PREMIER PROBLEME . **Partie I** (1)

(Q1) Notons $\mathcal{S}_s$ l'ensemble des solutions du système. Soit $(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5$.

$(x,y,z,t,u)\in\mathcal{S}_s$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} t = su \\ z = st - u = (s^2-1)u \\ y = sz - t = s(s^2-1)u - su = (s^3-2s)u \\ x = sy - z = s(s^3-2s)u - (s^2-1)u = (s^4-3s^2+1)u \\ 0 = sx - y = s(s^4-3s^2+1)u - (s^3-2s)u = (s^5-4s^3+3s)u = s(s^4-4s^2+3)u = s(s^2-1)(s^2-3)u \end{cases}$$

1er cas.. $s\notin\{-\sqrt3,-1,0,1,\sqrt3\}$. Alors $s(s^2-1)(s^2-3)\neq 0$.

Par conséquent $(x,y,z,t,u)\in\mathcal{S}_s \iff x=y=z=t=u=0$. $\mathcal{S}_s=\{(0,0,0,0,0)\}=\{0_{\mathbb{R}^5}\}$

2ème cas.. $s\in\{-\sqrt3,-1,0,1,\sqrt3\}$. Alors $s(s^2-1)(s^2-3)=0$.

donc $(x,y,z,t,u)\in\mathcal{S}_s \iff \begin{cases} x=(s^4-3s^2+1)u \\ y=(s^3-2s)u \\ z=(s^2-1)u \\ t=su\end{cases}$. $\mathcal{S}_s=\mathrm{Vect}\big((s^4-3s^2+1,\ s^3-2s,\ s^2-1,\ s,\ 1)\big)$

dans le détail : $\mathcal{S}_0=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0,1))$. $\mathcal{S}_{\sqrt3}=\mathrm{Vect}((1,\sqrt3,2,\sqrt3,1))$.
$\mathcal{S}_1=\mathrm{Vect}((-1,-1,0,1,1))$. $\mathcal{S}_{-\sqrt3}=\mathrm{Vect}((1,-\sqrt3,2,-\sqrt3,1))$.
$\mathcal{S}_{-1}=\mathrm{Vect}((-1,1,0,-1,1))$.

(Q2) Le système admet une solution autre que $0_{\mathbb{R}^5}$ si et seulement si $s\in\{-\sqrt3,-1,0,1,\sqrt3\}$

Partie II

Commençons par dire que Q1 est catastrophique !

1°.. On ne sait pas ce qu'est $(x_1,x_2,\dots,x_n)$

2°.. s étant fixé (c'est écrit dans la 1ère ligne de la partie II) on peut choisir $A_1,A_2,\dots,A_{n-1}$ de bien des manières. Si (II) n'a qu'une solution : $0_{\mathbb{R}^n}$ on peut prendre $A_1=\dots=A_{n-1}=0_{\mathbb{R}[X]}$!

3°.. $A_{p+2}(s)=sA_{p+1}(s)-A_p(s)$ pour tout $p\in\{1,\dots,n-3\}$ ne résulte pas de $x_{n-p}=A_p(s)x_n$ pour tout $p\in\{1,\dots,n-1\}$

Essayons de concilier l'inconciliable.

(Q1) Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que pour tout $p\in[\![1,n-1]\!]$, il existe un élément A_p de $\mathbb{R}[X]$ tel que,
pour tout réel s et toute solution $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de (II) on ait : $x_{n-p}=A_p(s)x_n$.

Remarque.. Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (II) si et seulement si : $\begin{cases} \cdot\ x_{n-1} = s x_n \\ \cdot\ x_{n-2} = s x_{n-1} - x_n \\ \cdot\ \forall p \in [\![1, n-3]\!],\ x_{n-(p+2)} = s x_{n-(p+1)} - x_{n-p} \\ \cdot\ -s x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

