Q1 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\varphi_x : t \mapsto e^{-x\sin t}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt$ a un sens ; par conséquent $F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x\sin t}\,dt$.

<u>$F(x)$ existe pour tout réel x positif</u> (... et même pour tout réel x).

b) Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que $x \leq x'$.

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x\sin t \leq x'\sin t$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $-x'\sin t \leq -x\sin t$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $e^{-x'\sin t} \leq e^{-x\sin t}$. Ainsi $\int_0^{\pi/2} e^{-x'\sin t}\,dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt$ car $0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Ceci donne alors clairement $F(x') \leq F(x)$.

Donc $\forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^2$, $x \leq x' \Rightarrow F(x') \leq F(x)$. <u>$F$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $0 \leq x$ donc $F(0) \geq F(x)$. Or $F(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Par conséquent $F(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $e^{-x\sin t} \geq 0$; en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ il vient alors $\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt \geq 0$ et donc $F(x) \geq 0$.

<u>$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq F(x) \leq \pi/4$.</u>

Q2 a) <u>Version 1</u>.. Posons $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(t) = \sin t$

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g'(t) = \cos t$ et $g''(t) = -\sin t \leq 0$.

Ainsi g est concave et sa courbe représentative est "au-dessus de ses cordes".

La corde qui passe par les points de la représentation graphique de g d'abscisses 0 et $\pi/2$ est contenue dans la droite d'équation $y = \frac{\sin \pi/2 - \sin 0}{\pi/2 - 0}x = \frac{2}{\pi}x$

donc $\forall x \in [0, \pi/2]$, $g(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

Finalement : <u>$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t$.</u>

<u>Version 2</u>.. Posons $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\psi(t) = \sin t - \frac{2}{\pi}t$

ψ est dérivable sur $[0, \pi/2]$ et $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\psi'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$

$\frac{2}{\pi} \in]0, 1[$ et $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$. Soit α l'unique élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\alpha = \frac{2}{\pi}$ ($\alpha = \mathrm{Arc}\cos\frac{2}{\pi}$). $\forall t \in [0, \alpha]$, $\psi'(t) \geq 0$ et $\forall t \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$, $\psi'(t) \leq 0$

t	0		$\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}$		$\pi/2$
$\psi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\psi(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

ψ est croissante sur $[0,\alpha]$ et $\psi(0)=0$ donc $\forall t\in[0,\alpha],\ \psi(t)\geqslant 0$.

ψ est décroissante sur $[\alpha,\frac{\pi}{2}]$ et $\psi(\frac{\pi}{2})=0$ donc $\forall t\in[\alpha,\frac{\pi}{2}],\ \psi(t)\geqslant 0$.

Finalement : $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \psi(t)\geqslant 0$. $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t\leqslant \sin t$.

<u>Remarque</u> .. Bien retenir la version 1.

<u>b)</u> Soit x un réel strictement positif.

$\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\quad \frac{2}{\pi}t\leqslant \sin t$. $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ -\frac{2}{\pi}tx\geqslant -x\sin t$

$\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\quad e^{-\frac{2x}{\pi}t}\geqslant e^{-x\sin t}$

Par conséquent il vient par intégration $(0\leqslant\frac{\pi}{2})$, $\quad F(x)\leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2x}{\pi}t}\,dt=\frac{1}{2}\left[\dfrac{e^{-\frac{2x}{\pi}t}}{-\frac{2x}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$F(x)\leqslant -\frac{\pi}{4x}(e^{-x}-1)=\frac{\pi}{4x}(1-e^{-x})$.

$$\underline{\underline{\forall x\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant F(x)\leqslant \frac{\pi}{4x}(1-e^{-x}).}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1$. Par encadrement on obtient alors $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0}}$.

