PARTIE PRELIMINAIRE

Q1.. Par essence $\mathcal{E}=\{aA+bB\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(A,B)$ ($\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (A,B)) ; donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et (A,B) en est une famille génératrice.

Notons que cette famille est libre. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $aA+bB=0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$0_{M_3(\mathbb{R})}=a\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&-a&a\\-a&a&-a\\b&-b&2a-b\end{bmatrix}$$; donc $a=b=0$ ... cqfd

Finalement (A,B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$; (A,B) est une base de $\mathcal{E}$.

Finalement $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

Q2.. $$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}=2A$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}=A-B$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}=2B$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}=2B$$

$A^2=2A$, $AB=BA=2B$ et $B^2=A-B$.

Q3.. Soit $(M,M')\in\mathcal{E}$. $\exists(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$, $M=aA+bB$ et $M'=a'A+b'B$

$MM'=(aA+bB)(a'A+b'B)=aa'A^2+ba'BA+ab'AB+bb'B^2=2aa'A+2(ba'+ab')B+bb'(A-B)$

$MM'=(2aa'+bb')A+(2ba'+2ab'-bb')B\in\mathcal{E}$

Le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$

$2aa'+bb'=2a'a+b'b$ et $2ba'+2ab'-bb'=2b'a+2a'b-b'b$; $MM'=M'M$

Le produit est commutatif dans $\mathcal{E}$.

Remarque.. $\mathcal{E}$ est non vide, stable pour $+$, $\times$, $\cdot$ mais $I\notin\mathcal{E}$ (I ne peut être combinaison linéaire de (A,B) ... voir l'expression de $aA+bB$)

$B^3+B^2-2B = B(A-B)+(A-B)-2B = BA-B^2+A-3B = 2B-(A-B)+A-3B = 0$

Donc $\underline{\underline{B^3+B^2-2B=0}}$

Q2 . a) → Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(B)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ tel que $BX=\lambda X$

$B^2X = \lambda BX = \lambda^2 X$ et $B^3X = \lambda^2 BX = \lambda^3 X$

$0 = (B^3+B^2-2B)X = B^3X+B^2X-2BX = (\lambda^3+\lambda^2-2\lambda)X$

Comme $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$: $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda=0$; $\lambda=1$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=-2$

Donc $\underline{\underline{\operatorname{Spec} B \subset \{-2,0,1\}}}$

→ Soit $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$BX=-2X \iff \begin{cases} z=-2x \\ -z=-2y \\ x-y-z=-2z \end{cases} \iff \begin{cases} z=-2x \\ y=-x \\ x+x+2x=4x \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-2x \end{cases}$. $F_{-2}=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX=-2X\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{-2 \in \operatorname{Spec} B}}$

$BX=0 \iff \begin{cases} z=0 \\ -z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \iff x=y$ et $z=0$. $F_0=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{0 \in \operatorname{Spec} B}}$

$BX=X \iff \begin{cases} z=x \\ -z=y \\ x-y-z=z \end{cases} \iff \begin{cases} z=x \\ y=-x \\ x+x-x=x \end{cases}$. $F_1=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX=X\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{1 \in \operatorname{Spec} B}}$

Finalement les valeurs propres de B sont $-2, 0, 1$ et les sous-espaces propres respectivement associés à ces 3 valeurs propres sont $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)$, $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ et $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

B admet 3 valeurs propres distinctes $-2,0,1$ et $B \in \mathcal{M}_{\underline{\underline{3}}}(\mathbb{R})$, B est diagonalisable

Posons $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\-2&0&1\end{bmatrix}$; $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Posons $U=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $W=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$AU=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\-4\end{bmatrix}=2U$; $AV=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0V$; $AW=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}=2W$

Ceci prouve que 1.. $0 \in \operatorname{Spec} A$, $2 \in \operatorname{Spec} A$

2.. Soit $\hat{F}_0$ (resp. $\hat{F}_2$) le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 (resp. 2). $V \in \hat{F}_0$, $U \in \hat{F}_2$ et $W \in \hat{F}_2$; donc $\dim \hat{F}_0 \geqslant 1$ et $\dim \hat{F}_2 \geqslant 2$

