ESCL 88

PB 1

On note n un entier naturel, $n \geqslant 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. IV.14

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.

   b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.

   a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.

   b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.

   c) Montrer que f est diagonalisable.

Q1. a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $f(f(e_k)) = f(2^{k-1} e_{n-k+1}) = 2^{k-1} f(e_{n-k+1}) = 2^{k-1}\, 2^{n-k+1-1}\, e_{n-(n-k+1)+1}$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(f(e_k)) = 2^{n-1} e_k$

$2^{n-1} I$ et $f \circ f$ coïncident sur la base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$; par conséquent : $f \circ f = 2^{n-1} I$

b) $f \circ (\frac{1}{2^{n-1}} f) = I = (\frac{1}{2^{n-1}} f) \circ f$; f est donc bijective et $f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$

Q2.. $f(e_1) = e_n$, $f(e_2) = 2 e_{n-1}$, $f(e_3) = 2^2 e_{n-2}$, ..., $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-(k-1)}$, ..., $f(e_n) = 2^{n-1} e_1$

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} & O & & 2^{n-1} \\ & & \cdots & \\ 1 & 2 & 2^2 & O \end{bmatrix}$$

Q3 – Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Soit $u \in F_\lambda$ et $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. $f(u) = \lambda u$; $f^2(u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$, $2^{5-1} u = \lambda^2 u$;

$\lambda^2 = 2^4 = 16$; $\lambda = 4$ ou -4. $\mathrm{Spec}(f) \subset \{-4, 4\}$.

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + ue_5 \in E$

$$u \in F_4 \Leftrightarrow f(u) = 4u \Leftrightarrow \begin{cases} 16u = 4x \\ 8t = 4y \\ 4z = 4z \\ 2y = 4t \\ x = 4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4u \\ y = 2t \end{cases}$$

⚠ Voir dans le chap... T10 annuler une première erreur de calcul ($2y - 4t \Rightarrow y - 4t = 0$)

$F_4 = \{u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + ue_5 \in E \mid x = 4u$ et $y = 2t\}$

$F_4 = \{u = 4ue_1 + 2te_2 + ze_3 + te_4 + ue_5 \in E \mid (z, t, u) \in \mathbb{R}^3\} = \{u = u(4e_1 + e_5) + t(2e_2 + e_4) + z e_3 \in E \mid (z, t, u) \in \mathbb{R}^3$

Finalement $F_4 = \mathrm{Vect}(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$; en particulier $4 \in \mathrm{Spec}(f)$.

$$u \in F_{-4} \iff \begin{cases} 16u = -4x \\ 8t = -4y \\ 4z = -4z \\ 2y = -4t \\ x = -4u \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4u \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

$F_{-4} = \{-4u e_1 - 2t e_2 + t e_4 + u e_5 \in E \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(-4e_1 + e_5, -2e_2 + e_4)$; donc $-4 \in \mathrm{Spec}(f)$.

Finalement : $\mathrm{Spec}(f) = \{-4, 4\}$. $\dim_{\mathbb{R}} F_{-4} + \dim_{\mathbb{R}} F_4 = 2 + 3 = 5 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5$; f est diagonalisable.

Q4.. a) Soit $k \in [\![1, \frac{n+1}{2}]\!]$. $f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = f(e_k) + \lambda f(e_{n-k+1}) = 2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k$

b) Soit $k \in [\![1, \frac{n+1}{2}[\![$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = \alpha(e_k + \lambda e_{n-k+1}) \iff 2^{k-1} e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k} e_k = \alpha(e_k + \lambda e_{n-k+1})$$

$$\underset{\substack{(e_k, e_{n-k+1}) \text{ libre} \\ \text{car } k \neq n-k+1}}{\iff} \begin{cases} 2^{k-1} = \alpha\lambda \\ \lambda 2^{n-k} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \lambda 2^{n-k} \\ \lambda^2 2^{n-k} = 2^{k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda^2 = 2^{2k-n-1} \\ \alpha = \lambda 2^{n-k} \end{cases}$$

$$f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = \alpha(e_k + \lambda e_{n-k+1}) \iff \begin{cases} \lambda = 2^{k - \frac{n+1}{2}} \\ \text{et} \\ \alpha = 2^{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = -2^{k - \frac{n+1}{2}} \\ \text{et} \\ \alpha = -2^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

