PROBLÈME 1

Q1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{\lambda}{2} L_1}{} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + (\frac{\lambda^2}{2}-1)L_2}{} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda(\frac{\lambda^2}{2}-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2) \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \iff A-\lambda I$ non inversible $\iff \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2) \end{bmatrix}$ non inversible $\iff \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2)=0 \iff \lambda \in \{-2,0,2\}$.

<u>Cl... Les valeurs propres de A_3 sont : -2, 0 et 2.</u>

b) <u>A_3 est diagonalisable</u> car A_3 possède trois valeurs propres distinctes et A_3 est un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

▼ Remarque... les sous-espaces propres associés aux valeurs propres -2, 0 et 2 sont les droites vectorielles respectivement engendrées par : $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice inversible. $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ▼

c) <u>0 est valeur propre de A_3 donc A_3 n'est pas inversible.</u>

Q2. a) <u>$u(1) = (n-1)X$, $\forall j \in [\![1, n-2]\!]$, $u(X^j) = jX^{j-1} + (n-1-j)X^{j+1}$ et $u(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$.</u>

b) Soit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ un élément de E. Calculons $Q = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

$Q = (n-1)X\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j - (X^2-1)\sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1} = (n-1)a_0 X + (n-1)\sum_{j=1}^{n-1} a_j X^{j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1}$;

$Q = a_0(n-1)X + \sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j)a_j X^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1}$;

$Q = a_0(n-1)X + \sum_{j=1}^{n-2} a_j\left[(n-1-j)X^{j+1} + jX^{j-1}\right] + (n-1-(n-1))a_{n-1}X^n + (n-1)a_{n-1}X^{n-2}$;

$Q = a_0 u(1) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j u(X^j) + 0 + a_{n-1}u(X^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u(X^j) = u\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j\right) = u(P)$.

Finalement : <u>$\forall P \in E$, $u(P) = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)$.</u>

Q3 $P\in E$, $P\neq 0_E$ et $(n-1)XP(X)-(X^2-1)P'(X)=\lambda P(X)$ ou $(n-1)XP-(X^2-1)P'=\lambda P$

a) On suppose $\lambda\neq n-1$.

$(n-1)1P(1)-(1^2-1)P'(1)=\lambda P(1)$; $(n-1)P(1)=\lambda P(1)$; $P(1)=0$ car $\lambda\neq n-1$.

Si $\lambda\neq n-1$: 1 est racine de P.

b) On suppose $\lambda\neq 1-n$.

$(n-1)(-1)P(-1)-((-1)^2-1)P'(-1)=\lambda P(-1)$; $(1-n)P(-1)=\lambda P(-1)$; $P(-1)=0$ car $\lambda\neq 1-n$.

Si $\lambda\neq 1-n$: -1 est racine de P.

c) $\lambda=n-1$. Alors -1 est racine de P car $\lambda\neq 1-n$. Soit s l'ordre de multiplicité de 1 dans P et T le quotient de P par $(X+1)^s$.

$P=(X+1)^sT$ et $T(-1)\neq 0$.

$\lambda P=(n-1)XP-(X^2-1)P'$; $(n-1)(X+1)^sT=(n-1)X(X+1)^sT-(X^2-1)s(X+1)^{s-1}T-(X^2-1)(X+1)^sT'$

divisons par $(X+1)^s$. Il vient : $(n-1)T=(n-1)XT-(X-1)sT-(X^2-1)T'$.

En prenant la valeur en -1 et en divisant par $T(-1)$ on obtient :

$(n-1)=(n-1)(-1)+2s$; c'est à dire $s=n-1$

$P=(X+1)^{n-1}T$. Comme $\deg P\leq n-1$: T est nécessairement constant. P n'étant pas nul, T ne l'est pas davantage.

Finalement $P=(X+1)^{n-1}T$ où T est un polynôme constant et non nul.

♥ Remarque.. Ceci prouve que : $\mathrm{Ker}\,(u-(n-1)\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Vect}\,((X+1)^{n-1})$ ♥

d) $\lambda=1-n$ Même démarche que pour c)

♥ Remarque.. On prouve ainsi que : $\mathrm{Ker}\,(u-(1-n)\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Vect}\,((X-1)^{n-1})$ ♥

d) $\lambda\neq(n-1)$ et $\lambda\neq 1-n$.

1 et -1 sont racines de P. Soit r (resp. s) l'ordre de multiplicité de $+1$ (resp -1) dans P.

Notons T le quotient de P par $(X-1)^r(X+1)^s$.

$P=(X-1)^r(X+1)^sT$ avec $T(1)\neq 0$ et $T(-1)\neq 0$.

