PROBLEME 1

PARTIE I

Q1 $P_0 = \sum_{k=0}^{E(0/2)} (-1)^k C_{0+1}^{2k+1}(1-X^2)^k X^{0-2k} = 1$. $P_1 = \sum_{k=0}^{E(1/2)} (-1)^k C_{1+1}^{2k+1}(1-X^2)^k X^{1-2k} = C_2^1 X = 2X$

$$P_2 = \sum_{k=0}^{E(2/2)} (-1)^k C_{2+1}^{2k+1}(1-X^2)^k X^{2-2k} = C_3^1 X^2 - C_3^3(1-X^2) = 3X^2-1+X^2 = 4X^2-1.$$

$$P_3 = \sum_{k=0}^{E(3/2)} (-1)^k C_{3+1}^{2k+1}(1-X^2)^k X^{3-2k} = C_4^1 X^3 - C_4^3(1-X^2)X = 4(X^3-X+X^3) = 8X^3-4X$$

Cl.. $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2-1$, $P_3 = 8X^3-4X$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_n(-X) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(1-(-X)^2)^k(-X)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(1-X^2)^k \underbrace{(-1)^{n-2k}}_{(-1)^n} X^{n-2k}$; par conséquent: $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Cl.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. P_n a donc la parité de n (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$(\cos t + i\sin t)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (\cos t)^{n+1-k}(i\sin t)^k = \sum_{0 \le 2k \le n+1} C_{n+1}^{2k}(\cos t)^{n+1-2k} i^{2k}(\sin t)^{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n+1} C_{n+1}^{2k+1}(\cos t)^{n+1-2k-1} i^{2k+1}(\sin t)^{2k+1}$$

Par conséquent:

$$\sin((n+1)t) = \operatorname{Im}\left(\cos((n+1)t) + i\sin((n+1)t)\right) = \operatorname{Im}\left[(\cos t + i\sin t)^{n+1}\right]$$

$$\sin((n+1)t) = \operatorname{Im}\left[\sum_{0 \le 2k \le n+1} C_{n+1}^{2k}(\cos t)^{n+1-2k}(-1)^k(\sin t)^{2k} + i\sum_{0 \le 2k+1 \le n+1} C_{n+1}^{2k+1}(\cos t)^{n-2k}(-1)^k(\sin t)^{2k+1}\right]$$

$$\sin((n+1)t) = \sum_{0 \le 2k+1 \le n+1} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(\cos t)^{n-2k}(\sin t)^{2k+1} = \left[\sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(\sin^2 t)^k(\cos t)^{n-2k}\right]\sin t$$

$$\sin((n+1)t) = \sin t \sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(1-\cos^2 t)^k(\cos t)^{n-2k} = \sin t\, P_n(\cos t).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)t) = \sin t\, P_n(\cos t)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $Q_n = (n^2+2n)P_n - 3XP_n' - (X^2-1)P_n'' = (n^2+2n)P_n - 3XP_n' + (1-X^2)P_n''$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)t) = \sin t\, P_n(\cos t)$. En dérivant il vient: $\forall t \in \mathbb{R}$, $(n+1)\cos((n+1)t) = \cos t\, P_n(\cos t) - \sin t \sin t\, P_n'(\cos t)$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $(n+1)\cos((n+1)t) = \cos t\, P_n(\cos t) - \sin^2 t\, P_n'(\cos t)$.

En dérivant une fois encore il vient:

$\forall t \in \mathbb{R}$, $-(n+1)^2\sin((n+1)t) = -\sin t\, P_n(\cos t) - \cos t \sin t\, P_n'(\cos t) - 2\sin t\cos t\, P_n'(\cos t) + \sin^3 t\, P_n''(\cos t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $-(n+1)^2 \overbrace{\sin t\, P_n(\cos t)} = \sin t\left[-P_n(\cos t) - 3\cos t\, P_n'(\cos t) + (1-\cos^2 t)P_n''(\cos t)\right]$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t\left[(n^2+2n)P_n(\cos t) - 3\cos t\, P_n'(\cos t) + (1-\cos^2 t)P_n''(\cos t)\right] = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t\, Q_n(\cos t) = 0$. En particulier $\forall t \in]0,\pi[$, $Q_n(\cos t) = 0$ ($\forall t \in]0,\pi[$, $\sin t \neq 0$).