Nous savons que $\hat{F}_0$ et $\hat{F}_2$ sont en somme directe donc $\dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 = \dim(\hat{F}_0+\hat{F}_2) \leqslant 3$

donc $3 \geq \dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 \geq 1+2=3$; ceci exige $\dim \hat{F}_0 = 1$ et $\dim \hat{F}_2 = 2$

Ceci prouve alors que 1.. $\mathrm{Spec}\, A = \{0,2\}$

2.. $\dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 = 3$; A est diagonalisable.

mieux $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ($P = [U, V, W]$, $AU = 2U$, $AV = 0$ et $AW = 2W$)

Q3.. a) et b) pour le même prix

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$M_{a,b} = aA + bB$; $P^{-1}M_{a,b}P = a\,P^{-1}AP + b\,P^{-1}BP = a\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

$M_{a,b}$ est donc semblable à $\begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

donc : 1°.. $M_{a,b}$ est diagonalisable

2°.. $\mathrm{Spec}\, M_{a,b} = \{2a-2b, 0, 2a+b\}$

PARTIE II

Q1.. a) $M_1^2 = (A+B)^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 + 2AB + B^2 = 2A + 4B + A - B = 3(A+B) = 3M_1$

$M_1 M_2 \underset{(M_1,M_2)\in E^2}{=} M_2 M_1 = (A+B)(A-2B) = A^2 + BA - 2AB - 2B^2 = 2A + 2B - 4B - 2(A-B) = 0$

$M_2^2 = (A-2B)^2 = A^2 - 4AB + 4B^2 = 2A - 8B + 4(A-B) = 6(A-2B) = 6M_2$

$\underline{\underline{M_1^2 = 3M_1 \ , \ M_1M_2 = M_2M_1 = 0 \ , \ M_2^2 = 6M_2.}}$

b) Pour montrer que (M_1, M_2) est une base de E il suffit de montrer que la famille (M_1, M_2) est libre car $\dim E = 2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xM_1 + yM_2 = 0$

donc $xM_1^2 + yM_1M_2 = 0$; $xM_1^2 = 0$; $x = 0$ car $M_1^2 \neq 0$

donc $yM_2 = 0$; $y = 0$ car $M_2 \neq 0$

Finalement $x = y = 0$; c'est ce qu'il fallait montrer.

c) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. (x,y) sont les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base (M_1, M_2)

$aA + bB = M_{a,b} = xM_1 + yM_2 = x(A+B) + y(A-2B) = (x+y)A + (x-2y)B$

donc $\begin{cases} x + y = a \\ x - 2y = b \end{cases}$; $x = \frac{1}{3}(2a+b)$ et $y = \frac{1}{3}(a-b)$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\underline{\underline{M_{a,b} = \frac{1}{3}(2a+b)M_1 + \frac{1}{3}(a-b)M_2}}$

Q2.. $n \in \mathbb{N}^*$

a.. $\Pi_1^2 = 3\Pi_1$ et $\Pi_2^2 = 6\Pi_2$

Une récurrence simple donne alors : $\Pi_1^n = 3^{n-1}\Pi_1$ et $\Pi_2^n = 6^{n-1}\Pi_2$.

b.. $(\Pi_{a,b})^n = (x\Pi_1 + y\Pi_2)^n$ avec $x = \frac{1}{3}(2a+b)$ et $y = \frac{1}{3}(a-b)$.

$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$ donc $\Pi_{a,b}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \Pi_1^k \Pi_2^{n-k} \underset{\uparrow}{=} x^n \Pi_1^n + y^n \Pi_2^n = 3^{n-1}x^n\Pi_1 + 6^{n-1}y^n\Pi_2$

$\Pi_1^k\Pi_2^{n-k} = 0$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

$\Pi_{a,b}^n = 3^{n-1}\left(\frac{2a+b}{3}\right)^n \Pi_1 + 6^{n-1}\left(\frac{a-b}{3}\right)^n \Pi_2$

