PARTIE I (Q1)- Soit $x \in]-\infty, \frac{1}{4}]$.

$\forall y \in \mathbb{R}$, $x = y - y^2 \Leftrightarrow y^2 - y + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \end{cases}$

Remarque.. Si $x = \frac{1}{4}$: $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Si $x < \frac{1}{4}$: $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2} > 0$ et $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2} < \dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \in]-\infty, \frac{1}{2}]$ et $x = y - y^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

Pour tout x élément de $]-\infty, \frac{1}{4}]$ il existe un réel unique y de $]-\infty, \frac{1}{2}]$ tel que : $x = y - y^2$; $y = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$

(Q2) Remarque.. $f = g^{-1}$ où g est la fonction : $]-\infty, \frac{1}{2}] \to]-\infty, \frac{1}{4}]$
$x \longmapsto x - x^2$

x	$-\infty$		$1/2$
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/4$

g est continue et dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, $g'(x) = 1 - 2x$
g est donc strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ ($g'(\frac{1}{2}) = 0$ et $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, $g'(x) > 0$)

Par conséquent f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{4}]$
f est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$. $\displaystyle\lim_{x \to 1/4} \frac{f(x) - f(1/4)}{x - 1/4} = +\infty$ (... car g est croissante et $g'(\frac{1}{2}) = 0$!)

x	$-\infty$		$1/4$
$f'(x)$		$+$	$\|$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/2$

Notons que : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; C admet donc en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(x'x)$.

(Q3) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ et que :
$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!} (1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}$

→ La propriété est vraie pour $n = 1$
En effet f est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ ($x \mapsto 1-4x$ est dérivable et strictement positive sur cet intervalle) et $\forall x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\dfrac{-4}{2\sqrt{1-4x}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = \dfrac{(2 \times 1 - 2)!}{(1-1)!} (1-4x)^{-1+\frac{1}{2}}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$
$x \mapsto (1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}$ est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$ donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$;
par conséquent f est $n+1$ fois dérivable sur cet intervalle.

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!} (-n+\frac{1}{2})(-4) (1-4x)^{-n+\frac{1}{2}-1}$

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!} 2(2n-1) (1-4x)^{-(n+1)+\frac{1}{2}} = \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n(n-1)!} (1-4x)^{-(n+1)+\frac{1}{2}}$

$\forall x \in]-\infty, \frac{1}{4}[$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!} (1-4x)^{-(n+1)+\frac{1}{2}}$ ... ceci achève la récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

PARTIE II

Q1) a.- La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ (f est de classe C^∞ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$).

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!}(1-4\times 0)^{-k+\frac{1}{2}} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!}$ et $f^{(0)}(0) = 0$.

Donc $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = Q_n(x) + R_n(x)$.

b.- $\left(\frac{f(0)}{0!} = 0\right)$; $\frac{f^{(1)}(0)}{1!} = 1$, $\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = 1$, $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 2$ et $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 5$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{Q_1(x) = x}$, $\underline{Q_2(x) = x^2 + x}$, $\underline{Q_3(x) = 2x^3 + x^2 + x}$ et $\underline{Q_4(x) = 5x^4 + 2x^3 + x^2 + x}$

N'admettons pas que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$ et montrons le par récurrence.

C'est vrai pour $n = 1$ $(2 < 4\ !)$, supposons le pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons le pour $n+1$.

$$C_{2n+2}^{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} C_{2n}^n < \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} 4^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \times \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}} \times \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que : $\frac{(2n+1)}{2(n+1)} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \leq 1$ c'est à dire que : $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{2(n+1)}{2n+1}$

ou encore que : $\frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \ln\left(\frac{2(n+1)}{2n+1}\right)$

$\frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{3n}$ et $\ln\left(\frac{2(n+1)}{2n+1}\right) \geq 1 - \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}$ $\left(\ldots\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1\right)$

Si $n \geq 2$: $\frac{1}{3n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ donc $\frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \ln \frac{2(n+1)}{2n+1}$

Si $n = 1$: $\frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{1}) = \frac{1}{3}\ln 2 = \ln\sqrt[3]{2} \leq \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{2(1+1)}{2\times 1+1}$

$2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$ ... $54 \leq 64$

Dans les deux cas $\frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \ln\left(\frac{2(n+1)}{2n+1}\right)$ ... ceci achève la récurrence.

<u>Remarque</u>.. <u>Variante</u>. $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{2(n+1)}{2n+1} \iff \frac{n+1}{n} \leq \frac{8(n+1)^3}{(2n+1)^3} \iff (2n+1)^3 \leq 8n(n+1)^2$

$\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{2(n+1)}{2n+1} \iff 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \leq 8n^3 + 16n^2 + 8n \iff 4n^2 + 2n - 1 \geq 0$. ok ! (car $n \geq 1$)

Q2) a) $x \in [0, \frac{1}{4}[$. La fonction $\varphi_x : [0,x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{x-t}{1-4t}$ est strictement décroissante,

$\varphi_x(0) = x$ et $\varphi_x(x) = 0$; par conséquent : $\sup_{t\in[0,x]} \varphi_x(t) = \varphi_x(0) = x$. $\underline{\sup_{t\in[0,x]} \varphi_x(t) = x}$

b) $x \in [0, 1/4[$.