$\lambda(X-1)^r(X+1)^sT=\lambda P=(n-1)XP-(X^2-1)P'=(n-1)X(X-1)^r(X+1)^sT-(X^2-1)r(X-1)^{r-1}(X+1)^sT-$

$(X^2-1)(X-1)^r s(X+1)^{s-1}T-(X^2-1)(X-1)^r(X+1)^sT'$.

En divisant par $(X-1)^r(X-1)^s$ il vient :

$\lambda T = (n-1)XT - r(X+1)T - s(X-1)T - (X^2-1)T'$

En prenant la valeur en 1 et en divisant par $T(1)$ on obtient : $\lambda = (n-1) - 2r$

———————— -1 ———————— $T(-1)$ ———————— : $\lambda = -(n-1) + 2s$

Par soustraction il vient : $0 = 2(n-1) - 2r - 2s$; ou : $r + s = n-1$, ou $s = n-1-r$

En conséquence : $\begin{cases} s = n-1-r \\ \text{et} \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$. $s \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1-r \geq 1$; $r \leq n-2$; $1 \leq r \leq n-2$

Finalement : $\begin{cases} 1 \leq r \leq n-2 \\ s = n-1-r \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$.

$P = (X-1)^r(X+1)^s T = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r} T$. Or $\deg P \leq n-1$ et $\deg (X-1)^r(X+1)^{n-1-r} = n-1$; par conséquent T est constant et non nul car P n'est pas nul.

▼ <u>Remarques</u> 1. Ce qui précède indique que :

$\forall r \in [\![1, n-2]\!]$, $\mathrm{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$

Avec c) et d) on a même $\forall r \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$.

2. Q3 indique donc que : $\mathrm{Spec}\, u \subset \{n-1-2r \,;\, r \in [\![0, n-1]\!]\}$ et que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$.

Donc si nous prouvons que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}$ nous aurons des égalités à la place des inclusions. ▼

Q4 a) Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$.

$u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1)X(X-1)^r(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)r(X-1)^{r-1}(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)(X-1)^r(n-1-r)(X+1)^{n-2-r}$

$u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\left[(n-1)X - r(X+1) - (n-1-r)(X-1)\right] = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^s$

$\forall r \in [\![0, n-1]\!]$, $u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^s$.

b) Q4a) montre alors que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $n-1-2r$ est valeur propre de u donc de A_n. A_n a donc au moins n valeurs propres distinctes ; A_n a donc n valeurs propres distinctes puisque $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>A_n est donc diagonalisable</u>

La famille $\mathcal{C}$ est constituée de n vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de n vecteurs de E ; comme $\dim E = n$: $\mathcal{C}$ est une base de E.

Q5 A_n inversible $\Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Spec} A_n \Leftrightarrow \nexists r \in [\![0, n-1]\!],\ n-1-2r = 0$

A_n inversible $\Leftrightarrow \nexists r \in [\![0,n-1]\!],\ r = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n-1$ n'est pas pair $\Leftrightarrow n$ est pair.

Cl.. A_n est inversible si et seulement si n est pair.

▼ Remarques 1.. Q3 est un peu laque. Rappelons de $P \in E$, $P \neq 0_E$ et $u(P) = \lambda P$.

Alors : $((n-1)X - \lambda)P = (X^2-1)P'$.

Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$ et k son ordre de multiplicité. Supposons $a \neq 1$ et $a \neq -1$. $(X-a)^k$ divise P, donc $((n-1)X-\lambda)P$, donc $(X^2-1)P'$, donc P' (car $a\neq 1$ et $a \neq -1$).

Ceci signifie que l'ordre de multiplicité de a dans P' est au moins k alors que nous savons que cet ordre est $k-1$! Les seuls zéros possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1.

Par conséquent $\exists c \in \mathbb{R}^*, \exists r \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N}$, $P = c(X-1)^r(X+1)^s$

Notons q le degré de P. $q = r+s$. Soit a_q le coefficient de X^q dans P ; $a_q \neq 0$.

$((n-1)X-\lambda)P = (X^2-1)P'$. Le coefficient de X^{q+1} dans le 1er membre est $(n-1)a_q$; dans le second membre c'est $q a_q$; donc $q = n-1$

Par conséquent : $r+s = n-1$. Comme r et s sont dans $\mathbb{N}$: $r \in [\![0,n-1]\!]$.

$P = c(X-1)^r(X+1)^s$ et $((n-1)X-\lambda)P = (X^2-1)P'$. $-\lambda P(0) = -P'(0)$; $\lambda P(0) = P'(0)$.

