PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

Dans toute la suite nous nous autoriserons à noter E_k l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à k, et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$...

Q1 **a)** Montrons tout d'abord que si Q est un élément de E : $\lim_{t\to+\infty}\left(Q(t)\,e^{-t}\right) = 0$. Si $Q = O_E$ ceci est une évidence. Supposons dès lors que Q est un élément non nul de E et considérons son terme de plus haut degré a_pX^p. Nous avons alors $Q(t)\,e^{-t} \sim a_p\,t^p\,e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$ et par croissance comparée $\lim_{t\to+\infty}\left(a_p\,t^p\,e^{-t}\right) = 0$; le résultat s'en déduit sans problème.

Ainsi $\boxed{\text{si } Q \text{ est un élément de } E : \lim_{t\to+\infty}\left(Q(t)\ e^{-t}\right) = 0}$.

Soit P un élément de E. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. $u : t \to P(t)\,e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur cet intervalle.

Comme X^2P est un élément de E, d'après ce qui précède $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\,P(t)\,e^{-t}\right) = 0$ ou $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\,u(t)\right) = 0$.

Il existe donc un réel A, strictement positif, tel que pour tout élément t de $[A, +\infty[: |t^2\,u(t)| \leqslant 1$.

On a alors pour tout élément t de $[A, +\infty[: 0 \leqslant |u(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_A^{+\infty} |u(t)|\,\mathrm{d}t$ donc l'absolue convergence de $\int_A^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi sa convergence.

Comme $\int_0^A u(t)\,\mathrm{d}t$ existe : $\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout élément } P \text{ de } E,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

b) Cela peut se faire de manière immédiate en utilisant la partie du programme concernant la fonction Γ. En effet pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $I_{k+1} = \Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)I_k$ et $I_k = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$.
Suivons la logique du texte et retrouvons ces deux résultats. La question précédente montre que I_k existe pour tout élément k de $\mathbb{N}$ ($t \to t^k$ appartient à E).
Fixons k dans $\mathbb{N}$. Soit A un élément de $]0, +\infty[$. Une intégration par parties élémentaire donne :

$$\int_0^A t^{k+1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = [t^{k+1}(-e^{-t})]_0^A - \int_0^A (k+1)t^k(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = -A^{k+1}\,e^{-A} + (k+1)\int_0^A t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim_{A\to+\infty}\left(A^{k+1}\,e^{-A}\right) = 0$ il vient en faisant tendre A vers $+\infty$: $I_{k+1} = (k+1)I_k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $\dfrac{I_{k+1}}{(k+1)!} = \dfrac{(k+1)I_k}{(k+1)!} = \dfrac{I_k}{k!}$. La suite $(I_k/k!)_{k\geqslant 0}$ est donc constante.

De plus son premier terme est $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}(-e^{-A}+1) = 1$. Par conséquent, pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $\dfrac{I_k}{k!} = 1$ ou $I_k = k!$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ I_{k+1} = (k+1)I_k \text{ et } I_k = k!}$.

Q2 **a)** Remarquons pour commencer que si P et Q sont deux éléments de E_n leur produit est un élément de E ; ainsi, d'après la première question, $\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. $< .,. >$ est bien alors une application de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'il sagit d'un produit scalaire.

- Si P et Q sont deux éléments de E_n, $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)\, P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t =< Q, P >$.
  $< .,. >$ est symétrique.

- Soient P, Q, R trois éléments de E_n et λ un réel.

  $< \lambda P + Q, R >= \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)\, R(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ (car toutes les intégrales convergent).

  Donc $< \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

- Soit P un élément de E_n. $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et $t \to \big(P(t)\big)^2 e^{-t}$ est une fonction positive ou nulle sur $[0 + \infty[$ donc $< P, P >$ est positif ou nul.