$\forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{(2n)!}{n!} (1-4t)^{-n-\frac{1}{2}} = C_{2n}^n \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \left(\frac{x-t}{1-4t}\right)^n \leq C_{2n}^n \frac{1}{\sqrt{1-4t}} x^n$

$\forall t \in [0,x],\ 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} x^n \times \frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \frac{1}{\sqrt{1-4t}} \frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}}$

Intégrons entre 0 et x

$$0 \le R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \le \frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-4t}} = \frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-4t}\right]_0^x$$

$$0 \le R_n(x) \le \frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}\right] \le \frac{1}{2}\,\frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

$0 \le R_n(x) \le \frac{1}{2}\frac{(4x)^n}{\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$ pour tout $x \in [0, \frac{1}{4}[$ ($x \in [0,\frac14[$ donc $4x \in [0,1[$)

Q3 $x \in]-\frac{1}{4}, 0]$. $|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\frac{(2n)!}{n!}(1-4t)^{-n-\frac12}dt\right| = \left|\int_x^0 C_{2n}^n (x-t)^n (1-4t)^{-n-\frac12}dt\right|$

$$|R_n(x)| \le \int_x^0 C_{2n}^n |x-t|^n (1-4t)^{-n-\frac12}dt = \int_x^0 C_{2n}^n (t-x)^n (1-4t)^{-n-\frac12}dt \le \int_x^0 C_{2n}^n (t-x)^n dt$$

$1-4t \ge 1$ donc $(1-4t)^{-n-\frac12} \le 1$ $(t \le 0)$

$$|R_n(x)| \le C_{2n}^n \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = C_{2n}^n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = C_{2n}^n \frac{(-x)^n(-x)}{n+1} = C_{2n}^n \frac{(-x)^n|x|}{n+1}.$$

$$|R_n(x)| \le \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}\,\frac{(-x)^n|x|}{n+1} = \frac{(-4x)^n|x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}$$

$0 \le -4x \le 1$ et $|x| \le \frac{1}{4}$.

$|R_n(x)| \le \frac{(-4x)^n|x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}$ pour $x \in]-\frac14, 0]$

Q4 $\forall x \in]-\frac14, \frac14[$, $|R_n(x)| \le \max\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}, \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} = 0$; par conséquent pour tout $x \in]-\frac14, \frac14[$, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = f(x)$

Q5 a) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{6\times10^{-4}\,(n+1)\sqrt[3]{n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2/3}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}} \times (n+1)\sqrt[3]{n} = \frac{2}{3}\,\frac{n+1}{n+2}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} < 1$

$(u_n)_{n\ge1}$ est strictement décroissante. Notons encore que : $u_{10} \simeq 1,22$ et $u_{11} \simeq 0,72$

* En fait $u_{10} > 1$ et $u_{11} < 1$.

Le plus petit élément N de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge N \Rightarrow \left(\frac23\right)^n \frac{1}{6\times10^{-4}(n+1)\sqrt[3]{n}} < 1$ est 11

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \ge N = 11$

$$|R_n(-\tfrac16)| \le \frac{(-4\times -\frac16)^n\,|-\frac16|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} = \left(\frac23\right)^n \frac{1}{6\times10^{-4}(n+1)\sqrt[3]{n}} \times 10^{-4} < 10^{-4}$$

$-\frac16 \in]-\frac14, 0]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge N = 11 \Rightarrow |R_n(-\frac16)| < 10^{-4}$

PARTIE III

Q1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 + x$, $P_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ et
$P_4(x) = x^8 + 4x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 2x^3 + x^2 + x$

Q2 Notons avant de commencer que : $P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2$ est très proche de $y = x + y^2$ c'est à dire $y - y^2 = x$ ... normal que f arrive à grands pas.

a) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions polynomes à ~~coefficients~~ entiers naturels.
$\mathcal{S}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
Une récurrence simple donne alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathcal{S}$.
Montrons encore par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} - P_n \in \mathcal{S}$.

→ C'est vrai pour $n = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $(P_1 - P_0)(x) = x$)

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$P_{n+2} - P_{n+1} = P_{n+1}^2 - P_n^2 = (P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n)$.

$P_{n+1} - P_n \in \mathcal{S}$ (H.R.) ; de plus $P_{n+1} + P_n \in \mathcal{S}$ car $P_n \in \mathcal{S}$ et $P_{n+1} \in \mathcal{S}$. Par conséquent.
$P_{n+2} - P_{n+1} = (P_{n+1} + P_n)(P_{n+1} - P_n)$ appartient à $\mathcal{S}$ comme produit de deux éléments de $\mathcal{S}$.
Ceci achève la récurrence.