Nous pouvons commencer la récurrence

- La propriété est vraie pour $p=1$ (prendre $A_1 = X$) et pour $p=2$ (prendre $A_2 = X^2-1$)
  En effet si $s \in \mathbb{R}$ et si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (II) : $x_{n-1} = s x_n$ et $x_{n-2} = s x_{n-1} - x_n = (s^2-1) x_n$.
- Supposons la propriété vraie pour p et $p+1$, p étant un élément de $[\![1, n-3]\!]$; montrons la pour $p+2$.
  Soient $s \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une solution de (II). Nous savons qu'il existe A_p et A_{p+1} dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $x_{n-p} = A_p(s) x_n$ et $x_{n-(p+1)} = A_{p+1}(s) x_n$.
  Nous savons encore que : $x_{n-(p+2)} = s x_{n-(p+1)} - x_{n-p}$; par conséquent :
  $x_{n-(p+2)} = (s A_{p+1}(s) - A_p(s)) x_n$.
  Posons $A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$. A_{p+2} est un élément de $\mathbb{R}[X]$ et $x_{n-(p+2)} = A_{p+2}(s) x_n$
  (ceci pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solution de (II)).

Ceci achève donc la récurrence qui nous a montré l'existence d'une suite $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant, en fait, deux propriétés :

(P1) Pour tout réel s et toute solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (II) : $\forall p \in [\![1, n-1]\!]$, $x_{n-p} = A_p(s) x_n$

(P2) $\forall p \in [\![1, n-3]\!]$, $A_{p+2}(s) = s A_{p+1}(s) - A_p(s)$ pour tout réel s (... $A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$)

Q2 Soit la suite : $A_1 = X$, $A_2 = X^2-1$ et $\forall p \in [\![1, \underline{\underline{n-2}}]\!]$, $A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$
(les initiés auront reconnu les polynômes de "Tcheby"!)
Soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solution de (II)

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_{n-1} = s x_n \\ x_{n-2} = s x_{n-1} - x_n = (s^2-1) x_n \\ \forall p \in [\![1, n-3]\!],\ x_{n-(p+2)} = s x_{n-(p+1)} - x_{n-p} \\ -s x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad (a)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1, n-1]\!],\ x_{n-p} = A_p(s) x_n \\ -s x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

Montrons maintenant que (b) donne (a). Supposons (b). Nous avons déjà $-s x_1 + x_2 = 0$!
$x_{n-1} = A_1(s) x_n = s x_n$. $x_{n-2} = A_2(s) x_n = (s^2-1) x_n$. Reste à montrer la 3ième ligne de (a).
$\forall p \in [\![1, n-3]\!]$, $x_{n-(p+2)} = A_{p+2}(s) x_n = s A_{p+1}(s) x_n - A_p(s) x_n = s x_{n-(p+1)} - x_{n-p}$. Ceci achève de prouver (a)

Finalement $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (II)

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1, n-1]\!],\ x_{n-p} = A_p(s)\, x_n \\ 0 = -s x_1 + x_2 = \left(-s A_{n-1}(s) + A_{n-2}(s)\right) x_n = -A_n(s)\, x_n \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1, n-1]\!],\ x_{n-p} = A_p(s)\, x_n \\ \text{et} \\ A_n(s)\, x_n = 0. \end{cases}$$

1er cas.. $\underline{\underline{A_n(s) \neq 0}}$. $\underline{\underline{\text{(II) admet une solution et une seule : } 0_{\mathbb{R}^n}}}$.

2e cas.. $\underline{\underline{A_n(s) = 0}}$. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solution de (II)

$\Updownarrow$

$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ x_{n-p} = A_p(s)\, x_n$

$\Updownarrow$

$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ x_p = A_{n-p}(s)\, x_n$

L'ensemble des solutions est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par : $(A_{n-1}(s), A_{n-2}(s), \dots, A_1(s), 1)$.

Q3 $A_1 = X$, $A_2 = X^2 - 1$ et $\forall p \in [\![1, n-2]\!]$, $A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$.

En particulier $A_3 = X^3 - 2X$, $A_4 = X^4 - 3X^2 + 1$, $A_5 = X^5 - 4X^3 + 3X$

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:
1°.. $\deg A_p = p$
2°.. le coeff. de X^p dans A_p est 1
3°.. $A_p(-X) = (-1)^p A_p(X)$

- C'est vrai pour $p = 1$ et 2 $(A_1 = X$ et $A_2 = X^2 - 1)$
- Supposons 1°, 2° et 3° vraies pour p et $p+1$, p étant élément de $[\![1, n-2]\!]$. Montrons que le tout reste vrai pour $p+2$.

$A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$. $\deg X A_{p+1} = p+2$ et $\deg A_p = p$ donc $\deg A_{p+2} = p+2$.