Et par conséquent $\forall x \in]-1,1[$, $Q_n(x)=0$. Ceci donne une infinité de zéros au polynôme Q_n donc Q_n est nul.

Finalement : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ (n^2+2n)P_n - 3XP_n' - (X^2-1)P_n'' = 0}}$.

Q4 a) $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}$, $\sin((n+2)t) + \sin(nt) = 2\sin\frac{(n+2)t+nt}{2}\cos\frac{(n+2)t-nt}{2} = 2\sin((n+1)t)\cos t$

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R},\ \sin((n+2)t)+\sin(nt) = 2\cos t\sin((n+1)t)}}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $R_n = P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1}$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t) = 2\cos t\sin(nt)$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin t\, P_{n+1}(\cos t) + \sin t\, P_{n-1}(\cos t) = 2\cos t\sin t\, P_n(\cos t)$.

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin t\,[P_{n+1}(\cos t) - 2\cos t\, P_n(\cos t) + P_{n-1}(\cos t)] = 0$. $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin t\, R_n(\cos t)=0$.

En particulier : $\forall t\in]0,\pi[$, $R_n(\cos t)=0$. $\forall x\in]-1,1[$, $R_n(x)=0$

Le polynôme R_n admet une infinité de zéros. Ce polynôme est le polynôme nul.

Cl.. $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0}}$.

c) Notons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.

- C'est clair pour $n=0$ et 1 ($P_0=1$ et $P_1=2X$).
- Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et n avec $n\in\mathbb{N}^*$.

  $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ et $\deg 2XP_n = n > n-1 = \deg P_{n-1}$; par conséquent $\deg P_{n+1} = n+1$

  ceci achève la récurrence.

Cl.. $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \deg P_n = n}}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $P_{n+1} = 2XP_n + P_{n-1}$; par conséquent $a_{n+1} = 2a_n$

$(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 2$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{n-1}a_1 = 2^n$.

Comme $a_0 = 1$: $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = 2^n}}$.

__Remarque__.. On peut retrouver ces résultats en utilisant l'égalité $P_n = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(1-X^2)^k X^{n-2k}$

__Exercice__.. Le faire.

PARTIE II

Q1 Soit $P \in E$. $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$; par conséquent XP' et $(X^2-1)P''$ sont deux éléments de E. $\phi(P) = 3XP' + (X^2-1)P''$ est alors élément de E comme combinaison linéaire d'éléments de E. ϕ est donc une application de E dans E.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in E^2$.

$\phi(\lambda P+Q) = 3X(\lambda P+Q)' + (X^2-1)(\lambda P+Q)'' = 3X(\lambda P'+Q') + (X^2-1)(\lambda P''+Q'') = \lambda(3XP' + (X^2-1)P'') + 3XQ' + (X^2-1)Q''$

$\phi(\lambda P+Q) = \lambda\phi(P) + \phi(Q)$. ϕ est donc linéaire.

CL... $\underline{\underline{\phi \text{ est un endomorphisme de } E.}}$

Q2 a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $\phi(X^k) = 3Xk X^{k-1} + (X^2-1)k(k-1)X^{k-2}$ (à quelques abus près)

$$\phi(X^k) = (k^2-k+3k)X^k - k(k-1)X^{k-2} = (k^2+2k)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \phi(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ 3X & \text{si } k=1 \\ (k^2+2k)X^k - k(k-1)X^{k-2} & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

b) Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $U_k = \phi(X^k)$. $U_0 = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\deg U_k = k$.

$\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Vect}(U_0, U_1, \ldots, U_n) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

$(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,\phi$. Cette famille est aussi libre car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Finalement : $\underline{\underline{(\phi(X), \phi(X^2), \ldots, \phi(X^n)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,\phi.}}$

c) Ce qui précède montre que $\dim \mathrm{Im}\,\phi = n$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,\phi = \dim E - \dim \mathrm{Im}\,\phi = n+1-n = 1$.
$\mathrm{Ker}\,\phi$ est une droite vectorielle ... qui contient 1. Par conséquent $\mathrm{Ker}\,\phi$ est la droite vectorielle engendrée par 1.

$\underline{\underline{(1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,\phi.}}$

Q3 a) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$; $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est donc une famille libre de E.

$\dim E = n+1$ et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs.