$\Pi_{a,b}^n = \frac{1}{3}(2a+b)^n\Pi_1 + \frac{1}{6}(2(a-b))^n\Pi_2$

c.. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Pi_{a,b}^k = I + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\frac{1}{3}(2a+b)^k\Pi_1 + \frac{1}{k!}\frac{1}{6}(2(a-b))^k\Pi_2\right)$

$S_n = I + \lambda_n\Pi_1 + \mu_n\Pi_2$ avec $\lambda_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2a+b)^k}{k!}$ et $\mu_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2(a-b))^k}{k!}$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2a+b)^k}{k!} = e^{2a+b}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = \frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)$; $\lambda = \frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)$

De même : $\lim_{n\to+\infty}\mu_n = \frac{1}{6}(e^{2a-2b}-1)$; $\mu = \frac{1}{6}(e^{2a-2b}-1)$

Q3.. $P^{-1}\Pi_{a,b}P = \begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

donc $P^{-1}\Pi_1P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ("$a=b=1$") et $P^{-1}\Pi_2P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ("$a=1, b=-2$")

$P^{-1}e^{\Pi_{a,b}}P = \underbrace{P^{-1}IP}_{I} + \lambda P^{-1}\Pi_1P + \mu P^{-1}\Pi_2P = \begin{bmatrix} 1+6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+3\lambda \end{bmatrix}$

$e^{\Pi_{a,b}}$ est donc semblable à $\begin{bmatrix} 1+6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+3\lambda \end{bmatrix}$. Par conséquent :

1°.. $e^{\Pi_{a,b}}$ est diagonalisable

2°.. $\mathrm{Spec}\, e^{\Pi_{a,b}} = \{1 + \frac{6}{6}(e^{2a-2b}-1), 1, 1 + 3 \times \frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)\} = \{e^{2a-2b}, 1, e^{2a+b}\}$.

$\mathrm{Spec}\, \Pi_{a,b} = \{2a-2b, 0, 2a+b\}$ et $\mathrm{Spec}\, e^{\Pi_{a,b}} = \{e^{2a-2b}, e^0, e^{2a+b}\}$ you see ?

Raffinons encore.

<u>1er Cas..</u> $a \neq b$ et $b \neq -2a$

$e^{M_{ab}}$ possède trois valeurs propres distinctes e^{2a-2b}, 1 et e^{2a+b}

Les trois sous-espaces propres associés sont $\mathrm{Vect}(U)$, $\mathrm{Vect}(V)$ et $\mathrm{Vect}(W)$.

<u>2ième Cas..</u> $a = b$. Alors $b \neq -2a$ $\quad ((a,b) \neq (0,0))$

$e^{M_{ab}}$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et $e^{2a+b} = e^{3a}$

U et V sont deux vecteurs propres associés à 1 et W un vecteur propre associé à e^{3a}. $\mathrm{Vect}(U,V) \subset \check{F}_1 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid e^{M_{ab}} X = X\}$; $\dim \check{F}_1 \geqslant 2$.

$\mathrm{Vect}\, W \subset \check{F}_{3a} = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid e^{M_{ab}} X = 3a X\}$; $\dim \check{F}_{3a} \geqslant 1$.

Comme $3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R}) \geqslant \dim(\check{F}_1 + \check{F}_{3a}) = \dim \check{F}_1 + \dim \check{F}_{3a} \geqslant 3$: $\dim \check{F}_1 = 2$ et $\dim \check{F}_{3a} = 1$. Finalement $\check{F}_1 = \mathrm{Vect}(U,V)$ et $\check{F}_{3a} = \mathrm{Vect}(W)$.

<u>3ième Cas..</u> $b = -2a$; Alors $a \neq b$.

On montre de la même manière que $\mathrm{Spec}\, e^{M_{ab}} = \{e^{6a}, 1\}$, que :

$\check{F}_{e^{6a}} = \mathrm{Vect}(U)$ et $\check{F}_1 = \mathrm{Vect}(V,W)$.

PREMIERE PARTIE

Q1.. Etudions la continuité de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous aurons ainsi largement traité le problème posé.