Le coeff. de X^{p+2} dans A_{p+2} est celui de X^{p+2} dans $X A_{p+1}$; c'est donc 1 car le coefficient de X^{p+1} dans A_{p+1} est 1.

$$A_{p+2}(-X) = (-X) A_{p+1}(-X) - A_p(-X) = -(-1)^{p+1} X A_{p+1}(X) - (-1)^p A_p(X) \underset{(-1)^{p+2} = (-1)^p\,!}{=} (-1)^p X A_{p+1}(X) - (-1)^{p+2} A_p(X)$$

$A_{p+2}(-X) = (-1)^{p+2} A_{p+2}(X)$. Ceci achève la récurrence.

1°, 2° et 3° sont vraies en particulier pour n. Par conséquent

$\underline{\underline{\deg A_n = n}}$. $\underline{\underline{\text{Le coefficient de } X^n \text{ dans } A_n \text{ est } 1}}$. $\underline{\underline{A_n \text{ a même parité que } n}}$ $(A_n(-X) = (-1)^n A_n(X))$

$\forall p \in [\![1, n-2]\!]$, $A_{p+2}(0) = 0\, A_{p+1}(0) - A_p(0) = -A_p(0)$

$(A_{2p}(0))_{1 \leq 2p \leq n}$ et $(A_{2p+1}(0))_{0 \leq 2p+1 \leq n}$ sont des suites géométriques de raison -1

$A_1(0) = 0$ et $A_2(0) = -1$. Par conséquent si $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq 2p+1 \leq n$: $A_{2p+1}(0) = 0$ et si $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq 2p \leq n$: $A_{2p}(0) = (-1)^p$

$\underline{\underline{\text{Si } n \text{ est pair : } A_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ et si } n \text{ est impair : } A_n(0) = 0}}$

ce qui en lyonnais se dit :

- si n est pair le terme de degré 0 de A_n est $(-1)^{n/2}$
- si n est impair le terme de degré 0 de A_n est 0 (???! si il est nul il n'est plus de degré 0 !)

Pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ notons α_p le coefficient de X^{p-2} dans $A_p(X)$.

$\forall p \in [\![1, n-2]\!]$, $A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$; donc $\forall p \in [\![2, n-2]\!]$, $\alpha_{p+2} = \alpha_{p+1} - 1$

(le coefficient de X^p dans A_{p+2} s'obtient en retranchant le coefficient de X^p dans A_p au coefficient de X^{p-1} dans X^{p+1})

$$\alpha_n - \alpha_3 = \sum_{p=2}^{n-2} (\alpha_{p+2} - \alpha_{p+1}) = \sum_{p=2}^{n-2} (-1) = [(n-2)-1](-1) = -(n-3)$$

$$\alpha_n = -(n-3) + \underset{A_3 = X^3 - 2X}{\alpha_3} = -(n-3) - 2 = -(n-1) .$$

<u>Finalement le coefficient de X^{n-2} dans A_n est : $-(n-1)$.</u>

DEUXIEME PROBLEME — PARTIE I

Q1, Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour éviter les répétitions nous allons commencer par b) ... encore que ...

Notons que : $\forall x \in [0, n]$, $P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$ et que $\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n(x) = 0$

En effet $P_n(n) = (1 - \frac{n}{n})^n = 0$.

Rappel.. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point

f est continue sur I si la restriction de f à I est continue en tout point de I

f est continue sur I si
- f est continue en tout point de $\mathring{I}$
- f est continue à gauche en le plus grand élément de I si il existe
- f est continue à droite en le plus petit élément de I si il existe

Même chose pour la dérivabilité.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, P_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in [0, n]$, $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} (1 - \frac{x}{n})^{n-k}$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n^{(k)}(x) = 0$

- P_n est continue sur $[0, n]$ ($\forall x \in [0,n]$, $P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$) et sur $[n, +\infty[$ ($\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n(x) = 0$) donc P_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (voir rappel) ; P_n est donc de classe C^0 sur $\mathbb{R}^+$

De plus $\forall x \in [0, n]$, $P_n^{(0)}(x) = P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = (-1)^0 \frac{n!}{(n-0)!} \frac{1}{n^0} (1 - \frac{x}{n})^{n-0}$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n^{(0)}(x) = 0$

La propriété est donc vraie pour $k = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que :

P_n est de classe $C^k_{\text{sur } \mathbb{R}^+}$, $\forall x \in [0,n]$, $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}\,\dfrac{1}{n^k}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-k}$ et $\forall x \in [n,+\infty[$, $P_n^{(k)}(x)=0$.