Par conséquent : $\underline{\underline{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } E.}}$

b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $\phi(P_k) = 3XP_k' + (X^2-1)P_k'' = (k^2+2k)P_k$ d'après I Q3 b)

$\underline{\underline{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \phi(P_k) = (k^2+2k)P_k.}}$

c) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P_k \neq 0$ et $\phi(P_k) = (k^2+2k)P_k$. Donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, k^2+2k est valeur propre de ϕ.

$0^2+2\times 0$, $1^2+2\times 1$, …, $n^2+2\times n$ sont donc $n+1$ valeurs propres distinctes de ϕ.

Comme $\dim E = n+1$, $0^2+2\times 0$, $1^2+2\times 1$, …, $n^2+2\times n$ sont les valeurs propres de ϕ.

$\mathrm{Spec}\,\phi = \{k^2+2k, k \in [\![0,n]\!]\}$.

Comme ϕ a $n+1$ valeurs propres et que E est de dimension $n+1$, les sous-espaces propres de ϕ sont des droites vectorielles.

Rappelons que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi(P_k) = (k^2+2k)P_k$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, le sous-espace propre associé à la valeur propre k^2+2k est la droite vectorielle engendrée par P_k.

d) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Soit P un élément de E. Supposons $k \neq 0$

$$P \in S_k \Leftrightarrow \phi(P) = P_k = \frac{1}{k^2+2k}\phi(P_k) \Leftrightarrow \phi\left(P - \frac{1}{k^2+2k}P_k\right) = 0 \Leftrightarrow P - \frac{1}{k^2+2k}P_k \in \mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Vect}(1)$$

$$P \in S_k \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P - \frac{1}{k^2+2k}P_k = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \frac{1}{k^2+2k}P_k + \lambda$$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $S_k = \left\{\frac{1}{k^2+2k}P_k + \lambda \ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Soit $P \in S_0$. P n'est pas nul car $\phi(P) = 1$. Notons k le degré de P. $\phi(P) = 1$ donc $\deg \phi(P) = 0$: $\deg(3XP' + (X^2-1)P'') = 0$. Or $\deg(3XP'+(X^2-1)P'') \leq k$.
Par conséquent $k = 0$. P est donc constant et $\phi(P) = 0$!

Finalement $S_0 = \emptyset$.

I Etude de f. Remarque : dans la suite nous nous contenterons que : $(\sin 0)^x = \begin{cases} 1 \text{ si } x=0 \\ 0 \text{ si } x>0 \end{cases}$

Q1 Soit $x \in [0,+\infty[$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], \sin t \geq 0$; $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], (\sin t)^x \geq 0$; donc $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \geq 0$.

f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x,x') \in [0,+\infty[^2$ tel que : $x \leq x'$.

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], 0 \leq \sin t \leq 1$. $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}], (\sin t)^x \geq (\sin t)^{x'}$; $\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \geq \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x'} dt$; $f(x) \geq f(x')$

f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Q2 Soit $x \in [1,+\infty[$. Soit par prudence prenons ε dans $]0,\frac{\pi}{2}]$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^x \sin t \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ u(t)=(\sin t)^x \text{ et } v'(t)=\sin t}}{=} [(\sin t)^x (-\cos t)]_\varepsilon^{\pi/2} - \int_\varepsilon^{\pi/2} x \cos t (\sin t)^{x-1} (-\cos t) dt$$

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \cos\varepsilon (\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^{x-1} dt = \cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} (1-\sin^2 t)(\sin t)^{x-1} dt$$

Donc $$\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt = \cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^x + x\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x-1} dt - x\int_\varepsilon^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} dt \quad (*)$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} (\cos\varepsilon (\sin\varepsilon)^x) = 0$ car $x \geq 1$

Par conséquent en faisant tendre ε vers 0 dans (*) il vient : $f(x+1) = x f(x-1) - x f(x+1)$.

c'est à dire $(x+1) f(x+1) = x f(x-1)$.

Q3 a) Soit $x \in [0,+\infty[$. $g(x+1) = (x+2) f(x+2) f(x+1) \underset{Q2}{=} (x+1) f(x+1-1) f(x+1) = (x+1) f(x+1) f(x) = g(x)$.

$\forall x \in [0,+\infty[, g(x+1) = g(x)$. g est 1-périodique.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, g(x+n) = g(x)$.

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$g(x+n+1) = g((x+n)+1) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ est 1-périodique}}}{=} g(x+n) \underset{HR}{=} g(x)$. Ceci achève la récurrence.