Rappelons que : $x \mapsto E(x)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$; par composition $x \mapsto E(\frac{1}{x})$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^* - \{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{Z}^*\}$

Notons encore que $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent f_α est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{N}^*\}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = \frac{1}{p}$ et étudions la continuité de f_α en $a = \frac{1}{p}$

Notons que $f_\alpha(a) = f_\alpha(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p^\alpha} \times p = \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ et étudions successivement $\lim_{x \mapsto a^+} f_\alpha(x)$ et $\lim_{x \mapsto a^-} f_\alpha(x)$

Supposons $p \neq 1$

$\forall x \in]\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}[, f_\alpha(x) = x^\alpha(p-1)$, donc $\lim_{x \mapsto a^+} f_\alpha(x) = \lim_{x \mapsto a^+} (x^\alpha(p-1)) = \frac{p-1}{p^\alpha} \neq \frac{p}{p^\alpha} = f_\alpha(a)$; f_α est discontinue <u>à droite en a</u>

Supposons $p = 1$. $a = 1$. $\forall x \in]1, +\infty[, \frac{1}{x} \in]0, 1[$; $\forall x \in]1, +\infty[, E(\frac{1}{x}) = 0$; $\forall x \in]1, +\infty[, f_\alpha(x) = 0$.

$\lim_{x \mapsto a^+} f_\alpha(x) = \lim_{x \mapsto 1^+} f_\alpha(x) = 0 \neq f_\alpha(1)$ $(f_\alpha(1) = 1)$; f est encore discontinue à droite en a.

$\forall x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $\underset{\substack{\uparrow \\ p < \frac{1}{x} < p+1}}{f_\alpha(x) = x^\alpha \times p}$; $\lim_{x \mapsto a^-} f_\alpha(x) = \lim_{x \mapsto \frac{1}{p}^-} (x^\alpha p) = \frac{p}{p^\alpha} = f(a)$; f_α est continue à gauche en a.

Pour conclure

1°.. f_α est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{N}^*\}$

2°.. f_α est continue à gauche en tout point de $\{\frac{1}{p} ; p \in \mathbb{N}^*\}$

3°.. f_α est discontinue à droite " " " " (tout en possédant une limite finie à droite en ces points). Notons que f_α est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$

Remarque .. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_0(x) = E(\frac{1}{x})$.

$f_0(\frac{1}{4}) = 4$

$\forall x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}], \quad f_0(x) = 3$

$\forall x \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \quad f_0(x) = 2$

$\forall x \in]\frac{1}{2}, 1], \quad f_0(x) = 1$

$\forall x \in]1, 2], \quad f_0(x) = 0$

Q2.. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < E(\frac{1}{x}) + 1$, c'est la définition.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha\left(\frac{1}{x}-1\right) < f_\alpha(x) \leq \frac{x^\alpha}{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $x^{\alpha-1}-x^\alpha < f_\alpha(x) \leq x^{\alpha-1}$

1er cas.. $\alpha>1$. $\lim\limits_{x\mapsto0^+} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\mapsto0^+} x^\alpha = 0$; par encadrement $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f_\alpha(x)=0$. f_α est prolongeable par continuité en 0

2ème cas.. $\alpha=1$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $1-x < f_\alpha(x) \leq 1$; par encadrement $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f_\alpha(x)=1$. f est prolongeable par continuité en 0

3ème cas.. $\alpha<1$. $\lim\limits_{x\mapsto0^+}(x^{\alpha-1}-x^\alpha)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f_\alpha(x)=+\infty$; f n'est pas prolongeable par continuité en 0

remarque. On pouvait aussi utiliser : $E(x)\underset{+\infty}{\sim} x$ soit $E\left(\frac{1}{x}\right)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}$

Q3.. 3 fonctions et 4 segments c'est trop !

$f_2(1/4)=1/4$ $f_1(1/4)=1$ $f_{1/2}(1/4)=2$

$\forall x\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$, $f_2(x)=3x^2$, $f_1(x)=3x$ et $f_{1/2}(x)=3\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, $f_2(x)=2x^2$, $f_1(x)=2x$ et $f_{1/2}(x)=2\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]\frac{1}{2},1\right]$, $f_2(x)=x^2$, $f_1(x)=x$ et $f_{1/2}(x)=\sqrt{x}$

$\forall x\in\left]1,2\right]$, $f_2(x)=f_1(x)=f_{1/2}(x)=0$.