$x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-k}$ et $x\mapsto 0$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc $P_n^{(k)}$ est dérivable sur $[0,n]$ et $[n,+\infty[$.

$P_n^{(k)}$ est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+ - \{n\}$, dérivable à droite et à gauche en n.

La dérivée de $x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-k}$ est $x\mapsto -\dfrac{n-k}{n}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$ et celle de $x\mapsto 0$ est $x\mapsto 0$!

Par conséquent : 1°.. $\forall x \in [0,n[$, $\left(P_n^{(k)}\right)'(x) = (-1)^k\dfrac{n!}{(n-k)!}\,\dfrac{1}{n^k}\left(-\dfrac{n-k}{n}\right)\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-(k+1)} = (-1)^{k+1}\dfrac{n!}{(n-(k+1))!}\,\dfrac{1}{n^{k+1}} \times \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$

2°.. $\forall x \in [n,+\infty[$, $\left(P_n^{(k)}\right)'(x) = 0$

3°.. $\left(P_n^{(k)}\right)'_g(n) = (-1)^k\dfrac{n!}{(n-k)!}\,\dfrac{1}{n^k}\left(-\dfrac{n-k}{n}\right)\left(1-\dfrac{n}{n}\right)^{n-(k+1)} \underset{\uparrow}{=} 0$

$n-(k+1)>0$ car $k\leq n-2$

4°.. $\left(P_n^{(k)}\right)'_d(n) = 0$

$\left(P_n^{(k)}\right)'_g(n) = \left(P_n^{(k)}\right)'_d(n) = 0$; $P_n^{(k)}$ est donc en plus dérivable au point n et $\left(P_n^{(k)}\right)'(n)=0$

Par conséquent $P_n^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, P_n est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$

De plus $\forall x \in [0,n]$, $P_n^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{n!}{(n-(k+1))!} \times \dfrac{1}{n^{k+1}} \times \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$ et

$\forall x \in [n,+\infty[$, $P_n^{(k+1)}(x) = 0$. (En effet $P_n^{(k+1)} = \left(P_n^{(k)}\right)'$).

$P_n^{(k+1)}$ est continue sur $[0,n]$ (restriction d'une fonction polynome) et sur $[n,+\infty[$ (idem !), donc $P_n^{(k+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par conséquent P_n est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}_+$. Ceci achève la récurrence.

Conclusion.. P_n est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in [0,n]$, $P_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n^{n-1}}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)$
et $\forall x \in [n,+\infty[$, $P_n^{(n-1)}(x) = 0$.

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la récurrence précédente montre que

1°.. P_n est n fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+ - \{n\}$;

2°.. $P_n^{(n-1)}$ est dérivable à droite et à gauche en n ;

3°.. $\forall x \in [0,n[$, $P_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$ et $\forall x \in]n,+\infty[$, $P_n^{(n)}(x) = 0$;

4°.. $\left(P_n^{(n-1)}\right)'_g(n) = \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$ et $\left(P_n^{(n-1)}\right)'_d(n) = 0$.

$P_n^{(n-1)}$ n'est donc pas dérivable en n, P_n n'est donc pas n fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et encore moins de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque.. On pouvait aussi dans cette question gérer "le problème $x=n$" en utilisant le théorème concernant le prolongement de la dérivée.

Remarque.. Une récurrence simple et limpide montre que φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k}{n^k}\,\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-k}$$

Revenons à a)

a) • $\forall x\in[0,1]$, $P_1(x)=1-x$ et $\forall x\in[1,+\infty[$, $P_1(x)=0$.

P_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+-\{1\}$ dérivable à droite et à gauche en 1

$\forall x\in[0,1[$, $P_1'(x)=-1$, $\forall x\in]1,+\infty[$, $P_1'(x)=0$. $P_g'(1)=-1$ et $P_d'(1)=0$.

• $\forall x\in[0,2]$, $P_2(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)^2$ et $\forall x\in[2,+\infty[$, $P_2(x)=0$.