  Supposons que $< P, P >= 0$. Fixons un élément B dans $\mathbb{R}^{+*}$. $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{B} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 0$

  Ceci donne alors : $\displaystyle\int_0^{B} \big(P(t)\big)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t = 0$. Ainsi la fonction $t \to \big(P(t)\big)^2 e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, B]$. Cette fonction est donc nulle sur $[0, B]$ et nécessairement : $\forall t \in [0, B],\ P(t) = 0$. La fonction polynôme P a alors une infinité de racines ; c'est donc la fonction nulle. Ainsi $< P, P >= 0$ donne $P = 0_{E_n}$.

  $< .,. >$ est définie positive.

Les trois points précédents suffisent pour dire que $\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E_n}$.

Remarques 1. Dans la suite nous noterons $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. En posant : $\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ on obtient un produit scalaire sur E.

3. On peut, de la même manière, définir encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel (à démontrer...) des fonctions numériques f, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\ e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Soient i et j deux éléments de $[\![0, n]\!]$. $< X^i, X^j >= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i\, t^j\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = I_{i+j} = (i + j)!$.

$\boxed{\text{Si } i \text{ et } j \text{ sont deux éléments de } [\![0, n]\!] : < X^i, X^j >= (i + j)!}$.

Q3 **a)** • La seule fonction polynôme unitaire de degré 0 est X^0, il est donc raisonnable de poser $Q_0 = X^0 = 1$.

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 1. Il existe un réel a tel que : $P = X + a$.
$< P, Q_0 >=< X + a, 1 >=< X^1, X^0 > + a < X^0, X^0 >= (1 + 0)! + a(0 + 0)! = 1 + a$. P est donc orthogonale à Q_0 si et seulement si $a = -1$. En posant : $Q_1 = X - 1$, nous obtenons une fonction polynôme unitaire de degré 1 orthogonale à Q_0.

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ ((Q_0, Q_1) est clairement une base de E_1). Cherchons alors b et c pour que P soit orthogonale à Q_0 et Q_1. Rappelons que Q_0 et Q_1 sont othogonaux !
$< P, Q_0 >=< X^2, Q_0 > + b < Q_1, Q_0 > + c < Q_0, Q_0 >=< X^2, X^0 > + c < X^0, X^0 >= (2 + 0)! + c(0 + 0)! = 2 + c$.

$< P, Q_1 >=< X^2, Q_1 > + b < Q_1, Q_1 > + c < Q_0, Q_1 >=< X^2, X - 1 > + b < X - 1, X - 1 >$.
$< P, Q_1 >=< X^2, X > - < X^2, X^0 > + b(< X, X > - 2 < X, X^0 > + < X^0, X^0 >)$.
$< P, Q_1 >= (2 + 1)! - (2 + 0)! + b\big((1 + 1)! - 2(1 + 0)! + (0 + 0)!\big) = 4 + b$.

Ainsi $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ est orthogonale à Q_0 et Q_1 si et seulement si $c = -2$ et $b = -4$. Il est alors grand temps de poser $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 = X^2 - 4(X - 1) - 2 = X^2 - 4X + 2$. Q_2 est une fonction polynôme unitaire de degré 2 orthogonale à Q_0 et Q_1.

$\boxed{(Q_0, Q_1, Q_2) = (1, X - 1, X^2 - 4X + 2) \text{ est une famille orthogonale de fonctions polynômes telle que pour tout } k \text{ dans } [\![0, 2]\!],\ Q_k \text{ soit unitaire et de degré } k.}$

Remarques 1. Notons que non seulement nous avons trouvé une famille (Q_0, Q_1, Q_2) solution du problème posé mais nous avons également montré l'unicité de cette famille.
2. D'ailleurs il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ de fonctions polynômes, et une seule, telle que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, Q_k soit unitaire et de degré k (polynômes de Laguerre).
$Q_0 = 1$ et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, Q_k est l'unique fonction polynôme unitaire appartenant à la droite vectorielle constituée par l'orthogonale de E_{k-1} dans E_k. Nous en reparlerons dans la partie II...
A titre d'exercice on pourra montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_k(x) = (-1)^k\, e^x\, \frac{d^k}{dx^k}\big(x^k\, e^{-x}\big) \quad \text{et} \quad \|Q_k\| = k!$$

Voir, à ce sujet, les parties I et II du problème d'Edhec 98.