Q3) <u>a)</u> Posons $\forall t\in[0,+\infty[,\ \ell(t)=e^{-t}$

ℓ est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ (?!!) et

$\forall t\in]0,+\infty[,\quad |\ell'(t)|=|-e^{-t}|=e^{-t}\leqslant 1$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : $\forall(a,b)\in[0,+\infty[^2,\ |\ell(a)-\ell(b)|\leqslant 1|a-b|$.

Donc $\underline{\underline{\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^2,\ |e^{-a}-e^{-b}|\leqslant|a-b|.}}$

<u>b)</u> Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2$.

$\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ x_1\sin t\geqslant 0$ et $x_2\sin t\geqslant 0$, donc $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ |e^{-x_1\sin t}-e^{-x_2\sin t}|\leqslant|x_1\sin t-x_2\sin t|$

Par conséquent $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ |e^{-x_1\sin t}-e^{-x_2\sin t}|\leqslant|x_1-x_2||\sin t|=|x_1-x_2|\sin t$

$|F(x_1)-F(x_2)|=\frac{1}{2}\left|\int_0^{\pi/2}(e^{-x_1\sin t}-e^{-x_2\sin t})\,dt\right|\underset{0\leqslant\frac{\pi}{2}}{\leqslant}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}|e^{-x_1\sin t}-e^{-x_2\sin t}|\,dt$

$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}|x_1-x_2|\sin t\,dt=\frac{|x_1-x_2|}{2}\underbrace{[-\cos t]_0^{\pi/2}}_{=1}=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$.

$$\underline{\underline{\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2,\ |F(x_1)-F(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|.}}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|F(x)-F(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x-x_0|$.

$\lim\limits_{x\mapsto x_0} \left(\frac{1}{2}|x-x_0|\right)=0$ donc par encadrement : $\lim\limits_{x\mapsto x_0} |F(x)-F(x_0)|=0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\mapsto x_0} F(x) = F(x_0)$. F est continue en x_0.

F est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q4 a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. $t \mapsto e^{-x_0 \sin t}\sin t$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\int_0^{\pi/2} e^{-x_0\sin t}\sin t\,dt$ existe ... $H(x_0)$ aussi.

b) Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ell(x) = e^{-x}$.

ℓ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ell'(x) = -e^{-x}$ et $\ell''(x) = e^{-x}$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à ℓ à l'ordre 1 donne :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $|\ell(a) - \ell(b) - (a-b)\ell'(b)| \leq \frac{|a-b|^2}{2!} \max\limits_{t\in[a,b]} |\ell''(t)|$.

Par conséquent : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $|e^{-a} - e^{-b} - (a-b)(-e^{-b})| \leq \frac{|a-b|^2}{2} \max\limits_{t\in[a,b]} |e^{-t}| \leq \frac{|a-b|^2}{2}$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-t}| = e^{-t} \leq 1$.

donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $|e^{-a} - e^{-b} + (a-b)e^{-b}| \leq \frac{|a-b|^2}{2}$.

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ et soit $x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\}$.

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-x_0\sin t} + \frac{1}{2}(x-x_0)\int_0^{\pi/2} e^{-x_0\sin t}\sin t\,dt\right]$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-x_0}\int_0^{\pi/2}\left[e^{-x\sin t} - e^{-x_0\sin t} + (x-x_0)\sin t\, e^{-x_0\sin t}\right]dt$$

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x\sin t \geq 0$ et $x_0 \sin t \geq 0$ par conséquent d'après b) :

$\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $|e^{-x\sin t} - e^{-x_0\sin t} + (x\sin t - x_0\sin t)e^{-x_0\sin t}| \leq \frac{|x\sin t - x_0\sin t|^2}{2} = \frac{|x-x_0|^2}{2}\sin^2 t$