DEUXIEME PARTIE

Q1.. $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad E\left(\frac{1}{x}\right)=n$ si $x\in\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$

$$I_\alpha(n)=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{n}} x^\alpha E\left(\frac{1}{x}\right)dx \overset{\downarrow}{=} \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+}\left(n\int_\varepsilon^{1/n} x^\alpha\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\mapsto\frac{1}{n+1}^+} n\left[\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}-\varepsilon^{\alpha+1}\right]\right]$$

$$\underline{\underline{I_\alpha(n)=\frac{n}{\alpha+1}\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}-\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\right]}}.$$

Q2.. $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$$J_\alpha(n)=\sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p)=\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{\alpha+1}\left[\frac{1}{p^{\alpha+1}}-\frac{1}{(p+1)^{\alpha+1}}\right] = \frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{p^{\alpha+1}}-\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{(p+1)^{\alpha+1}}\right]$$

p→p-1 dans le 2ème Σ

$$J_\alpha(n)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{p^{\alpha+1}} - \sum_{\substack{p=2\\ \text{ou }1}}^{n+1}\frac{p-1}{p^{\alpha+1}}\right] = \frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n+1}\frac{p-(p-1)}{p^{\alpha+1}} - \underbrace{\frac{n+1}{(n+1)^{\alpha+1}}}\right]$$

terme ajouté au niveau de la 1re Σ.

$$\underline{\underline{J_\alpha(n)=\frac{1}{\alpha+1}\left[\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^{\alpha+1}}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right]}}.$$

Q3.. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a.. $J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p) = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} f_\alpha(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f_\alpha(x)\,dx$ (ce qui a un sens car f est continue par morceaux sur $[\frac{1}{n+1}, 1]$ ... ma généralisation de I n'était pas un luxe mais une nécessité ; d'accord le concepteur ?)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f_\alpha(x)\,dx.$$

b.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$J_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^\alpha E(\frac{1}{x})\,dx$. $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$

Donc $J_\alpha(n) \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^\alpha \frac{1}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha}[x^\alpha]_{\frac{1}{n+1}}^{1} = \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$.

c.. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ J_\alpha(n+1) - J_\alpha(n) = I_\alpha(n+1) = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f_\alpha(x)\,dx \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ J_\alpha(n+1) \geq J_\alpha(n)$.

$(J_\alpha(n))_{n\geq 1}$ est une suite croissante. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ J_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha}$.

$(J_\alpha(n))_{n\geq 1}$ est donc croissante et majorée ; cette suite est donc convergente.

<u>Remarque</u>.. D'après la 1ère partie f_α est localement intégrable sur $]0,1]$ (f_α est continue par morceaux sur tous les segments de $]0,1]$ car f_α est continue par morceaux sur tous les segments $[\frac{1}{n}, 1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$\varphi : x \mapsto \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt$ est décroissante sur $]0,1]$ car f_α est positive sur $]0,1]$. Donc si φ est majorée φ admet une limite finie en 0.

$(J_\alpha(n))_{n\geq 1}$ est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n+1} \leq x$. $\quad \varphi(x) = \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f_\alpha(t)\,dt = J_\alpha(n) \leq L = \lim_{n\to+\infty} J_\alpha(n)$

Donc φ est décroissante sur $]0,1]$ et majorée ; φ admet une limite finie en 0.

Donc $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$ existe. Notons encore que : $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{+\infty} I_\alpha(p)$ pour $\alpha > 0$

Q4.. a.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $J_0(n) = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} E\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{p=1}^{n} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} p \, dx = \sum_{p=1}^{n} p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$

$x \in \left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right] \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = p$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_0(n) = \sum_{p=1}^{n} p \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$

b.. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [p, p+1]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{p}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x}$.

c.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_0(n) = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} \geq \sum_{p=2}^{n+1} \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}$.

d.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_0(n) \geq \int_2^{n+2} \frac{dx}{x} = \ln(n+2) - \ln 2$

$\lim_{n \to +\infty} J_0(n) = +\infty$ car $\lim_{n \to +\infty} (\ln(n+2) - \ln 2) = +\infty$

Remarque .. Normal car $\int_0^1 E\left(\frac{1}{x}\right) dx$ diverge car $E\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x}$ ...

