Q1.. Etude de I_p. a)

Soit $p\in\mathbb{N}$. $\lim_{x\mapsto+\infty}(x^{p+2}e^{-x})=0$ donc $\exists n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\geq n \Rightarrow x^{p+2}e^{-x}\leq 1$ (définition avec $\varepsilon=1$)

Ainsi : $\forall x\in[n,+\infty[$, $0\leq x^pe^{-x}\leq \frac{1}{x^2}$. $f_p: x\mapsto x^pe^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) sur $\mathbb{R}_+$ et positive ; $\forall x\in[n,+\infty[$, $0\leq f_p(x)\leq\frac{1}{x^2}$.
Par conséquent $\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ étant convergente, $\int_n^{+\infty}f_p(x)dx$ aussi (règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives).
Donc $\int_0^{+\infty}f_p(x)dx$ existe. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I_p=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx$ existe.

b)

Soit $p\in\mathbb{N}$. Soit $A\in\mathbb{R}_+$. $\int_0^A x^{p+1}e^{-x}dx = [-x^{p+1}e^{-x}]_0^A-\int_0^A(p+1)x^p(-e^{-x})dx$

intégration par parties ; $u(x)=x^{p+1}$ et $v'(x)=e^{-x}$

$\int_0^A x^{p+1}e^{-x}dx=-A^{p+1}e^{-A}+(p+1)\int_0^A x^pe^{-x}dx$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient : $I_{p+1}=(p+1)I_p$ car $\lim_{A\mapsto+\infty}(-A^{p+1}e^{-A})=0$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $I_{p+1}=(p+1)I_p$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\frac{I_{p+1}}{(p+1)!}=\frac{(p+1)\,I_p}{(p+1)!}=\frac{I_p}{p!}$; la suite $\left(\frac{I_p}{p!}\right)_{p\geq0}$ est constante : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\frac{I_p}{p!}=\frac{I_0}{0!}=I_0$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $I_p=p!\,I_0$. $I_0=\lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A e^{-x}dx=\lim_{A\mapsto+\infty}(-e^{-A}+1)=1$. Finalement.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $I_p=p!$

Q2.. Etude de J_p. a) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $g_p: x\mapsto\frac{x^p}{e^x-1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, en particulier g_p est localement intégrable sur cet intervalle.

$g_p(x)\underset{0}{\sim}\frac{x^p}{x}=x^{p-1}$; $\lim_{x\mapsto0}g_p(x)=\begin{cases}0 & \text{si } p\geq2\\ 1 & \text{si } p=1\end{cases}$; dans les deux cas g_p est prolongeable par continuité en 0 ; pour tout $n\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^n g_p(x)dx$ existe.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 g_p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{p+2}}{e^x-1}\right) = 0$. $\exists \Pi \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall x \in [\Pi, +\infty[$, $x^2 g_p(x) \leq 1$.

$\forall x \in [\Pi, +\infty[$, $0 \leq g_p(x) \leq \frac{1}{x^2}$; comme dans Q1a, la convergence de $\int_\Pi^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ donne la convergence de $\int_\Pi^{+\infty} g_p(x)dx$ (on pouvait aussi remarquer que $g_p(x) \underset{+\infty}{\sim} f_p(x)$). Finalement pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x-1}dx \text{ existe.}}}$

__Remarque__.. J_0 n'existe pas... (dire que $\frac{1}{e^x-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ ou écrire $\frac{1}{e^x-1} = \underset{\text{DVG}}{\frac{1}{x}} + \underset{\text{CVG}}{\frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)}}$)

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*_+$.

$$\sum_{k=1}^n e^{-kx} = \sum_{k=1}^n (e^{-x})^k \underset{\underline{\underline{e^{-x}\neq 1}}}{=} e^{-x}\frac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}} = \frac{1-e^{-nx}}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{e^{-nx}}{e^x-1}$$