b) Soit u et v deux réels. Posons dès maintenant $H(u, v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

$H(u, v) = \|X^2 + uX + v\|^2 = \|X^2 - 4X + 2 + (u+4)(X-1) + u + v + 2\|^2 = \|Q_2 + (u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2$.
$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2$ car Q_2 et $(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.
$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1\|^2 + \|(u+v+2)Q_0\|^2$ car $(u+4)Q_1$ et $(u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.
$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2$.

$$\boxed{\text{On a donc } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2.}$$

c) Notons que si u et v sont deux réels : $(u+4)^2$ et $(u+v+2)^2$ sont simultanément nuls si et seulement si $u = -4$ et $v = 2$.
Ainsi : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ H(u, v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2 \geqslant \|Q_2\|^2 = H(-4, 2)$. Donc $\|Q_2\|^2$ est le minimum de H. Rappelons que $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0$.
$\|Q_2\|^2 =< Q_2, Q_2 >=< Q_2, X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 >=< Q_2, X^2 > -4 < Q_2, Q_1 > -2 < Q_2, Q_0 >=< Q_2, X^2 >$.
$\|Q_2\|^2 =< X^2 - 4X + 2, X^2 >=< X^2, X^2 > -4 < X, X^2 > +2 < 1, X^2 >= 4! - 4 \times 3! + 2 \times 2! = 4$.

$$\boxed{H \text{ admet un minimum qui vaut 4 et qui est atteint en } (-4, 2).}$$

Remarques 1. Notons que H atteint son minimum en le seul point $(-4, 2)$.
2. Le cours permet facilement de traiter le problème précédent sans utiliser les indications du texte. En effet :

$$\underset{(u,v)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} H(u, v) = \underset{(u,v)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|X^2 + uX + v\|^2 = \underset{(u',v')\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|X^2 - (u'X + v')\|^2 = \underset{P\in E_1}{\text{Min}} \|X^2 - P\|^2$$

Tout est clair, $\underset{P\in E_1}{\text{Min}} \|X^2 - P\|^2$ existe et vaut $\|X^2 - S\|^2$ où S est la projection orthogonale de X^2 sur E_1. On montre alors sans problème que $S = 4Q_1 + 2Q_0 = 4X - 2$ et que $\|X^2 - S\|^2 = 4$.
3. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ H(u, v) = 2u^2 + v^2 + 2uv + 12u + 4v + 24$. On peut donc encore retrouver le résultat de c) en utilisant le cours sur les fonctions numériques de plusieurs variables.
4. Retenons encore que le c) nous apprend que Q_2 est la fonction polynôme unitaire de degré 2 de norme (au carré) minimum. En fait ceci caractérise Q_2.
Plus généralement si nous revenons à la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ évoquée dans la remarque 2 de Q3 a), Q_k est La fonction polynôme unitaire de degré k de norme minimum.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Q1 Soit P un élément de E_n. P'' (resp. P') est une fonction polynôme de degré au plus $n-2$ (resp. au plus $n-1$) donc XP'' (resp. $(1-X)P'$) est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ (resp. au plus n). Ainsi XP'' et $(1-X)P'$ sont deux éléments de E_n et donc $XP'' + (1-X)P'$ aussi.
Φ est une application de E_n dans E_n.

Soient P et Q deux éléments de E_n et λ un réel.
$\Phi(\lambda P+Q)=X(\lambda P+Q)''(X)+(1-X)(\lambda P+Q)'(X)=X\big(\lambda P''(X)+Q''(X)\big)+(1-X)\big(\lambda P'(X)+Q'(X)\big)$.
$\Phi(\lambda P+Q)=\lambda\big(XP''(X)+(1-X)P'(X)\big)+\big(XQ''(X)+(1-X)Q'(X)\big)=\lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$.
<u>Φ est linéaire</u>. $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_n}$.

$\Phi(X^0)=0_{E_n}$. $\Phi(X^1)=1-X$. Si k est un élément de $[\![2,n]\!]$, $\Phi(X^k)=Xk(k-1)X^{k-2}+(1-X)kX^{k-1}=k^2X^{k-1}-kX^k$.