$\forall x \in [0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, g(x+n) = g(x)$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = g(0+n) = g(0) = 1 f(1) f(0) = f(1) f(0) = \frac{\pi}{2} f(1) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2}[-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \frac{\pi}{2}$.

Q4 a) α. Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$. $g(x+n) = (x+n+1)f(x+n+1)f(x+n)$.

$n+1 \leq x+n+1 \leq n+2$ donc $f(n+1) \geq f(x+n+1) \geq f(n+2) \geq 0$

$n \leq x+n \leq n+1$ donc $f(n) \geq f(x+n) \geq f(n+1) \geq 0$

Par produit il vient : $f(n+1)f(n) \geq f(x+n+1)f(x+n) \geq f(n+1)f(n+2)$.

En multipliant par $x+n+1$ on obtient :

$$\underline{\underline{(x+n+1)f(n+1)f(n+2) \leq g(x+n) \leq (x+n+1)f(n+1)f(n)}}.$$

β. Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$

$\frac{\pi}{2} = g(n) = (n+1)f(n+1)f(n)$; $f(n+1)f(n) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n+1}$.

De même $f(n+2)f(n+1) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n+2}$.

α. donne alors : $\frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+2} \leq g(x+n) = g(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+1}$.

Par conséquent : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+1}$

γ. Soit $x \in [0,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{x+n+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x+n+1}{n+2} = \lim \frac{x+n+1}{n+1} = 1$. Donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans ce qui précède

on obtient : $\frac{\pi}{2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Par conséquent : $\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ g(x) = \frac{\pi}{2}}}$.

b) Soit $x \in [0,+\infty[$. Posons $n = E(x)$ et $y = x - E(x) = x - n$. Notons que $y \in [0,1[$

$g(x) = g(y+n) \underset{Q3\,b)}{=} g(y) \underset{\gamma.}{=} \frac{\pi}{2}$

Finalement : $\underline{\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = \frac{\pi}{2}}}$; $\underline{\forall x \in [0,+\infty[,\ (x+1)f(x+1)f(x) = \frac{\pi}{2}}$.

Q5 a) Soit $x \in [1,+\infty[$. $g(x-1) = \frac{\pi}{2}$; $x f(x) f(x-1) = \frac{\pi}{2}$.

$f(x-1) \geq f(x) \geq 0$ (Q1) ; $f(x)f(x-1) \geq (f(x))^2 \geq 0$.

Donc $\frac{\pi}{2} = x f(x) f(x-1) \geq x (f(x))^2 \geq 0$; $0 \leq (f(x))^2 \leq \frac{\pi}{2x}$; $0 \leq \sqrt{(f(x))^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

$0 \leq f(x) = |f(x)| = \sqrt{(f(x))^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

$\underline{\underline{\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}}$.   b) Par encadrement il vient alors : $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}}$.

II Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.

Q1 a) c'est presque du cours..

$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p+2} - S_{2p} = (-1)^{2p+1} f(2p+1) + (-1)^{2p+2} f(2p+2) = f(2p+2) - f(2p+1) \leq 0$; (f est décroissante)

$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p+3} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} f(2p+2) + (-1)^{2p+3} f(2p+3) = f(2p+2) - f(2p+3) \geq 0$;

$(S_{2p})_{p\geq 0}$ est donc décroissante et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante.

$\lim\limits_{p\to+\infty} (S_{2p+1} - S_{2p}) = \lim\limits_{p\to+\infty} \left((-1)^{2p+1} f(2p+1)\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Les suites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont donc adjacentes.

b) $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont alors convergentes et ont même limite ; par conséquent la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, ce qui signifie que la série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge.

Q2 a) $$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin t} \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\pi/2}^0 \frac{-du}{1+\sin(\frac{\pi}{2}-u)} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2 \frac{u}{2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2 \frac{u}{2}}.$$

b) $$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2 \frac{u}{2}} = \left[\tan \frac{u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1. \qquad \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = 1.$$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $$D_n \underset{\text{d'où !}}{=} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\sin t)^k\right] dt = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1+\sin t} - \frac{1-(-1)^{n+1}(\sin t)^{n+1}}{1-(-\sin t)}\right] dt$$

$$D_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^{n+1}(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt. \qquad D_n = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt.$$

b) $$|D_n| = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt\right| = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^{n+1}}{1+\sin t}\,dt \underset{1+\sin t\geq 1}{\leq} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1}\,dt = f(n+1).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$; par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt - S_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,dt = 1$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n) = 1.$