P_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x\in[0,2]$, $P_2'(x)=-\left(1-\frac{x}{2}\right)$ et $\forall x\in[2,+\infty[$, $P_2'(x)=0$

• $\forall x\in[0,3]$, $P_3(x)=\left(1-\frac{x}{3}\right)^3$ et $\forall x\in[3,+\infty[$, $P_3(x)=0$.

P_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x\in[0,3]$, $P_3'(x)=-\left(1-\frac{x}{3}\right)^2$ et $\forall x\in[3,+\infty[$, $P_3'(x)=0$

x	0		1		$+\infty$
$P_1'(x)$		$-$	||	0	
$P_1(x)$	1	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

x	0		2		$+\infty$
$P_2'(x)$		$-$		0	
$P_2(x)$	1	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

x	0		3		
$P_3'(x)$		$-$		0	
$P_3(x)$	1	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

o $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_1(x)=\frac{1}{1+x}$. φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_1'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$

o $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_2(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2}$. φ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_2'(x)=-\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3}<0$

o $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_3(x)=\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-3}$. φ_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_3'(x)=-\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-4}<0$

Q2 "On pourra ..." mais 1°.. on peut ne pas vouloir ;
2°.. on peut ne pas pouvoir !

Alors ...

ceci est du programme !

ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée seconde est négative) donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes ; par conséquent : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x\leq x-1$ (la courbe représentative de ln est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1)

Ceci donne encore : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln\frac{1}{x}\leq\frac{1}{x}-1$ c'est à dire $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$.

Pour finir : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x-1+\frac{1}{x}\geq 0$.

Donc : $\forall t\in]0,1[$, $0\leq\ln(1-t)-1+\frac{1}{1-t}=\ln(1-t)+\frac{t}{1-t}=\varphi_1(t)$

et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0\leq\ln(1+t)-1+\frac{1}{1+t}=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=\varphi_2(t)$;

Conclusion.. $\forall t\in]0,1[$, $\varphi_1(t)\geq 0$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\varphi_2(t)\geq 0$ ... Il n'y avait donc pas d'étude de fonction à faire.

ψ_1 est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall t\in]0,1[$, $\psi_1'(t) = -\frac{1}{t^2}\ln(1-t) + \frac{1}{t}\,\frac{-1}{1-t} = -\frac{1}{t^2}\,\varphi_1(t) \leq 0$

ψ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\psi_2'(t) = \frac{1}{t^2}\ln(1+t) - \frac{1}{t}\times\frac{1}{1+t} = \frac{1}{t^2}\,\varphi_2(t) \geq 0$

Conclusion... ψ_1 est décroissante sur $]0,1[$. ψ_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q3 Fixons x dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

→ Montrons que : $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$.

1er cas... $x\in[n+1,+\infty[$. $P_n(x) = 0 \leq 0 = P_{n+1}(x)$

2e cas... $x\in[n,n+1[$. $P_n(x)=0$ et $P_{n+1}(x) = \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq 0$; $P_n(x)\leq P_{n+1}(x)$.

3e cas... $x\in[0,n[$.

$P_n(x)\leq P_{n+1}(x) \iff n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right)$. Si $x=0$: $P_n(x) = 1 = P_{n+1}(x)$... Supposons $x>0$.

$P_n(x)\leq P_{n+1}(x) \iff \frac{n}{x}\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq \frac{n+1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) \iff \frac{1}{\frac{x}{n}}\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{\frac{x}{n+1}}\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right)$

$P_n(x)\leq P_{n+1}(x) \underset{\frac{x}{n}\in]0,1[\text{ et } \frac{x}{n+1}\in]0,1[}{\iff} \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) \leq \psi_1\left(\frac{x}{n+1}\right)$.

cette dernière inégalité est vraie car : $\frac{x}{n}\in]0,1[$, $\frac{x}{n+1}\in]0,1[$, $\frac{x}{n+1}\leq\frac{x}{n}$ et ψ_1 est décroissante sur $]0,1[$.

→ Montrons que : $P_{n+1}(x)\leq e^{-x}$

1er cas... $x\in[n+1,+\infty[$. $P_{n+1}(x) = 0 \leq e^{-x}$

2e cas... $x\in[0,n+1[$. $P_{n+1}(x)\leq e^{-x} \iff (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right)\leq -x \iff \ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) \leq -\frac{x}{n+1}$

$P_{n+1}(x)\leq e^{-x} \iff \ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) \leq \left(1-\frac{x}{n+1}\right) - 1$

cette dernière inégalité est vraie... voir le début de Q2.