Ceci donne encore : $\boxed{\Phi(X^0)=O_{E_n} \text{ et pour tout élément } k \text{ de } [\![1,n]\!] : \Phi(X^k)=k^2X^{k-1}-kX^k}$.

Par conséquent la matrice de Φ dans la base canonique $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ de E_n est :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n\end{pmatrix}$$

Q2 Commençons par remarquer que le premier point de a) est franchement inutile car la matrice M est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres, ainsi que celles de Φ, sont les éléments de sa diagonale c'est à dire : 0, -1, -2, ..., -n. Mais pourquoi faire simple ...
a) Fixons k dans $[\![0,n]\!]$ et notons Φ_k l'endomorphisme $\Phi+kId_{E_n}$ de E_n.
Si $k=0$, la famille $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k}=\big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est réduite au vecteur nul donc elle est liée.
Supposons alors k non nul.
Si $j=0$: $\Phi_k(X^j)=kX^0$ est un élément de E_{k-1}.
Si j est dans $[\![1,k-1]\!]$, $\Phi_k(X^j)=\Phi(X^j)+kX^j=j^2X^{j-1}+(k-j)X^j$ est encore un élément de E_{k-1}.
Si $j=k$, $\Phi_k(X^j)=k^2X^{k-1}$ est toujours un élément de E_{k-1}.
Ainsi $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k}=\big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est une famille de $k+1$ éléments de E_{k-1} qui est un espace vectoriel de dimension k. Cette famille est donc nécessairement liée.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ \big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k} \text{ est une famille liée de } E_n}$.

Reprenons k dans $[\![0,n]\!]$. $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k}=\big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est une famille liée donc on peut trouver $k+1$ réels a_0, a_1, ..., a_k, <u>non tous nuls</u>, tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}a_j\Phi_k(X^j)=0_{E_n}$ ou tel que $\displaystyle\Phi_k\Big(\sum_{j=0}^{k}a_jX^j\Big)=0_{E_n}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}a_jX^j$ est un élément <u>non nul</u> du noyau de $\Phi_k=\Phi-(-k)Id_{E_n}$. Ce noyau n'étant pas réduit au vecteur nul, $-k$ est valeur propre de Φ.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ -k \text{ est valeur propre de } \Phi}$.

b) Φ admet au moins $n+1$ valeurs propres distinctes -1, -2, ...,$-n$. Comme c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel E_n qui est de dimension $n+1$, Φ admet exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et donc $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable}}$.

c) D'après ce qui précède, Φ admet $n+1$ sous-espaces propres distincts dont la somme des dimensions est $n+1$. Dans ces conditions chacun de ces sous-espaces propres ne peut donc être que de dimension 1.
Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$ et S_k un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$. S_k engendre le sous-espace propre $SEP(\Phi,-k)$ correspondant. Montrons alors l'existence et l'unicité de P_k et pour cela commençons par noter α_pX^p le terme de plus haut degré de S_k.
<u>Unicité</u> Supposons que P_k existe. P_k est un élément de $SEP(\Phi,-k)=\text{Vect}(S_k)$, donc il existe un réel λ tel que $P_k=\lambda S_k$.
Comme P_k est unitaire : $1=\lambda\alpha_p$ et ainsi $P_k=(1/\alpha_p)S_k$. D'où l'unicité de P_k.
<u>Existence</u>. Posons $P_k=(1/\alpha_p)S_k$. P_k est un élément de $\text{Vect}(S_k)=SEP(\Phi,-k)$ donc vérifie $\Phi(P_k)=-kP_k$; de plus son terme de plus haut degré est : $(1/\alpha_p)\alpha_pX^p=X^p$. Ainsi P_k est unitaire.

$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![0,n]\!], \text{ il existe une unique fonction polynôme unitaire } P_k \text{ vérifiant } \Phi(P_k) = -kP_k}$.

d) Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Notons p le degré de P_k. Le coefficient de X^p dans $-kP_k$ est $-k$. Le coefficient de X^p dans $\Phi(P_k) = XP_k'' + (1-X)P_k'$ est $-p$ (c'est en fait le coefficient de X^p dans $-XP_k'$). Comme $\Phi(P_k) = -kP_k$ on obtient : $-p = -k$ et donc $p = k$!