$P(0) = c(-1)^r$. $P'(0) = cr(-1)^{r-1} + cs(-1)^r$. Donc $\lambda c(-1)^r = cr(-1)^{r-1} + cs(-1)^r$.

En divisant par $c(-1)^r$ il vient : $\lambda = -r+s = n-1-2r$

ce qui prouve que 1°.- $\operatorname{Spec} u \subset \{n-1-2r ;\ r \in [\![0,n-1]\!]\}$

2°.- $\forall r \in [\![0,n-1]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - (n-1-2r)\operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)$.

2.. Il faut savoir montrer à la main que $\mathcal{C}$ est une famille libre de E. Plus généralement il faut savoir prouver que si a et b sont deux éléments distincts de K ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et si $n \in \mathbb{N}^*$, $((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), \dots, (X-b)^n) = ((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $K[X]$ (donc une base de $K_n[X]$)

Supposons cette famille liée. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X-a)^k(X-b)^{n-k} = 0$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{K^{n+1}}$

Soit $i = \min\{k \in [\![0,n]\!], \alpha_k \neq 0\}$. $\alpha_i \neq 0$.

$0 = \sum_{k=i}^n \alpha_k (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Divisons par $(X-a)^i$; il vient : $\alpha_i (X-b)^{n-i} + \sum_{k=i+1}^n \alpha_k (X-a)^{k-i}(X-b)^{n-k} = 0$

En prenant la valeur en a on obtient : $\alpha_i(a-b)^{n-i} = 0$ donc $\alpha_i = 0$!! contradiction... ▼

PROBLEME 2 " $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ "

Q1 Etude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

a) Soit $x\in]0,+\infty[$. $\forall t\in[0,x]$, $0\leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\leq 1$; donc $0\leq xF(x)\leq \int_0^x dt = x$.

$\forall x\in]0,+\infty[,\quad 0\leq F(x)\leq 1.$

b) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $F(-x)=-\frac{1}{x}\int_0^{-x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \underset{y=-t}{=} -\frac{1}{x}\int_0^x \frac{-dy}{\sqrt{1+y^4}} = F(x)$. De plus $F(-0)=F(0)$.

F est paire sur $\mathbb{R}$.

c) $x\mapsto \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, qui prend la valeur 0 en 0 ; c'est donc une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
$x\mapsto\frac{1}{x}$ étant C^1 sur $\mathbb{R}^*$, F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $xF(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $F(x)+xF'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=r(x^4)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ xF'(x)=-F(x)+r(x^4)$. A fortiori F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et
$\forall x\in]0,+\infty[,\ xF'(x)=-F(x)+r(x^4)$.

d) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall t\in[0,x]$, $r(x^4)\leq r(t^4)$ car r est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
En intégrant il vient : $xr(x^4)=\int_0^x r(x^4)dt\leq\int_0^x r(t^4)\,dt = xF(x)$
En divisant par x on obtient : $r(x^4)\leq F(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ r(x^4)\leq F(x).$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $xF'(x)=-F(x)+r(x^4)\leq 0$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F'(x)\leq 0$.

cl.. F est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q2 Etude locale de F en 0.

a) Soit G la primitive de $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0.
G est dérivable en 0 et $G'(0)=1$.

donc $1=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}G(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 1 = F(0)$. <u>F est donc continue en 0.</u>

<u>b)</u> α. r est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $r'(t) = -\frac{1}{2(1+t)^{3/2}}$.

r' est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $r''(t) = \frac{3}{4(1+t)^{5/2}}$; r'' est clairement continue sur $\mathbb{R}^+$

Finalement r est C^2 sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $u \in [0,+\infty[$. Appliquons Taylor-Lagrange avec reste intégral à r sur $[0,u]$ à l'ordre 1.

Il vient :

$$r(u) = r(0) + r'(0)u + \int_0^u \frac{(u-t)^1}{1} r''(t)\,dt = 1 - \frac{1}{2}u + \int_0^u (u-t)\,r''(t)\,dt$$

Donc $r(u) - (1 - \frac{1}{2}u) = \int_0^u (u-t)\,r''(t)\,dt$.