→ Montrons que : $e^{-x}\leq Q_{n+1}(x)$.

$e^{-x}\leq Q_{n+1}(x) \iff -x \leq -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \iff \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) - 1$ ... OK !

→ Montrons que : $Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x)$.

$Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x) \iff -(n+1)\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \leq -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \iff -\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$

$Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x)$ est évident si $x=0$, supposons $x>0$.

$Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x) \iff -\frac{1}{\frac{x}{n+1}}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{\frac{x}{n}}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \iff \psi_2\left(\frac{x}{n+1}\right)\leq\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)$.

$\frac{x}{n}\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{n+1}\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{n}\geq\frac{x}{n+1}$ et ψ_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent

$\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)\geq\psi_2\left(\frac{x}{n+1}\right)$ et : $Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x)$.

Ceci achève Q3. $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\quad P_n(x)\leq P_{n+1}(x)\leq e^{-x}\leq Q_{n+1}(x)\leq Q_n(x).}}$

Q4 a) Fixons x dans $\mathbb{R}^+$. Q3 montre que $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par e^{-x}, elle converge. Q3 montre encore que $(Q_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par e^{-x}; elle converge.

Facultatif $\rightarrow$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\geq x$. $P_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n=e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}$. $n\ln(1-\frac{x}{n})\sim n(-\frac{x}{n})=-x$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln(1-\frac{x}{n}))=-x$; $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x)=e^{-x}$. $(P_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers e^{-x}.

Remarque.. Cela suffisait pour obtenir la convergence et la ~~limite de la suite~~ $(P_n(x))_{n\geq 1}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $Q_n(x)=e^{-n\ln(1+\frac{x}{n})}$. $-n\ln(1+\frac{x}{n})\sim -n(\frac{x}{n})=-x$. $\lim\limits_{n\to+\infty}Q_n(x)=e^{-x}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. P_n et Q_n sont localement intégrables sur $\mathbb{R}+$ (car elles sont continues sur $\mathbb{R}+$)

$\forall A\in[n,+\infty[$, $\int_0^A P_n(x)\,dx=\int_0^n P_n(x)\,dx$. Par conséquent : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A P_n(x)\,dx=\int_0^n P_n(x)\,dx$

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty}P_n(x)\,dx$ existe et vaut $I_n=\int_0^n P_n(x)\,dx$.

$I_n=\int_0^n P_n(x)\,dx=\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\,dx=\left[\frac{-n}{n+1}(1-\frac{x}{n})^{n+1}\right]_0^n=\frac{n}{n+1}$. $I_n=\int_0^{+\infty}P_n(x)\,dx=\frac{n}{n+1}$.

Notons que : $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=1$.

Notons encore que : $1=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$. Nous avons donc $\underline{\underline{\text{ici}}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}P_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x)\,dx$.

Ne surtout pas faire de cela une généralité !

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\underline{\underline{0\leq Q_n(x)}}$ et $Q_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{n}\right)^{-n}=n^n\,\frac{1}{x^n}$.

$\int_0^{+\infty}Q_n(x)\,dx$ est de même nature que $\int_{\underline{\underline{1}}}^{+\infty}Q_n(x)\,dx$ qui est de même nature que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}\,dx$

Par conséquent : $\int_0^{+\infty}Q_n(x)\,dx$ existe si et seulement si $n>1$ $(n\geq 2)$.

Supposons $n\geq 2$. $J_n=\int_0^{+\infty}Q_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}\,dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{n}{-n+1}(1+\frac{x}{n})^{-n+1}\right]_0^A$

$J_n=-\frac{n}{-n+1}$ $\left(\lim\limits_{A\to+\infty}(1+\frac{A}{n})^{-n+1}=0\right)$. $J_n=\frac{n}{n-1}$. $J_n=\int_0^{+\infty}Q_n(x)\,dx=\frac{n}{n-1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=1$ (même remarque que pour I_n).

PARTIE II

Q1 g est dérivable sur $[0,4[$ et $\forall x\in[0,4[$, $g'(x)=1+3\,\frac{-1/4}{1-x/4}=1+\frac{3}{x-4}=\frac{x-1}{x-4}$.
g est strictement décroissante sur $[1,4[$ et strictement croissante sur $[0,1]$.