$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![0,n]\!], P_k \text{ est de degré } k}$.

e) $Q_0 = 1$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_0) = 0 = -(0)Q_0$ donc $\boxed{Q_0 = P_0}$.

Q_1 est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_1) = \Phi(X-1) = X0_{E_n} + (1-X)\times 1 = (-1)Q_1$ donc $\boxed{Q_1 = P_1}$.

$Q_2 = X^2 - 4X + 2$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_2) = \Phi(X^2 - 4X + 2) = X \times 2 + (1-X)(2X-4) = -2X^2 + 8X - 4 = -2Q_2$ donc $\boxed{Q_2 = P_2}$.

Q3 a) Soient P et Q deux éléments de E_n.
Posons pour tout élément t de $[0,+\infty[$, $v(t) = t\,P'(t)\,e^{-t}$. v est dérivable et, pour tout élément t de $[0,+\infty[$: $v'(t) = \big[P'(t) + tP''(t) + tP'(t)(-1)\big]e^{-t} = \big[tP''(t) + (1-t)P'(t)\big]e^{-t} = \Phi(P)(t)\,e^{-t}$. v' étant continue sur $[0,+\infty[$, v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Q est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Dès lors fixons A dans $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrons par parties.

$$\int_0^A \Phi(P)(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^A v'(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = [v(t)\,Q(t)]_0^A - \int_0^A v(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \Phi(P)(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = v(A)\,Q(A) - v(0)\,Q(0) - \int_0^A tP'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons alors que :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(P)(t)\,Q(t)\;e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $< \Phi(P), Q >$;
- $v(0)Q(0) = 0$ car $v(0) = 0$;
- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(v(t)Q(t)\big) = \lim_{A\to+\infty} \big(tP'(t)Q(t)\;e^{-t}\big) = 0$ car XP'Q est un élément de E.

En faisant tendre A vers $+\infty$ l'intégration par parties précédente fournit :

$$\boxed{< \Phi(P), Q >= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\;e^{-t}\,\mathrm{d}t}.$$

b) Soit P et Q deux éléments de E_n.

$$< \Phi(P), Q >= -\int_0^{+\infty} tP'(t)\,Q'(t)\;e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)\;e^{-t}\,\mathrm{d}t =< \Phi(Q), P >=< P, \Phi(Q) >.$$

$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E_n}$.

c) Φ est un endomorphisme symétrique de E_n donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Ainsi $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale de E_n ; les vecteurs de cette famille orthogonale étant non nuls, cette famille est libre.
$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre orthogonale de $n+1$ éléments de E_n qui est de dimension $n+1$, par conséquent $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } E_n}$.

Remarques 1. $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ base de E_n pouvait s'obtenir directement en remarquant que $E_n = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{Vect}(P_k)$ (Q2).

2. Notons que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une base orthogonale de E_k et même que $P_k = Q_k$.
3. On peut montrer que, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, P_k admet k racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]0,+\infty[$ (voir encore à ce sujet la partie III du problème d'Edhec 98). Cette remarque permettra aux lecteurs plus exigeants de généraliser les résultats de la partie III.

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

Q1 **a)** Soient α et β deux réels.

$$\begin{aligned}
\forall P \in E_1,\ \int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha P(a) + \beta P(b) &\iff \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \int_0^{+\infty} (ct+d)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha(ca+d) + \beta(cb+d)\\
&\iff \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ cI_1 + dI_0 = c(\alpha a + \beta b) + d(\alpha+\beta)\\
&\iff \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ c + d = c(\alpha a + \beta b) + d(\alpha+\beta)\\
&\iff \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha a + \beta b - 1)c + (\alpha+\beta-1)d = 0\\
&\iff \alpha a + \beta b - 1 = \alpha + \beta - 1 = 0\\
&\iff \begin{cases} \alpha a + \beta b = 1\\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{1-b}{a-b} = \dfrac{1-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\\[2ex] \beta = \dfrac{1-a}{b-a} = \dfrac{1-2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il existe un (unique) couple de réels } (\alpha,\beta) \text{ tel que} : \forall P \in E_1,\ \int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha P(a) + \beta P(b)}$.