En intégrant il vient :

$$\left|\int_0^{\pi/2}\left[e^{-x\sin t} - e^{-x_0\sin t} + (x\sin t - x_0\sin t)e^{-x_0\sin t}\right]dt\right| \leq \int_0^{\pi/2}\left|e^{-x\sin t} - e^{-x_0\sin t} + (x\sin t - x_0\sin t)e^{-x_0\sin t}\right|dt \leq \frac{|x-x_0|^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt$$

donc $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{|x-x_0|}\,\frac{|x-x_0|^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{|x-x_0|}{8}\underbrace{\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}}_{\pi/2}$

Ainsi $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0)\right| \leq \frac{\pi}{16}|x-x_0| \overset{!}{\leq} \frac{\pi}{8}|x-x_0|$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\}, \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0) \right| \leq \frac{\pi}{8} |x-x_0|.$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\}, \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0) \right| \leq \frac{\pi}{8} |x-x_0|.$

$\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{\pi}{8}|x-x_0| = 0$ donc par encadrement il vient : $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - H(x_0) \right) = 0$

donc $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = H(x_0)$. Ainsi 1) F est dérivable en x_0

2) $F'(x_0) = H(x_0)$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt.$

<u>Remarque</u>.. Formellement $\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt \right)' = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(e^{-x \sin t} \right)' dt$

Nous avons fait une dérivation sous le signe somme.

Tout cela est à savoir faire par cœur.

DEUXIÈME PROBLÈME

I Étude de la suite de terme général $\Pi_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n}$.

Stirling donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ donc $\Pi_n = \frac{n^n}{n!}e^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$; $\lim_{n\to+\infty} \Pi_n = 0$ ce qui achève la partie I !

(Q1) a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Par conséquent : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$.

$v_n = n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \sim n\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \sim -\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$.

Posons $\alpha = -1/2$. α est strictement négatif et $v_n \sim \frac{\alpha}{n}$.

b) $-v_n \sim -\frac{\alpha}{n}$ et la série de terme général $-\frac{\alpha}{n}$ est divergente et à termes positifs ; les règles de comparaison des séries à termes positifs indiquent que la série de terme général $-v_n$ est divergente, étant à termes positifs la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$; donc $\lim_{n\to+\infty}(-v_1-v_2-\dots-v_n) = +\infty$.
En multipliant par -1 on obtient :

1°. La série de terme général v_n diverge

2°. $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}(v_1+v_2+\dots+v_n) = -\infty$.

(Q2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\frac{\Pi_{n+1}}{\Pi_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-(n+1)} \times \frac{n!}{n^n e^{-n}} = e^{-1}\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{(n+1)\times n!}{(n+1)!}$

$\ln\frac{\Pi_{n+1}}{\Pi_n} = \ln\left(e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = -1 + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = v_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln\frac{\Pi_{n+1}}{\Pi_n}$.

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\ln \Pi_n = \ln\Pi_n - \ln\Pi_1 + \ln\Pi_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(\ln\Pi_{k+1} - \ln\Pi_k) + \ln e^{-1}$

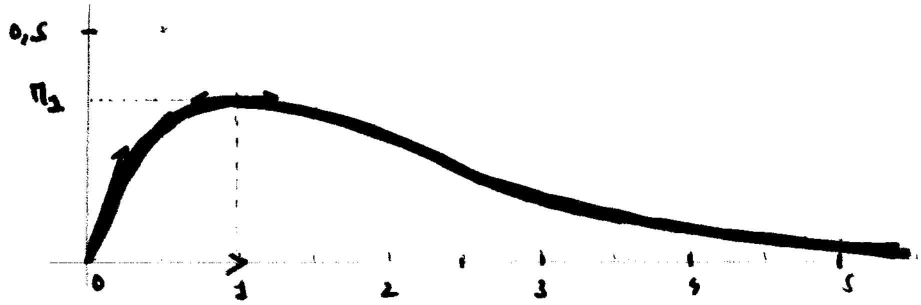
$\ln\Pi_n = \sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{\Pi_{k+1}}{\Pi_k} - 1 = V_{n-1} - 1$; $\lim_{n\to+\infty}\ln\Pi_n = -\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\Pi_n = 0$

II Etude d'une famille de fonctions

Q1 f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_1'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$, $f_1(0)=0$, $f_1(1)=e^{-1}=M_1$, $f_1'(0)=1$ et $f_1'(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n'(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{n!}e^{-x}-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}=\dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$, $f_n(0)=0$, $f_n(n)=M_n$, $f_n'(0)=0$ et $f_n'(n)=0$

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

même type de graphe que pour f_1 mais avec une tangente horizontale en 0.