Par conséquent : $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{e^x-1}$; donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^{(*)}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*_+, \quad \frac{x^p}{e^x-1} = x^p \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}$$

• et non $\mathbb{N}^*$ à cause de Q2 d) !!

c) Soit $p \in \boxed{\mathbb{N}}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall A \in \mathbb{R}^*_+, \int_0^A x^p e^{-kx}dx \underset{\substack{u=kx \\ du=kdx}}{=} \int_0^{kA} \left(\frac{u}{k}\right)^p e^{-u}\frac{1}{k}du = \frac{1}{k^{p+1}}\int_0^{kA} u^p e^{-u}du$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^{kA} u^p e^{-u}du = I_p = p!$; donc $\underline{\underline{\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A x^p e^{-kx}dx = \frac{p!}{k^{p+1}}}}$.

Enfin, pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} x^p e^{-kx}dx$ converge et vaut : $\frac{p!}{k^{p+1}}$.

d) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive ; sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0. Par conséquent :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq e^0(x-0) + e^0 = x+1$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 \geq x$

En particulier : $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad e^x - 1 \geq x.}}$

__Remarque__.. On pouvait aussi étudier la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in]0,+\infty[$. Soit encore $n \in \mathbb{N}^*$!

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^x - 1 \geqslant x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant \frac{1}{e^x-1} \leqslant \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} \leqslant x^{p-1} e^{-nx}$

$x \to \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et $\int_0^A x^{p-1} e^{-nx}\,dx$ existe (!)

Par conséquent les inégalités précédentes prouvent que :

1°. $\int_0^A \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx$ converge

2° $0 \leqslant \int_0^A \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx \leqslant \int_0^A x^{p-1} e^{-nx}\,dx$.

Ici je suis hors-programme ! Disons alors que $\int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}dx$ converge car $x \mapsto \frac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}$ est prolongeable par continuité à 0 ($p \geqslant 1$ ...)

$B \mapsto \int_0^B x^{p-1} e^{-nx}\,dx$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $x \mapsto x^{p-1}e^{-nx}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{B\to+\infty} \int_0^B x^{p-1}e^{-nx}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II} \ c)}}{=} \dfrac{(p-1)!}{n^p}$. Par conséquent :

$\forall B \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^B x^{p-1}e^{-nx}\,dx \leqslant \dfrac{(p-1)!}{n^p}$. Il en résulte que : $0 \leqslant \int_0^A \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx \leqslant \dfrac{(p-1)!}{n^p}$

c) $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x^p}{e^x-1} = x^p \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-kx} + \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}$.

Notons encore que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A \dfrac{x^p}{e^x-1}\,dx$ et $\int_0^A \dfrac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx$ sont convergentes,

$$\left| \int_0^A \frac{x^p}{e^x-1}\,dx - \int_0^A \Big(x^p \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}\Big)\,dx \right| = \left| \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx \right| = \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x-1}\,dx \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p}$$

ou $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| \int_0^A \dfrac{x^p}{e^x-1}\,dx - \sum\limits_{k=1}^{n} \int_0^A x^p e^{-kx}\,dx \right| \leqslant \dfrac{(p-1)!}{n^p}$

Or : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \dfrac{x^p}{e^x-1}\,dx = J_p$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A x^p e^{-kx}\,dx = \dfrac{p!}{k^{p+1}}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$)

Donc : $\left| J_p - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{p!}{k^{p+1}} \right| \leqslant \dfrac{(p-1)!}{n^p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Q3.. Soit $p \in \mathbb{N}$. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^{p+1}}$ converge si et seulement si : $p+1>1$; c'est à dire si : $p \geq 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. 1°.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|J_p - p! \sum_{k=1}^{n} u_k| = |J_p - p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}}| \leq \frac{(p-1)!}{n^p}$

2°.. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(p-1)!}{n^p} = 0$

Il vient par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} (p! \sum_{k=1}^{n} u_k) = J_p$ ou $\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{n} u_k) = \frac{1}{p!} J_p$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}} = \frac{1}{p!} J_p = \frac{1}{p!} \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Remarque.. Considérons $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Γ est défini sur $\mathbb{R}_+^*$ et ζ sur $]1,+\infty[$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(p) = (p-1)!$ ($\Gamma(p) = I_{p-1}$ ...)