Remarques 1. Ce dernier résultat vaut encore lorsque a et b sont deux réels quelconques distincts.
2. Mieux, si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un n-uplet de réels deux à deux distincts, il existe un unique n-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tel que :

$$\forall P \in E_{n-1},\ \int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(a_k).$$

Ce résultat s'obtient facilement en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange (voir Hec 96 Math. I) ou encore en prouvant l'inversibilité de la matrice réelle d'ordre $n : A = (a_j^{i-1})$ (un passage à la transposée rend la chose élémentaire).

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_2(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = <1, P_2> = <Q_0, Q_2> = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

On a donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} P_2(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)}$.

c) Soit P un élément de E_3. La division euclidienne de P par P_2 fournit deux fonctions polynômes Q et R telles que $P = QP_2 + R$ et $\deg R < \deg P_2 = 2$. Le degré de R est donc inférieur ou égal à 1. Montrons qu'il en est encore ainsi pour Q. $QP_2 = P - R$ et $P - R$ est un élément de E_3 donc $\deg(QP_2) = \deg Q + \deg P_2 \leqslant 3$. Comme le degré de P_2 est 2, le degré de Q est nécessairement inférieur ou égal à 1.

$P_2 = Q_2$, Q_2 est orthogonal à Q_0 et Q_1, et (Q_0, Q_1) est une base (orthogonale) de E_1. Par conséquent P_2 est orthogonal à tous les éléments de E_1 donc à Q. Ainsi $\boxed{<P_2, Q> = 0}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(Q(t)P_2(t) + R(t)\big)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = <Q, P_2> + \int_0^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + \alpha R(a) + \beta R(b)$ car R est un élément de E_1.

Or $P(a) = Q(a)P_2(a) + R(a) = R(a)$ car a est un zéro de P_2. De même $P(b) = R(b)$. On a alors :

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \alpha P(a) + \beta P(b) \text{ pour toute fonction polynôme } P \text{ de degré inférieur ou égal à 3}}$.

<u>Remarque</u> Dans les remarques précédentes nous avons dit que si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un n-uplet de réels deux à deux distincts, il existe un unique n-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tel que :

$$\forall P \in E_{n-1}, \quad \int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(a_k).$$

On peut montrer que cette égalité s'étend aux éléments de E_{2n-1} <u>si et seulement si</u> a_1, a_2, ..., a_n sont les zéros de P_n (cela constitue un excellent exercice à faire sur le champs). On ne peut pas faire mieux. Autrement dit on ne peut pas trouver $q > 2n-1$ telle que l'égalité précédente s'étende aux éléments de E_q (cela s'obtient aisément en raisonnant par l'absurde et en considérant $\int_0^{+\infty} [(t-a_1)\cdots(t-a_n)]^2\ e^{-t}\, \mathrm{d}t$).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a)** Soit t un réel positif ou nul. f étant de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, +\infty[$, l'inégalité de Taylor-Lagrange fournit :

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(t-0)^k \right| \leqslant \frac{|t-0|^4}{4!} \underset{u \in [0,t]}{\mathrm{Max}} |f^{(4)}(u)| \leqslant \frac{t^4}{4!} M.$$

Or si x et y sont deux réels : $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. Ce qui précède donne alors :

$$|f(t)| - \left| \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ t^k \right| \leqslant \frac{M}{4!}\, t^4 \quad \text{ou} \quad |f(t)| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ t^k \right| + \frac{M}{4!}\, t^4.$$

L'inégalité triangulaire donne encore :

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\ t^k + \frac{M}{4!}\, t^4.$$

Dès lors posons $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\ X^k + \frac{M}{4!}\, X^4$.

$\boxed{T \text{ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 4 telle que} : \forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant |f(t)| \leqslant T(t)}$.