Finalement pr $k \in [\![1, \frac{n+1}{2}[\![$, $e_k + 2^{k-\frac{n+1}{2}} e_{n-k+1}$ et $e_k - 2^{k-\frac{n+1}{2}} e_{n-k+1}$ sont des vecteurs propres de f respectivement associées aux valeurs propres $2^{\frac{n-1}{2}}$ et $-2^{\frac{n-1}{2}}$

ceci permet de dire que 1.. $2^{\frac{n-1}{2}} \in \mathrm{Spec}(f)$, $-2^{\frac{n-1}{2}} \in \mathrm{Spec}(f)$

2.. $\forall k \in [\![1, \frac{n+1}{2}[\![$, $e_k + 2^{k-\frac{n+1}{2}} e_{n-k+1} \in F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$ et $e_k - 2^{k-\frac{n+1}{2}} e_{n-k+1} \in F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}$.

Supposons $2k = n+1$; $k = \frac{n+1}{2}$. $e_{n-k+1} = e_{\frac{n+1}{2}} = e_k$! } ceci suppose n impair.

$f(e_k) = 2^{k-1} e_k = 2^{\frac{n-1}{2}} e_k$; $e_k \in F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$.

c.. Il ne reste plus qu'à calculer ... ou presque.

1er cas.. n est pair. $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. $[\![1, \frac{n+1}{2}[\![= [\![1, p]\!]$

$(e_1 + 2^{1-\frac{n+1}{2}} e_n, e_2 + 2^{2-\frac{n+1}{2}} e_{n-1}, \dots, e_p + 2^{p-\frac{n+1}{2}} e_{p+1})$ est une famille libre (vérification à faire) d'éléments de $F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$; par conséquent : $\dim_{\mathbb{R}} F_{2^{\frac{n-1}{2}}} \geq p$

$(e_1 - 2^{1-\frac{n+1}{2}} e_n, e_2 - 2^{2-\frac{n+1}{2}} e_{n-1}, \dots, e_p - 2^{p-\frac{n+1}{2}} e_{p+1})$ est une famille libre d'éléments de $F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}$; par conséquent : $\dim_{\mathbb{R}} F_{-2^{\frac{n-1}{2}}} \geq p$

$$n = 2p \geq \dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}} + F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}) = \dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}} \oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}) = \dim_{\mathbb{R}} F_{2^{\frac{n-1}{2}}} + \dim_{\mathbb{R}} F_{-2^{\frac{n-1}{2}}} \geq 2p$$

Finalement $\dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}} \oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$; $F_{2^{\frac{n-1}{2}}} \oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}} = \mathbb{R}^n$.

Ceci prouve 1°.. $2^{\frac{n-1}{2}}$ et $-2^{\frac{n-1}{2}}$ sont les seules valeurs propres de f

2°.. f est diagonalisable.

2e cas.. n est impair .. $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 2)$. $[\![1, \frac{n+1}{2}[\![= [\![1, p]\!]$.

$(e_1 + 2^{1-\frac{n+1}{2}} e_n, e_2 + 2^{2-\frac{n+1}{2}} e_{n-1}, \dots, e_p + 2^{p-\frac{n+1}{2}} e_{p+2}, \underset{2p=n+1}{\underline{\underline{e_{p+1}}}})$ est une famille libre (à vérifier) de $F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$ donc $\dim_{\mathbb{R}} F_{2^{\frac{n-1}{2}}} \geq p+1$

De même : nous montrons également que $\dim_{\mathbb{R}} F_{-2^{\frac{n-1}{2}}} \geq p$ ... et que f est diagonalisable (le faire)

Q1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; $f_n(x) = e^{-n(x+\frac{1}{x})} = \left[e^{-(x+\frac{1}{x})}\right]^n = (f_1(x))^n$.

De plus : $f_n(0) = 0 = (f_1(0))^n$

Finalement $\underline{\underline{f_n = f_1^n}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x} e^{-(x+\frac{1}{x})} = \left(-\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right)(-e^{-x})$

$\lim\limits_{X \to -\infty} X e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$; par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = 0$.