Ce qui précède prouve que $\zeta(p+1)\,\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt$.

On peut prouver que ceci vaut encore pour $p \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice.. Écrire un programme en T.P. permettant de donner une valeur approchée à ε près de $\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ (l'utilisateur fournit p et ε).

PARTIE II

Q1.. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 1 = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - 1 = \frac{1+u_n - 2\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} = \frac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}} \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 1$. Par conséquent :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$

Remarque. En toute rigueur il fallait commencer par prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie (récurrence... u_n défini et $u_n > 0$ ...)

Q2 a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - u_n = \frac{1+u_n - 2u_n\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}}$

Notons que : $1 + X^2 - 2X^3 = (1-X)(2X^2 + X + 1)$; en prenant la valeur de $\sqrt{u_n}$ en chaînant :

$1 + u_n - 2u_n\sqrt{u_n} = (1-\sqrt{u_n})(2u_n + \sqrt{u_n} + 1)$

$u_{n+1}-u_n$ est donc du signe de $1+u_n-2u_n\sqrt{u_n}=(1-\sqrt{u_n})(2u_n+\sqrt{u_n}+1)$ ou du signe de $1-\sqrt{u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant 1$; donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1-\sqrt{u_n}\leqslant 0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.

En clair $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 1 ; elle converge.

Ceci est suffisant pour dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Posons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant 1$ donc $\ell\geqslant 1$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $1+u_n=2\sqrt{u_n}\,u_{n+1}$. A la limite ceci donne : $1+\ell=2\sqrt{\ell}\,\ell$;

$0=1+\ell-2\sqrt{\ell}\,\ell=(1-\ell)(2\ell+\sqrt{\ell}+1)$. Finalement $\ell=1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Q3.. a) Notons d'abord par récurrence que si $x\neq 1$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>1$.

Nous aurons alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n>0$ (et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n\neq 0$)
$\hookrightarrow v_0=x-1\neq 0$.

* $u_1-1=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}-1=\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}>0$ car $\sqrt{x}\neq 1$!

* supposons pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>1$. $u_{n+1}-1=\dfrac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}}>0$ car $\sqrt{u_n}\neq 1$! Ceci achève la récurrence.

Remarquons encore que si $x=1$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=0$; il n'est donc pas question d'étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$!

Supposons $x\neq 1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{\frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}-1}{u_n-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{u_n}}\times\dfrac{1}{u_n-1}(1+u_n-2\sqrt{u_n})$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2\sqrt{u_n}}\,\frac{1}{u_n-1}\times(\sqrt{u_n}-1)^2$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2\sqrt{u_n}}\times\frac{1}{\sqrt{u_n}+1}\times\frac{(\sqrt{u_n}-1)^2}{\sqrt{u_n}-1}=\frac{\sqrt{u_n}-1}{2\sqrt{u_n}(\sqrt{u_n}+1)}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=0.$

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0$: $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{1}{2}$. $(\dots \varepsilon = \frac{1}{2} \dots)$

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} v_n$ $\quad (v_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*)$

Une récurrence simple donne : $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-p}} v_p$.

Donc $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \leqslant v_n \leqslant (2^p v_p) \frac{1}{2^n}$.

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge ($|1/2| < 1$!) donc la série de terme général v_n aussi (règles de comparaison des séries à termes positifs).

<u>La série de terme général $v_n = -1 + u_n$ converge</u> (pour $x \neq 1$ et pour $x = 1$ car si $x = 1$: $v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Remarque.. D'Alembert donnait immédiatement le résultat, mais...