$\forall t \in [0,u]$, $0 \leq (u-t)\frac{3}{4(1+t)^{5/2}} = (u-t)\,r''(t) \leq (u-t)\frac{3}{4}$ $\quad \left(r''(t) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(1+t)^{5/2}}\right)$

En intégrant il vient : $0 \leq \int_0^u (u-t)\,r''(t)\,dt \leq \frac{3}{4}\int_0^u (u-t)\,dt = \frac{3}{4}\left[-\frac{(u-t)^2}{2}\right]_0^u = \frac{3}{8}u^2$

Finalement : <u>$\forall u \in [0,+\infty[$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - (1 - \frac{1}{2}u) \leq \frac{3}{8}u^2$.</u>

β. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\quad \forall t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - (1 - \frac{1}{2}t^4) \leq \frac{3}{8}t^8$

En intégrant on obtient : $0 \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - (x - \frac{1}{10}x^5) \leq \frac{3}{8}\frac{x^9}{9}$

Donc $\quad 0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72}x^8$

<u>$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72}x^8$.</u>

Notons que ceci vaut encore pour $x = 0$ car $F(0) = 1$.

Mieux : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $0 \leq F(-x) - (1 - \frac{1}{10}(-x)^4) \leq \frac{3}{72}(-x)^8$; ceci donne par parité :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72}x^8$

Finalement : <u>$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72}x^8$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4)}{x^7}\right| \leq \frac{3}{72}\frac{x^8}{|x^7|} = \frac{3}{72}|x|$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4)}{x^7} = 0$.

Par conséquent : $F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) = o(x^7)$

Donc $\underline{\underline{F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^7)}}$. F admet un dl7 en 0 !

A fortiori $\underline{F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^4)}$. F admet un dl4 en 0.

γ.. F admet en particulier un dl 1 en 0 qui est : $F(x) = 1 + o(x)$.

<u>F est donc dérivable en 0 et $F'(0)=0$.</u>

<u>c)</u> $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $xF(x) = \int_0^x r(t^4)\,dt$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $xF(x) = \int_0^x r(t^4)\,dt$

En dérivant : $F(x) + xF'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = -(F(x)-1) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - 1 = -(F(x)-1) + \frac{1-\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $xF'(x) = -(F(x)-1) + \frac{-x^4}{(1+\sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+x^4})}$;

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{F'(x)}{x^3} = -\frac{F(x)-1}{x^4} - \frac{1}{(1+\sqrt{1+x^4})\sqrt{1+x^4}}$ (par division par x^4).

a $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-1}{x^4} = -\frac{1}{10}$ (car $F(x)-1 = -\frac{1}{10}x^4 + o(x^4)$) et $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{(1+\sqrt{1+x^4})\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}$

Il vient alors : $\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{x^3} = +\frac{1}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$; $\frac{F'(x)}{x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{2}{5}$; $F'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{5}x^3$

Donc $F'(x) = -\frac{2}{5}x^3 + o(x^3)$

cl.. <u>F' admet un dl 3 au voisinage de 0 : $F'(x) = -\frac{2}{5}x^3 + o(x^3)$.</u>

▼ Remarque .. cette démonstration a consisté à dire que $F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^4)$ devrait donner $F'(x) = -\frac{4}{10}x^3 + o(x^3)$, résultat équivalent à $\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{x^3} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$! On pouvait aussi partir de $F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{r(x^4)}{x}$ et, écrire $F'(x) = -\frac{F(x)-1}{x} + \left(\frac{r(x^4)}{x} - 1\right)$ et faire une somme de deux dl3 ▼

d) ce qui précède indique alors que $\lim_{x \to 0} F'(x) = 0 = F'(0)$; F' est alors continue à 0.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{r(x^4)}{x}$; donc F' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Par conséquent : Fest de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car F est dérivable et F' est continue sur $\mathbb{R}$.

Q3. Etude locale de F en $+\infty$.

a) α. Soit $x \in]0,+\infty[$. $h(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \underset{z=1/t}{=} \int_1^{1/x} \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\sqrt{1+\frac{1}{z^4}}} = -\int_1^{1/x} \frac{dz}{z^2\sqrt{1+\frac{1}{z^4}}} = -\int_1^{1/x} \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$

$\forall x \in]0,+\infty[, \quad h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

β. Soit $x \in]0,+\infty[$. $xF(x) + \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + h(x) + h(1/x)$.

$xF(x) + \frac{1}{x}F(1/x) = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 2F(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ xF(x) + \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1).$

b) α. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = \frac{2F(1)}{x} - \frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\lim_{x \to +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0^+} F(y) = 1$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

▼ Remarque.. $\lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2F(1) - \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2F(1)$; $xF(x) \underset{+\infty}{\sim} 2F(1)$ $(F(1) \neq 0)$

donc $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2F(1)}{x}$.

β. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{r(x^4)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} F'(x) = 0$. ▼

x	$F(x)$
1	0,93
2	0,68
3	0,51
4	0,40
5	0,33
6	0,28
7	0,24