Q2 g est continue et strictement ~~décroissante~~ sur $[1,4[$. g définit une bijection de $[1,4[$ sur $g([1,4[)=]\lim\limits_{x\to 4}g(x),g(1)]=]-\infty,1+3\ln\frac{3}{4}]$. $1+3\ln\frac{3}{4}\simeq 0{,}136953783$

$0\in]-\infty,1+3\ln\frac{3}{4}]$ donc $\exists!\,\alpha\in[1,4[$, $g(\alpha)=0$.

Remarque.. $\forall x\in\,]0,\alpha[,\ g(x)>0\ ;\ \forall x\in\,]\alpha,4[,\ g(x)<0\ ;\ g(0)=g(\alpha)=0.$

f est dérivable sur $[0,4]$. $\forall x\in[0,4],\ f'(x)=-e^{-x}+\left(1-\frac{x}{4}\right)^3$

$\forall x\in[0,4[\quad f'(x)=-e^{-x}+e^{3\ln(1-\frac{x}{4})}=e^{-x}\left(e^{x+3\ln(1-\frac{x}{4})}-1\right)=e^{-x}\left(e^{g(x)}-1\right)$

Donc $\forall x\in[0,4[,\quad f'(x)>0 \iff g(x)>0$;
et $\forall x\in[0,4[\quad f'(x)=0 \iff g(x)=0$

Finalement $f'(0)=f'(\alpha)=0$; $\forall x\in\,]0,\alpha[,\ f'(x)>0$; $\forall x\in\,]\alpha,4[,\ f'(x)<0$; $f'(4)=-e^{-4}<0$

Donc $f'(0)=f'(\alpha)=0$; $\forall x\in\,]0,\alpha[,\ f'(x)>0$; $\forall x\in\,]\alpha,4],\ f'(x)<0$.

f est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,4]$.

Q4 a.. $g(1,8)\simeq 0,0065$; $g(1,8)>0$. $g(1,9)\simeq -0,0311$; $g(1,9)<0$.

La remarque du début de page donne : $1,8<\alpha<1,9$.

b.. f' est continue sur $[1,8\,;1,9]$. Posons $M=\max_{x\in[1,8;1,9]}|f'(x)|$.

Les accroissements finis donnent : $\forall x\in[1,8\,;1,9],\ |f(x)-f(\alpha)|\leqslant M|x-\alpha|\leqslant(0,1)M$

$\forall x\in[1,8\,;1,9],\ f'(x)=-e^{-x}+\left(1-\frac{x}{4}\right)^3$. f' est dérivable sur $[1,8\,;1,9]$ et

$\forall x\in[1,8\,;1,9],\ f''(x)=e^{-x}+3\left(-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)^2=e^{-x}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{4}\right)^2$

$\forall x\in[1,8\,;1,9],\quad f''(x)\leqslant e^{-1,8}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1,9}{4}\right)^2<0\qquad\left(e^{-1,8}-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1,9}{4}\right)^2\simeq-0,04142\right)$

$x\mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[1,8\,;1,9]$ et $x\mapsto-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{4}\right)^2$ croissante

Donc f' est décroissante sur $[1,8\,;1,9]$.

$M=\max_{x\in[1,8;1,9]}|f'(x)|=\max\left(|f'(1,8)|,|f'(1,9)|\right)=|f'(1,9)|\leqslant 0,005$

$|f'(1,8)|\simeq 0,0010$ et $|f'(1,9)|\simeq 0,0049$

Donc $\forall x\in[1,8\,;1,9],\ |f(x)-f(\alpha)|\leqslant 0,1|f'(1,9)|\leqslant 0,0005$. Par conséquent :

x	0	α	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow e^{-4}$

$f(1,8)$ (resp. $f(1,9)$) sont des valeurs approchées par défaut de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
↑ voir tableau

$f(1,8)\simeq 0,073792638$ et $f(1,9)\simeq 0,073599479$

Donc $f(\alpha)\simeq 0,074$ (... valeur approchée à 10^{-2} !)

Remarques 1.. Par dichotomie la machine donne $\alpha\simeq 1,81757934$; on obtient alors
$f(\alpha)\simeq 0,073802078$

$f(1,8)\simeq 0,073792638$

2.. $\forall x\in[1,8\,;1,9],\ f(\alpha)\leqslant f(x)+0,0005$. $f(\alpha)\leqslant f(1,8)+0,0005\leqslant 0,074+0,0005$

$f(\alpha)\leqslant 0,0745\leqslant 0,08$.