Remarque.. si $n=1$ il y a un point d'inflexion et un seul : le point d'abscisse 2 (!)
si $n\geq 2$ il y a deux points d'inflexion ; les points d'abscisses $n-\sqrt{n}$ et $n+\sqrt{n}$.

Dans les deux cas, f_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$, donc $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)\leq f_n(n)=M_n$.

$M_n=\max\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x)$, a fortiori : $M_n=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x)$.

Q2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in\mathbb{R}_+$

$$F_{n+1}(x)=\int_0^x f_{n+1}(t)\,dt=\int_0^x \underset{u}{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}}\underset{v'}{e^{-t}}\,dt \overset{I.P.P.}{=} \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x\frac{(n+1)t^n}{(n+1)!}(-e^{-t})\,dt$$

$$F_{n+1}(x)=-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}+\int_0^x\frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F_{n+1}(x)=F_n(x)-f_{n+1}(x)$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!}$

→ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_1(x) = \int_0^x \underbrace{t e^{-t}}_{u v'} dt = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt = -xe^{-x} - [e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_1(x) = 1 - e^{-x}(1+x) = 1 - e^{-x} \sum_{\ell=0}^{1} \frac{x^\ell}{\ell!}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_{n+1}(x) = F_n(x) - f_{n+1}(x) = 1 - e^{-x} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

b) V1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 & (\text{ou si } x \leq 0) \\ f_n(x) \text{ si } x \geq 0 & (\text{ou si } x > 0) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x} = \frac{e^{-\frac{x}{1}} x^{(n+1)-1}}{1^{n+1} \Gamma(n+1)}$.

h_n est alors une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre 1 et $n+1$.

Par conséquent $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} h_n(t) dt$; $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$!

V2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!}\right) = 1$

Par conséquent : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \lim_{x \to +\infty} F_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^\ell}{\ell!}\right) = 1$

donc $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1.

III Etude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = F_{n+1}(n+1) - F_n(n) = F_{n+1}(n+1) - F_{n+1}(n) + F_{n+1}(n) - F_n(n)$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt + \underbrace{F_{n+1}(n) - F_n(n)}_{\text{II.2a}} = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt - f_{n+1}(n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt - f_{n+1}(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après II.1, f_{n+1} est croissante sur $[0, n+1]$.

Donc $\forall t \in [n, n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$; par intégration on obtient : $\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)\,dt \geq f_{n+1}(n)$;

ceci donne $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n f_n(t)\,dt \leq \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$$

f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 1. $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc convergente et sa limite L est majorée par 1.

$(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $u_1 = F_1(1) = 1 - e^{-1} \sum_{k=0}^{1} \frac{1^k}{k!} = 1 - \frac{2}{e} > 0$

Donc $L \geq u_1 > 0$

Finalement $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel L qui vérifie $0 < L \leq 1$ ... et même $1 - \frac{2}{e} \leq L \leq 1$

Q2

$$u_2 = 1 - e^{-2} \sum_{k=0}^{2} \frac{2^k}{k!} = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2}\right) = 1 - \frac{5}{e^2} \simeq 0{,}323\,323\,58$$

Donc $u_2 \geq 0{,}3$. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante : $0{,}3 \leq L < 1$.