$\underline{\underline{f_1 \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f_1'(0) = 0.}}$

$x \mapsto -(x + \frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; par composition $x \mapsto e^{-(x+\frac{1}{x})}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

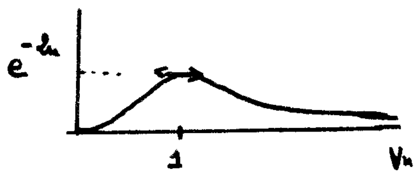
$\underline{\underline{f_1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{-(x+\frac{1}{x})}}}$

Q2 f_1 est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; par composition les variations de f_n sont les variations de f_1 et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in [0,1[$, $f_1'(x) > 0$; $f_1'(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $f_1'(x) < 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n' = n f_1' f_1^{n-1}$ donc $f_n'(1) = 0$. Notons encore que $f_n(1) = e^{-2n}$



On a encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f_n. $0 < f_1(x) \leq e^{-2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (f_1(x))^n [f_1(x) - 1] < 0$. $f_{n+1}(0) - f_n(0) = 0$

La courbe représentative de f_{n+1} est en dessous de la courbe représentative de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par monotonie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leq f_n(1) = e^{-2n}$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) = f_n(x) - a(x-1)$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas.}}}$- $\underline{a > 0}$. $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) > 0$. g_n ne s'annule pas sur $[0,1]$.

Sur $[1,+\infty[$ f_n et $x \mapsto -a(x-1)$ sont strictement décroissantes

donc g_n est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. g_n définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty, e^{-2n}]$ car $g_n(1) = e^{-2n}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = -\infty$

$0 \in]-\infty, e^{-2n}]$; $\exists!\, u_n \in [1,+\infty[$, $g_n(u_n) = 0$.

Finalement g_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$ en u_n ; $u_n \in]1,+\infty[$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!\, u_n \in \mathbb{R}_+$, $f_n(u_n) = a(u_n - 1)$ ... cqfd.

$2^{\text{ème}}$ cas. $a<0$. $\forall x\in[1,+\infty[$, $g_n(x)=f_n(x)-a(x-1)>0$; g_n ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$.

f_n et $x\mapsto -a(x-1)$ sont strictement croissantes sur $[0,1]$ donc g_n aussi.

g_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$; g_n définit une bijection de $[0,1]$ sur $g_n([0,1])=[g_n(0),g_n(1)]=[a,e^{-1}]$.

$0\in[a,e^{-1}]$, par conséquent $\exists!\, u_n\in[0,1]$, $g_n(u_n)=0$.

Finalement g_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$: en u_n ; $u_n\in[0,1]$, mieux $u_n\in]0,1[$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists!\, u_n\in\mathbb{R}_+$, $f_n(u_n)=a(u_n-1)$ ... cqfd

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(u_n)=a(u_n-1)$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|a(u_n-1)|=|f_n(u_n)|=f_n(u_n)\leqslant e^{-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a(u_n-1))=0$; comme a n'est pas nul : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$

plus directement : $u_n-1=\frac{1}{a}f(u_n)$ ...

Par conséquent $\underline{(u_n)_{n\geqslant1}\text{ converge vers }1}$.

c) Dans la question précédente a est fixe ; ici "on change de a en même temps que de n !" cela étant en appliquant $g<a$, pour n fixé, à f_n et $a=\frac{1}{n}$ on a l'existence d'un v_n et un seul tel que $f_n(v_n)=\frac{1}{n}(v_n-1)$; notons que $v_n>1$ (... $\frac{1}{n}>0$)

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|v_n-1|=n\,f_n(v_n)\leqslant ne^{-n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n}=0$ (négligeabilité classique) donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-1)=0$; $\underline{(v_n)_{n\geqslant1}\text{ converge vers }1}$.

d) Notons qu'ici le concepteur a fait une petite erreur en prenant $n\in\mathbb{N}^*$.

En effet pour $n=1$ la droite joignant "$A(1,0)$" et "$M_n(n,f(n))$" est parallèle à l'axe des ordonnées et n'a pas de pente. Nous supposerons donc $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant2$ lorsque nous parlerons de a_n.

On a alors $a_n=\dfrac{f_n(n)}{n-1}=\dfrac{1}{n-1}e^{-n(n+\frac{1}{n})}=e^{-n^2}\times\dfrac{e^{-1}}{n-1}$.