<u>b)</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n > 0$. Donc $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $(\ln P_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln u_k$; la suite $(\ln P_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si la <u>série</u> de terme général $w_n = \ln(u_n)$ converge.

$\cdot$ - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \geqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$

- $w_n = \ln(u_n) \sim u_n - 1 = v_n$ car $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 1$

La convergence de la série de terme général v_n donne alors la convergence de la série de terme général w_n (règle de comparaison des séries à termes positifs).

Par conséquent : $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente ... vers un réel strictement positif !

Exercice.. Ecrire un programme en T.P. calculant P_n.

PARTIE <u>III</u>

Q1.. <u>Remarques</u>..1. Une récurrence simple prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est défini, b_n est défini, $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$.

En clair les suites (a_n) et (b_n) sont définies et à termes positifs, ceci pour a et b dans $\mathbb{R}_+$.

2.. Notons E l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.

Posons $\mathcal{S} = \{((a_n),(b_n)) \in E^2 \mid a_0 \geqslant 0,\ b_0 \geqslant 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\}$

Il est aisé de voir que - si $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{S}$, $((a_{n+1}),(b_{n+1}))$ aussi.

- si $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{S}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $((\lambda a_n),(\lambda b_n)) \in \mathcal{S}$.
- si $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{S}$, $((c_n),(d_n)) \in \mathcal{S}$ et si

$a_0 = c_0$ et $b_0 = d_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n$ et $b_n = d_n$

Ces résultats s'obtiennent par des récurrences banales.

Bien s'imprégner de cela pour comprendre la suite.

---

a) $\underline{a = 0 \text{ et } b \geqslant 0.}$ $a_1 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{2} b$; $a_2 = 0$ et $b_2 = \frac{1}{2} b_1 = \frac{1}{2^2} b$...

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{2^n} b$.

- C'est clair pour $n = 0$
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$

$a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{2^n} b$ donc $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = 0$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2^{n+1}} b$!

ceci achève la récurrence

En clair si $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{S}$ et si $a_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{2^n} b_0$.

$\underline{a \geqslant 0 \text{ et } b = 0.}$ $a_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 0$ et $b_1 = \frac{1}{2} a$

Nous sommes ramené à la situation précédente à partir du rang 1... Formalisons

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_{n+1}$ et $d_n = b_{n+1}$.

Alors $((c_n),(d_n)) \in \mathcal{S}$, $c_0 = 0$ et $d_0 = b_1 = \frac{1}{2} a$. Ce qui précède donne alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 0$ et $d_n = \frac{1}{2^n} d_0 = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{2^{n+1}} a$;

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} a$;

ou $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{2^n} a$.

Si $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{S}$ et si $b_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{2^n} a_0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geqslant 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geqslant 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant a_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} \leqslant b_n$.

Donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ décroissante.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$

$(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par b_1 ; elle converge.

$(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par a_1 ; elle converge.

Donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes.

Posons $\ell = \lim a_n$ et $\ell' = \lim b_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ donc $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$ ce qui donne $\ell = \ell'$.

Donc si $((a_n), (b_n)) \in \mathcal{S}$ alors (a_n) et (b_n) convergent et ont même limite : $\mathcal{L}(a_0, b_0)$

c') Voir à la fin.

d) $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$.

Soit $((a_n), (b_n)) \in \mathcal{S}$ tel que : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \mathcal{L}(a, b)$

Soit $((c_n), (d_n)) \in \mathcal{S}$ tel que : $c_0 = b$ et $d_0 = a$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \mathcal{L}(b, a)$

$a_1 = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = c_1$ et $b_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = d_1$

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = c_n$ et $b_n = d_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

Par conséquent : $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$.

- Soit $((a_n), (b_n)) \in \mathcal{S}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Supposons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lambda a_n$ et $d_n = \lambda b_n$.

Alors $((c_n), (d_n)) \in \mathcal{S}$, $c_0 = \lambda a$ et $d_0 = \lambda b$

Par conséquent : $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda\, \mathcal{L}(a, b)$

$\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b)$.