Q3 a) h est dérivable sur $[0,1]$. $\forall t \in [0,1]$, $h'(t) = \frac{2 - t - t(-1)}{(2-t)^2} e^{2-2t} + \frac{t}{2-t}(-2e^{2-2t})$.

$$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = e^{2-2t}\left(\frac{2 - 2t(2-t)}{(2-t)^2}\right) = e^{2-2t} \times \frac{2(t-1)^2}{(2-t)^2} \geq 0.$$ h est croissante sur $[0,1]$.

$\forall t \in [0,1]$, $0 = h(0) \leq h(t) \leq h(1) = 1$. $\forall t \in [0,1],\ 0 \leq h(t) \leq 1$.

b) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,n]$. $2n-x\neq 0$ donc :

$$\frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)}=\frac{x^n}{n!}e^{-x}\cdot\frac{n!}{(2n-x)^n}\,\frac{1}{e^{-(2n-x)}}=\left(\frac{x}{2n-x}\,e^{(2n-2x)/n}\right)^n=\left(\frac{\frac{x}{n}}{2-\frac{x}{n}}\,e^{2-2\frac{x}{n}}\right)^n$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,n]$, $\dfrac{f_n(x)}{f_n(2n-x)}=\left(h\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.

c) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,n]$. $\frac{x}{n}\in[0,1]$ donc $0\leq h\left(\frac{x}{n}\right)\leq 1$; $0\leq\left(h\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n\leq 1$.

Par conséquent $0\leq\dfrac{f_n(x)}{f_n(2n-x)}\leq 1$. Comme $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, f_n(t)>0$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+, f_n(t)\geq 0$

on a : $0\leq f_n(x)\leq f_n(2n-x)$. $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,n], 0\leq f_n(x)\leq f_n(2n-x).}}$

d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$u_n=\int_0^n f_n(t)\,dt\overset{c)}{\leq}\int_0^n f_n(2n-t)\,dt\underset{u=2n-t}{=}\int_{2n}^n f_n(u)(-du)=\int_n^{2n} f_n(u)\,du\leq\int_n^{+\infty} f_n(u)\,du=\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

f_n est positive sur $[n,+\infty[$ et $\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge

donc $\underline{\underline{u_n\leq\int_0^n f_n(2n-t)\,dt\leq\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*.}}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt=\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt-\int_0^n f_n(t)\,dt=1-u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq\frac{1}{2}$.

En passant à la limite : $\underline{\underline{L\leq\frac{1}{2}.}}$

IV Détermination de la limite de la suite (U_n) par un raisonnement probabiliste

Q1 $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $X_k\hookrightarrow\mathcal{P}(1)$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $E(X_k)=1$.

Par linéarité $E(Y_n)=\sum_{k=1}^n E(X_k)=n$. $\underline{\underline{E(Y_n)=n.}}$

Q2 $p(Y_n\leq n)=\sum_{k=0}^n p(Y_n=k)\underset{Y_n\hookrightarrow\mathcal{P}(n)}{=}\sum_{k=0}^n\frac{n^k}{n!}e^{-n}=1-F_n(n)$. $\underline{\underline{p(Y_n\leq n)=1-F_n(n).}}$

(Q3) Réécrivons le texte en supposant que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$ et $E(Y_n) = n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(Y_n \leq n) = 1 - F_n(n)$

Le théorème de la limite centrée indique que la suite de terme général

$Y_n^* = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} = \dfrac{Y_n - n}{\sigma(Y_n)}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit

une loi normale centrée réduite. Notons ϕ la fonction de répartition de X.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \mapsto +\infty} p(Y_n^* \leq x) = \phi(x)$. En particulier : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} p(Y_n^* \leq 0) = \phi(0) = \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{1}{2} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} p(Y_n^* \leq 0) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} p\left(\dfrac{Y_n - n}{\sigma(Y_n)} \leq 0\right) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} p(Y_n \leq n) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(1 - F_n(n)\right) = 1 - L$

Donc : $\underline{\underline{L = 1/2}}$.