Q1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} e^{-x^4}dx$ ($x \mapsto e^{-x^4}$ est loc. intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue sur $\mathbb{R}^+$...)

$\forall x \in [1,+\infty[,\ x \leq x^4$; $\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leq e^{-x^4} \leq e^{-x}$.

$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge (... ai connu... intégral...) donc $\int_1^{+\infty} e^{-x^4}dx$ aussi. Finalement

$\int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx$ existe.

$\int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx$ et $\int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx$ étant convergentes rien ne s'oppose à l'écriture suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx = \int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx + \int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx.$$

Q2 a.

x	0		α		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	A'	$\searrow$	e^{-4}

$A' = f(\alpha)$. Donc $\forall x \in [0,4],\ 0 \leq f(x) \leq f(\alpha)$

$\forall x \in [0,4],\ 0 \leq e^{-x} - P_4(x) \leq f(\alpha) \leq 0{,}08$ (voir remarque 2)

Remarquer que $\forall x \in [0,\sqrt2],\ x^4 \in [0,4]$; par conséquent : $\forall x \in [0,\sqrt2],\ 0 \leq e^{-x^4} - P_4(x^4) \leq 0{,}08$.

b. $$\int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx = \int_0^{\sqrt2}\left(1-\frac{x^4}{4}\right)^4 dx \underset{\substack{u=\frac{x}{\sqrt2}\,;\ du=\frac{dx}{\sqrt2}}}{=} \int_0^1 \sqrt2(1-u^4)^4du = \sqrt2\int_0^1[1-4u^4+6u^8-4u^{12}+u^{16}]du$$

$$\int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx = \sqrt2\left[1-\frac45+\frac69-\frac4{13}+\frac1{17}\right] = \sqrt2\left[1-\frac45+\frac23-\frac4{13}+\frac1{17}\right] = \frac{\sqrt2\times2^{11}}{3315}\ !$$

$\int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx \simeq 0{,}87$ ($\simeq 0{,}873\ 698\ 153$)

c. $0 \leq \int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx - \int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx \leq 0{,}08\times\sqrt2$; $\int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx \leq \int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx \leq \int_0^{\sqrt2} P_4(x^4)dx + 0{,}08\sqrt2$

$\int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx \in \left[\frac{\sqrt2\times2^{11}}{3315}, \frac{\sqrt2\times2^{11}}{3315}+0{,}08\sqrt2\right] \subset [0{,}87\,;1]$ donc : $0{,}87 \leq \int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx \leq 1$.

Q3 a) Soit $A \in [\sqrt2,+\infty[$. $$\int_{\sqrt2}^{A} e^{-x^4}dx \underset{\substack{y=x^4\\ x=y^{1/4};\ dx=\frac14 y^{-3/4}dy}}{=} \int_4^{A^4} e^{-y}\frac14 y^{-3/4}dy \leq \frac14(4)^{-3/4}\int_4^{A^4}e^{-y}dy$$

$y \mapsto y^{-3/4}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

comme $\int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx$ et $\int_4^{+\infty} e^{-y}dy$ convergent : $\int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx \leq \frac{1}{4^{7/4}}\int_4^{+\infty}e^{-y}dy$

b) $0 \leq \int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx \leq \frac{1}{4^{7/4}}\int_4^{+\infty}e^{-y}dy = \frac{e^{-4}}{4^{7/4}} < 10^{-2}$ ($e^{-4}/4^{7/4} \simeq 0{,}00161889$)

donc 0 est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx$!!

Q4 $0{,}87 + 0 \leq I = \int_0^{\sqrt2} e^{-x^4}dx + \int_{\sqrt2}^{+\infty} e^{-x^4}dx \leq 1 + 10^{-2}$

donc $0{,}87 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \leq 1{,}01$. Remarquable, non ?!

Notons encore que :

$\frac{\sqrt2\times2^{11}}{3315} \leq I \leq \frac{\sqrt2\times2^{11}}{3315} + \sqrt2\times0{,}08 + \frac{e^{-4}}{4^{7/4}}$

$0{,}8736 \leq I \leq 0{,}9885$!!