Remarque.. $\mathcal{L}(0,b) = 0$ d'après a) ($\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$)

Si $a > 0$: $\mathcal{L}(a,b) = a\,\mathcal{L}(1, \frac{b}{a})$ d'après ce qui précède ; par conséquent pour avoir les $\mathcal{L}(a,b)$ il suffit d'avoir des $\mathcal{L}(1,x)$ ... d'où $F(x)$...

- Soit $((a_n),(b_n)) \in S$ tel que $a_0 = a$ et $b_0 = b$. $\mathcal{L}(a,b) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$; $a_1 = \sqrt{ab}$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$.

A la limite : $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Q2.. a) • Soit $((a_n),(b_n)) \in S$ tel que : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

d'après Q1 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0$;

$F(0) = \mathcal{L}(1,0) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; $F(0) = 0$.

• $1 = \sqrt{1\times 1} \leq \mathcal{L}(1,1) = F(1) \leq \frac{1+1}{2} = 1$; $F(1) = 1$.

Remarque.. Si $((a_n),(b_n)) \in S$ et si $a_0 = b_0 = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n = 1$ alors .... $F(1)=1$!

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{1 \times x} \leq \mathcal{L}(1,x) = F(x) \leq \frac{1+x}{2}$ (d'après (6)) ;

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$; en particulier $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq 0$.

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que : $x \leq y$. Prouvons que : $F(x) \leq F(y)$.

Soit $((a_n),(b_n)) \in S$ tel que : $a_0 = 1$ et $b_0 = x$; $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

Soit $((c_n),(d_n)) \in S$ tel que : $c_0 = 1$ et $d_0 = y$; $F(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n$

Prouvons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n$ et $b_n \leq d_n$. Il en résultera $F(x) \leq F(y)$ par passage à la limite.

- C'est clair pour $n=0$ ($1 \leq 1$ et $x \leq y$).
- Supposons : $a_n \leq c_n$ et $b_n \leq d_n$, et montrons que : $a_{n+1} \leq c_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq d_{n+1}$.

$a_{n+1} \leq \sqrt{a_n b_n} \underset{\substack{0 \leq a_n \leq c_n \\ 0 \leq b_n \leq d_n}}{\leq} \sqrt{c_n d_n} = c_{n+1}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{c_n + d_n}{2} = d_{n+1}$. Ceci achève la récurrence et termine de prouver que : $F(x) \leq F(y)$.

F est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b] Soit $x \in]0,+\infty[$.

- (6), avec $a=1$ et $b=x$, prouve que : $\underline{\underline{\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)}}$. (7)

- $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = x \times \frac{1}{x}\mathcal{L}(1,x) \underset{\uparrow (5)}{=} x\,\mathcal{L}(\frac{1}{x}\times 1, \frac{1}{x}\times x) = x\,\mathcal{L}(\frac{1}{x},1) \underset{\uparrow (4)}{=} x\,\mathcal{L}(1,\frac{1}{x}) = x F(\frac{1}{x})$

donc $\underline{\underline{F(x) = x F(\frac{1}{x})}}$ (8).

- Soit $((a_n),(b_n)) \in \mathcal{L}$ tel que : $a_0 = 1$ et $b_0 = x$. $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_{n+1}$ et $d_n = b_{n+1}$.

$((c_n),(d_n)) \in \mathcal{L}$ et $c_0 = a_1 = \sqrt{x}$ et $d_0 = b_1 = \frac{1+x}{2}$

Donc $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} c_n = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2})$.

$F(x) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}) = \sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}) \overset{(5)}{=} \sqrt{x}\,\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1+x}{2}) = \sqrt{x}\,\mathcal{L}(1, \frac{1+x}{2\sqrt{x}})$

Finalement $\underline{\underline{F(x) = \sqrt{x}\,F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}})}}$ (9)

D'après (8) $F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$, donc $F(x) = \sqrt{x}\,F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\,\frac{1+x}{2\sqrt{x}} F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})$

Par conséquent : $\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}(1+x) F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x})}}$. (10).