PARTIE III

ouaoc !

Q1.. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1/2}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n+1} = \frac{1}{2n(n^2-1)}\left[n(n+1) - 2(n^2-1) + n(n-1)\right] = \frac{2}{2n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}$.

b) Soit $n \in [2, +\infty[$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p+1} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{p=1}^{n-1}}_{p \mapsto p+1 \text{ dans la } 1^{\text{e}} \Sigma} \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{p=3}^{n+1}}_{p \mapsto p-1 \text{ dans la } 2^{\text{e}} \Sigma} \frac{1}{p}$$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{4} + \frac{-(n+1)+n}{2n(n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \sum_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

c.. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}\right) = \frac{1}{4}$ donc la série de terme général v_p converge et $\sum\limits_{p=2}^{+\infty} v_p = \frac{1}{4}$

d.. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![\,,\ \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} v_p - \sum\limits_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}.$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \frac{1}{2n(n+1)}.$

Q2.. a.. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$

$\omega_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} - \frac{1}{n^3} = \frac{n^2-(n^2-1)}{(n^2-1)n^3} = \frac{1}{n^3(n-1)(n+1)}$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \omega_n = \frac{1}{n^3(n-1)(n+1)}.$

b.. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \omega_n = \frac{1}{n^2}\ \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n^2} v_n$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \omega_n = \frac{v_n}{n^2}$

c.. $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow 0 \leq \omega_n = \frac{v_n}{n^2} \leq v_n$ (fin, non ?)

La série de terme général ω_n est donc convergente car celle de terme général v_n l'est (règle de comparaison des séries à termes positifs)

Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{v_p}{p^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} v_p = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^4}$

classique, très classique ! A retenir.
si $p\in [\![n+1,+\infty[\![,\ \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$!

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ 0 \leq \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p \leq \frac{1}{2n^4}.$

Q3. a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2} \Leftrightarrow n^4 \geq 10^7 \Leftrightarrow n \geq 10^{7/4}$; $10^{7/4} \simeq 56,23$

Donc pour $n\geq 57$: $\frac{1}{2n^4} \leq \frac{10^{-7}}{2}$.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\Pi - 1 = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^3} = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} u_p = \sum\limits_{p=2}^{n} u_p + \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \sum\limits_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} + \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$

$\Pi - 1 - \sum\limits_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} v_p - \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p = \frac{1}{2n(n+1)} - \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \omega_p$

Pour $n = 57$.

$$\Pi - 1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^3} - \frac{1}{2n(n+1)} = - \sum_{p=n+1}^{+\infty} w_p \in \left[-\frac{10^{-7}}{2}, 0\right]$$

Donc $\Pi^* = 1 + \sum_{p=2}^{57} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2\times 57\times 58}$ est une valeur approchée de Π à $\frac{10^{-7}}{2}$ près

Si ma machine donne une valeur approchée de Π^* à $\frac{10^{-7}}{2}$ près j'aurai une valeur approchée de Π à 10^{-7} près.

Notons encore que : $\Pi^* = \sum_{p=1}^{57} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{2\times 57\times 58} \simeq 1,202 \,/\, 056\ 926$

$\underline{\underline{1,202\ 056\ 9}}$ est (certainement) une valeur approchée à 10^{-7} près de Π.

? → N : 0 → S : 0 → P : Lbl 0 : Isz P : S + 1 ÷ P ÷ P² → S : P < N ⇒ GOTO 0 :
S + 1 ÷ 2 ÷ N ÷ (N+1) ◢

oui il reste de la place pour écrire un programme en T.P. !

```
program lyon92;

uses crt;
var i,n:integer;s:real;

begin

clrscr;
n:=57;s:=0;

for i:=1 to n do
s:=s+1/i/i/i;

s:=s+1/2/n/(n+1);
write(s,' est certainement une valeur approchée à 10 moins 7 près de M');
end.
```

```
1.2020569260E+00 est certainement une valeur approchée à 10 moins 7 près de M
```