Soit $x \in [0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_{n+1} - P_n \in \mathcal{S}$ donc $(P_{n+1} - P_n)(x) \geq 0$
Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$. $(P_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante

$(P_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b) Soit $x \in [0, \frac{1}{4}]$.

. $P_0(x) = 0 = f(0) \leq f(x)$ (f est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{4}]$)

. Supposons $P_n(x) \leq f(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que : $P_{n+1}(x) \leq f(x)$.

$0 \leq P_n(x) \leq f(x)$; $(P_n(x))^2 + x \leq (f(x))^2 + x = f(x)$
[$P_n \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}_+$] Voir définition de f

Donc $P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2 \leq f(x)$. Ceci achève la récurrence.

Par conséquent : $\forall x \in [0, \frac{1}{4}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \leq f(x)$.

c) Soit $x \in [0, \frac{1}{4}]$. $(P_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $f(x)$. Elle converge.
Soit ℓ_x sa limite. $\ell_x \leq f(x)$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \leq f(x)$ et
$\ell_x = x + \ell_x^2$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2$

Donc $\ell_x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $\ell_x - \ell_x^2 = x$. I Q1 donne $\ell_x = f(x)$.

Finalement pour tout $x \in [0, \frac{1}{4}]$, $(P_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

·En ⊕ : calcul de $P_n(x)$ et $Q_n(x)$·

```
program Lyon89;

uses crt;
var i,n:integer;x,s,u:real;

begin
clrscr;
write('Donnez la valeur de x ');readln(x);
Write('Donnez la valeur de n ');readln(n);

clrscr;writeln('Si x vaut ',x:3:3, ':');writeln;
writeln('La valeur de f(x) est :',(1-sqrt(1-4*x))/2);

{CALCUL DE Pn(x)}
s:=0;
for i:=1 to n do
s:=x+sqr(s);
Writeln('P indice ',n,' vaut en x :',s);
s:=x;u:=x;

{CALCUL DE Qn(x)}
for i:=2 to n do
begin
u:=u*2*(2*i-3)*x/i;
s:=s+u;
end;
writeln('Q indice ',n,' vaut en x :',s);
end.
```

<u>Remarque sur le calcul de $Q_n(x)$.</u>

$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-2)!}{(i-1)!\,i!} x^i = \sum_{i=1}^{n} u_i$ en posant $u_i = \frac{(2i-2)!}{(i-1)!\,i!} x^i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Notons que $u_1 = x$ et que $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $\frac{u_i}{u_{i-1}} = \frac{(2i-2)!}{(i-1)!\,i!} x^i \times \frac{(i-2)!\,(i-1)!}{(2i-4)!\,x^{i-1}} = \frac{(2i-2)(2i-3)}{(i-1)\,i} \times x$.

Donc $u_1 = x$ et $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $u_i = u_{i-1} \frac{2(2i-3)}{i} x$

On entre dans la boucle avec $\sum_{k=1}^{1} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!} x^k$ (dans s) et u_1 (dans u)

Le passage d'indice i dans la boucle calcule u_i et $\sum_{k=1}^{i} \frac{(2k-2)!}{} x^k$ à partir de u_{i-1} et $\sum_{k=1}^{i-1} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!} x^k$.

On ressort donc de la boucle avec u_n (dans u) et $\sum_{k=1}^{n} u_k = Q_n(x)$ dans s

```
Si x vaut 0.100:

La valeur de f(x) est : 1.1270166538E-01
P indice 10 vaut en x : 1.1270164765E-01
Q indice 10 vaut en x : 1.1270140620E-01


Si x vaut 0.100:

La valeur de f(x) est : 1.1270166538E-01
P indice 100 vaut en x : 1.1270166538E-01
Q indice 100 vaut en x : 1.1270166538E-01


Si x vaut -0.200:

La valeur de f(x) est :-1.7082039325E-01
P indice 100 vaut en x :-1.7082039325E-01
Q indice 100 vaut en x :-1.7082039325E-01


Si x vaut -0.100:

La valeur de f(x) est :-9.1607978309E-02
P indice 1000 vaut en x :-9.1607978310E-02
Q indice 1000 vaut en x :-9.1607978310E-02


Si x vaut 0.240:

La valeur de f(x) est : 4.0000000000E-01
P indice 100 vaut en x : 3.9999999998E-01
Q indice 100 vaut en x : 3.9995671055E-01


Si x vaut -1.000:

La valeur de f(x) est :-6.1803398875E-01
P indice 10 vaut en x : 0.0000000000E+00
Q indice 10 vaut en x : 3.7600000000E+03
```

!

```
Si x vaut -2.000:
```

!

```
La valeur de f(x) est :-1.0000000000E+00
P indice 20 vaut en x : 2.0000000000E+00
Q indice 20 vaut en x : 1.6325991350E+15
```