Q3.. **a]** Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. $\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$; $\sqrt{x}-1 \leq F(x)-1 \leq \frac{x-1}{2}$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{F(x)-1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

Par encadrement il vient $\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

$\forall x \in]0,1[$, $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \geq \frac{F(x)-1}{x-1} \geq \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

Par encadrement : $\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

Les résultats précédents donnent $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-1}{x-1} = \frac{1}{2}$ ou $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.

$\underline{\underline{F \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } F'(1) = \frac{1}{2}}}$.

b] $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x} \leq F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

c.. Montrons que : $\lim_{x\mapsto 0^+} F(x)=0$ ce qui prouvera la continuité de F en 0.

F est croissante sur $]0,+\infty[$ et minorée par 0, elle admet donc une limite finie à droite en 0.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $F(x)=\frac{1}{2}(1+x)\,F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$; en passant à la limite en 0 on obtient : $\ell=\frac{1}{2}(1+0)\,\ell$ car $\lim_{x\mapsto 0^+}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=0$. Il vient donc $\ell=\frac{1}{2}\ell$ ou : $\ell=0$

Par conséquent : $\lim_{x\mapsto 0^+} F(x)=0=F(0)$!

F est continue en 0.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{F(x)}{x}=F\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\mapsto 0^+}F\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\mapsto +\infty}F(y)=+\infty$

F n'est pas dérivable en 0. (La courbe représentative de F admet cependant en 0 une "demi-tangente verticale")

d.. $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\mapsto +\infty}F(1/x)=\lim_{y\mapsto 0^+}F(y)=0$; $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{F(x)}{x}=0$. La courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(x'x)$.

$\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\mapsto +\infty}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)=+\infty$ car $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=+\infty$; $\lim_{x\mapsto +\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}}=+\infty$

Q 4.. $x\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$. $P_n=\prod_{k=0}^{n}u_k$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{k+1}=\frac{1+u_k}{2\sqrt{u_k}}$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $F(u_{k+1})=F\left(\frac{1+u_k}{2\sqrt{u_k}}\right)=\frac{F(u_k)}{\sqrt{u_k}}$

Donc, $F(u_{n+1})=\frac{1}{\sqrt{u_n}}F(u_n)=\frac{1}{\sqrt{u_n}}\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}}F(u_{n-1})=\cdots$

Une récurrence simple donne alors : $F(u_{n+1})=\frac{F(u_0)}{\sqrt{u_0u_1\cdots u_n}}=\frac{F(x)}{(P_n)^{1/2}}$

$u_{n+1}\geqslant 1$ car $n+1\in\mathbb{N}^*$ donc $F(u_{n+1})\geqslant F(1)=1$

En particulier $F(u_{n+1})\neq 0$

On peut donc écrire $P_n=\left(\frac{F(x)}{F(u_{n+1})}\right)^2$. $\lim_{n\mapsto +\infty}u_{n+1}=1$ et F est continue en 1 (F est dérivable en 1 !)

Donc $\lim_{n\mapsto +\infty}F(u_{n+1})=F(1)=1$. **La suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc vers $(F(x))^2$.**

COMPLEMENT

En fait pour $a>0$ et $b>0$:

$$\mathcal{L}(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)} = \frac{\pi}{4J(a,b)} \quad \text{avec} \quad I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \text{ et } J(a,b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

L'exercice suivant en donne la preuve.

$(a,b)\in \mathbb{R}_+^{*2}$ Q1.. Noter que $I(a,b)$ existe. Montrer que : $I(a,b) = 2J(a,b)$

(partir de $\displaystyle\int_\varepsilon^{\sqrt{ab}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ et poser $u = \frac{ab}{t}$)

Q2.. $a_0=a$, $b_0=b$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ & $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

(on sait que $\mathcal{L}(a,b) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$)

a) Prouver que : $I(a_{n+1},b_{n+1}) = J(a_n,b_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$

(partir de $J(a_n,b_n)$ et poser $u = \dfrac{ab-t^2}{2t}$)

b) Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{2b_n} \leq I(a_n,b_n) \leq \dfrac{\pi}{2a_n}$.