Ce qui précède donne encore $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant |f(t)\, e^{-t}| = |f(t)|\, e^{-t} \leqslant T(t) e^{-t}$.

La convergence de $\int_0^{+\infty} T(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |f(t)\, e^{-t}|\, \mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \text{ est absolument convergente donc convergente}}.$$

b) Soit P et Q deux éléments de E_3 et λ un réel.
$D(\lambda P + Q) = \Big((\lambda P + Q)(a), (\lambda P + Q)'(a), (\lambda P + Q)(b), (\lambda P + Q)'(b) \Big)$.
$D(\lambda P + Q) = \big(\lambda P(a) + Q(a), \lambda P'(a) + Q'(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P'(b) + Q'(b) \big)$.
$D(\lambda P + Q) = \lambda \big(P(a), P'(a), P(b), P'(b) \big) + \big(Q(a), Q'(a), Q(b), Q'(b) \big) = \lambda D(P) + D(Q)$.
<u>D est une application linéaire de E_3 dans $\mathbb{R}^4$</u>.

Pour montrer que l'application linéaire D est bijective il suffit de montrer que D est injective car E_3 et $\mathbb{R}^4$ sont deux espaces vectoriels de même dimension finie 4 sur $\mathbb{R}$.
Montrons donc, par l'absurde, que le noyau de D est réduit à la fonction polynôme nulle.
Supposons que P soit un élément <u>non nul</u> de $\mathrm{Ker}\, D$. $P(a) = P'(a) = P(b) = P'(b) = 0$. a et b sont alors deux racines de P d'ordre de multiplicité au moins deux et ainsi le nombre de racines de P, comptées avec leur ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 4. Ceci n'est pas raisonnable pour une fonction polynôme non nulle de degré au plus 3 !
Par conséquent le noyau de D est réduit à O_{E_3} et D est injective.

Ce qui précède montre bien que $\boxed{D \text{ est un isomorphisme de } E_3 \text{ sur } \mathbb{R}^4}$

c) Soit S un élément de E_3.

$$\begin{aligned} S(a)=f(a),\ S'(a)=f'(a),\ S(b)=f(b),\ S'(b)=f'(b) &\iff \big(S(a),S'(a),S(b),S'(b)\big)=\big(f(a),f'(a),f(b),f'(b)\big)\\ &\iff D(S)=\big(f(a),f'(a),f(b),f'(b)\big)\\ &\iff S=D^{-1}\Big(\big(f(a),f'(a),f(b),f'(b)\big)\Big)\end{aligned}.$$

$\boxed{\text{Il existe une unique fonction polynôme } S \text{ de } E_3 \text{ telle que : } S(a)=f(a),\ S'(a)=f'(a),\ S(b)=f(b),\ S'(b)=f'(b).\quad S=D^{-1}\Big(\big(f(a),f'(a),f(b),f'(b)\big)\Big).}$

Remarque Par des considérations analogues on montre que si a_1, a_2, ..., a_n sont n éléments distincts d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si f est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$, il existe un unique élément S de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$: $S(a_i)=f(a_i)$ et $S'(a_i)=f'(a_i)$ (voir encore Hec 96 Math. I).

Q3 **a)** $g(a)=f(a)-S(a)-\dfrac{f(x_0)-S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\big(P_2(a)\big)^2=0$ car $f(a)=S(a)$ et $P_2(a)=0$. De même $g(b)=0$.

$g(x_0)=f(x_0)-S(x_0)-\dfrac{f(x_0)-S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\big(P_2(x_0)\big)^2=f(x_0)-S(x_0)-\big(f(x_0)-S(x_0)\big)=0.$

$\boxed{g \text{ s'annule en } a,\ b \text{ et } x_0}$.