$\dfrac{e^{-1}}{n-1}=\dfrac{1}{e(n-1)}>\dfrac{1}{4(n-1)}\geqslant\dfrac{1}{n^2}$ $\quad\left(\dfrac{1}{4(n-1)}\geqslant\dfrac{1}{n^2}\Leftrightarrow n^2\geqslant4n-4\Leftrightarrow(n-2)^2\geqslant0\right)$, $\dfrac{e^{-1}}{n-1}>\dfrac{1}{n^2}$

Donc $a_n=e^{-n^2}\dfrac{e^{-1}}{n-1}>e^{-n^2}\times\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{e^{-n^2}}{n^2}$. $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant2\Rightarrow a_n>\dfrac{e^{-n^2}}{n^2}}$.

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. Reprenons la fonction g_n avec $a=\dfrac{e^{-n^2}}{n^2}$; $a>0$.

$\forall x\in[0,\omega_n[$, $g_n(x)>0$; $g_n(\omega_n)=0$ et $\forall x\in]\omega_n,+\infty[$, $g_n(x)<0$ (voir ce qui a été dit sur g_n dans le cas où $a>0$).

Pour montrer que $\omega_n>n$ il suffit donc de montrer que $g_n(n)>0$.

$$g_n(n)=f_n(n)-\frac{e^{-n^2}}{n^2}(n-1)=\begin{cases} = e^{-2}>0 & \text{si } n=1\\ =(n-1)\left[\dfrac{f_n(n)}{n-1}-\dfrac{e^{-n^2}}{n^2}\right]=(n-1)\left[a_n-\dfrac{e^{-n^2}}{n^2}\right]\overset{n\geqslant2 \text{ et } a_n>\frac{e^{-n^2}}{n^2}}{>}0\end{cases}$$

Dans tous les cas on a $g_n(n)>0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < \omega_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donne donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = +\infty$

Q4 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $f_n(x) = (f_1(x))^n$ et $|f_1(x)| \leq e^{-2} < 1$.

Par conséquent la série de terme général $f_n(x)$ converge (... série géométrique). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = 0$ pour $x = 0$.

Pour $x \neq 0$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (f_1(x))^n = f_1(x) \times \dfrac{1}{1 - f_1(x)} = \dfrac{e^{-(x+\frac{1}{x})}}{1 - e^{-(x+\frac{1}{x})}}$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = e^{-(x+1/x)} / 1 - e^{-(x+1/x)}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Q5 a) f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et F_n est la primitive de f_n sur $\mathbb{R}_+$ qui prend la valeur 0 en 0.

F_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'_n = f_n$.

Par conséquent : $F'_n(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'_n(x) > 0$.

F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-n(x+\frac{1}{x}) < -nx$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = e^{-n(x+\frac{1}{x})} < e^{-nx}$

Si $x = 0$ $f_n(x) = 0 < e^{-n\times 0}$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) < e^{-nx}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt \leq \int_0^x e^{-nt}\,dt = \left[\dfrac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x = \dfrac{1}{n}(1 - e^{-nx}) < \dfrac{1}{n}$.

(< pour $x > 0$!)

F_n est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ et majorée (par $\frac{1}{n}$) ; elle admet donc une limite finie en $+\infty$, inférieure à $1/n$

$I_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe et $I_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Notons encore que F_n est positive sur $\mathbb{R}_+$ ($\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) \geq 0$) donc par passage à la limite on obtient $0 \leq I_n$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$; par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$n \in \mathbb{N}^*$

c) $F_n : x \mapsto \int_0^x f_n(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $x \mapsto \int_1^x f_n(t)\,dt$ aussi ($\int_1^x f_n(t)dt = F_n(x) - \int_0^1 f_n(t)dt$)

$K_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x f_n(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe.

On a aussi $K_n = I_n - \int_0^1 f_n(t)\,dt$ c'est à dire $I_n = J_n + K_n$ avec $J_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

$J_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ donc $0 \leq J_n \leq \int_0^1 f_n(1)\,dt = e^{-2n}$ ($\forall t \in [0,1]$, $f_n(t) \leq f_n(1)$)

La série de terme général e^{-2n} converge (en effet : $e^{-2n} = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ et $0 < \frac{1}{e^2} < 1$) donc la série de terme général J_n aussi.

$\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \int_1^x f_n(t)\,dt \leq \int_1^x e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}(e^{-n} - e^{-nx}) \leq \dfrac{e^{-n}}{n}$

A la limite : $0 \leq K_n \leq \dfrac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n}$

La série de terme général e^{-n} converge ($e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$) donc la série de terme général K_n aussi.

Comme $I_n = J_n + K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général I_n converge.