Conclure.

C'..

```
Donnez la valeur de a.a=1
Donnez la valeur de b.b=3
Donnez la valeur de n.n=25
a( 5)=1.8636167832  b( 5)=1.8636167832
a(10)=1.8636167832  b(10)=1.8636167832
a(15)=1.8636167832  b(15)=1.8636167832
a(20)=1.8636167832  b(20)=1.8636167832
a(25)=1.8636167832  b(25)=1.8636167832
```

```
Program Lyon83a;

uses crt;
var a,b,x:real;i,n:integer;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de a.a=');readln(a);
write('Donnez la valeur de b.b=');readln(b);
write('Donnez la valeur de n.n=');readln(n);
for i:=1 to n do
    begin
    x:=sqrt(a*b);b:=(a+b)/2;a:=x;
    if i mod 5 =0 then writeln('a(',i:2,')=',a:12:10,'  b(',i:2,')=',b:12:10);
    end;
end.
```

Quelques valeurs de F(x).

Je prends $F(x) \simeq \frac{a_{50}+b_{50}}{2}$ avec $a_0 = 1$ et $b_0 = x$.

```
Program Lyon83b;
 uses crt;
 var x,t:real;i:integer;

 function aif(ixe:real):real;

 var a,b,c:real;j:integer;

 begin
 a:=1;b:=ixe;
 for j:=1 to 50 do
     begin
     c:=sqrt(a*b);b:=(a+b)/2;a:=c;
     end;
 aif:=(a+b)/2;
 end;

 begin
 for i:=1 to 9 do
     begin
     t:=i/10;
     writeln('F(',t:3:1,') vaut sensiblement : ',aif(t):12:10);
     end;
 for i:=1 to 15 do

 writeln('F(',i:2,') vaut sensiblement : ',aif(i):12:10);
 end.
```

```
F(0.1) vaut sensiblement : 0.4250407095
F(0.2) vaut sensiblement : 0.5208016381
F(0.3) vaut sensiblement : 0.5977670553
F(0.4) vaut sensiblement : 0.6657994286
F(0.5) vaut sensiblement : 0.7283955155
F(0.6) vaut sensiblement : 0.7872471007
F(0.7) vaut sensiblement : 0.8433168246
F(0.8) vaut sensiblement : 0.8972114321
F(0.9) vaut sensiblement : 0.9493415349
```

```
F( 1) vaut sensiblement : 1.0000000000
F( 2) vaut sensiblement : 1.4567910310
F( 3) vaut sensiblement : 1.8636167832
F( 4) vaut sensiblement : 2.2430285802
F( 5) vaut sensiblement : 2.6040081904
F( 6) vaut sensiblement : 2.9513287424
F( 7) vaut sensiblement : 3.2879219817
F( 8) vaut sensiblement : 3.6157561775
F( 9) vaut sensiblement : 3.9362355036
F(10) vaut sensiblement : 4.2504070947
F(11) vaut sensiblement : 4.5590787169
F(12) vaut sensiblement : 4.8628903764
F(13) vaut sensiblement : 5.1623602815
F(14) vaut sensiblement : 5.4579156257
F(15) vaut sensiblement : 5.7499139394
```

Vous pouvez "vérifier" en faisant calculer à votre machine :

$$\pi/4 \Big/ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$$

ma TI 82 donne :

$F(0,01) \simeq 0,262\ 166\ 8878$

$F(0,001) \simeq 0,189\ 388\ 302\ 4$

$F(50) \simeq 14,822\ 336\ 68$

$F(100) \simeq 26,216\ 688\ 78$

...