b) Notons immédiatement que f, S et $(P_2)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,+\infty[$. g l'est donc également.
Etudier avec soin le cas $a<x_0<b$ est aussi aisé que rapide car ce cas ne se pose pas ! ($a=2+\sqrt{2}>2-\sqrt{2}=b$).
Contournons les "cas" et ordonnons les éléments de $\{a,b,x_0\}$. Notons t_1 le plus petit élément de cette partie, t_3 le plus grand et t_2 l'élément restant. $t_1<t_2<t_3$ et $\{a,b,x_0\}=\{t_1,t_2,t_3\}$. Soit i un élément de $\{1,2\}$. g est dérivable sur $[t_i,t_{i+1}]$ et $g(t_i)=g(t_{i+1})(=0)$; le théorème de Rolle montre alors qu'il existe un élément u_i dans $]t_i,t_{i+1}[$ tel que $g'(u_i)=0$.
u_1 et u_2 sont alors deux zéros de g' distincts de a, b et x_0.

$g'(t)=f'(t)-S'(t)-\dfrac{f(x_0)-S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\ \big(2P_2'(t)P_2(t)\big)$. $g'(a)=0$ car $S'(a)=f'(a)$ et $P_2(a)=0$; de même $g'(b)=0$.

$\boxed{\text{g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont } a \text{ et } b)}$.

Notons que ces quatre zéros sont strictement positifs car a et b le sont et $0\leqslant t_1<u_1<t_2<u_2$. Dès lors montrons par récurrence que, pour tout élément i de $[\![1,4]\!]$, $g^{(i)}$ possède au moins $5-i$ zéro(s) dans $]0,+\infty[$!
D'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $i=1$. Supposons la propriété vraie pour i élément de $[\![1,3]\!]$ et montrons la alors pour $i+1$.
$g^{(i)}$ possède au moins $5-i$ zéros α_1, α_2, ..., α_{5-i} ($\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{5-i}$) dans $]0,+\infty[$. Montrons alors que $g^{(i+1)}=\big(g^{(i)}\big)'$ possède au moins $4-i$ zéro(s) dans $]0,+\infty[$.

Soit j dans $[\![1,4-i]\!]$. $g^{(i)}$ est dérivable sur $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ et $g^{(i)}(\alpha_j)=g^{(i)}(\alpha_{j+1})(=0)$. Le théorème de Rolle montre alors l'existence de β_j dans $]\alpha_j,\alpha_{j+1}[$ tel que : $g^{(i+1)}(\beta_j)=0$.
Ceci donne à $g^{(i+1)}$ au moins $4-i$ zéro(s) strictement positif(s) et achève la récurrence.

En appliquant la propriété pour $i=4$, $\boxed{\text{on obtient l'existence d'un élément } c \text{ de }]0,+\infty[\text{ tel que } g^{(4)}(c)=0}$.

c) Calculons $g^{(4)}$. S est un élément de E_3 donc sa dérivée quatrième est nulle. $(P_2)^2$ est une fonction polynôme unitaire de degré quatre donc sa dérivée quatrième est la fonction constante égale à $4!$. Finalement :

$$\forall t\in[0,+\infty[,\ g^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-\frac{f(x_0)-S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2}\times 4!.$$

Comme $g^{(4)}(c)=0$, il vient sans difficulté : $\boxed{f(x_0)-S(x_0)=\dfrac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!}\ f^{(4)}(c)}$.

Ainsi $|f(x_0)-S(x_0)| = \dfrac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!}\ |f^{(4)}(c)|$ et comme $|f^{(4)}(c)| \leqslant M$: $\boxed{|f(x_0)-S(x_0)| \leqslant \dfrac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!}\ M}$.

Q4 **a)** D'après la question précédente : $\forall x \in [0,+\infty[-\{a,b\},\ |f(x)-S(x)| \leqslant \dfrac{\big(P_2(x)\big)^2}{4!}\ M$. Les deux membres de cette inégalité étant nuls pour $x=a$ et $x=b$ on a bien :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)-S(x)| \leqslant \frac{\big(P_2(x)\big)^2}{4!}\ M.$$

Remarque Ici encore ce résultat peut se généraliser de la manière suivante. a_1, a_2, ..., a_n sont n éléments distincts d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est une application I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$ (ou simplement $2n$ fois dérivable) telle qu'il existe un réel M majorant $|f^{(2n)}|$ sur I. S est l'unique élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ S(a_i)=f(a_i)$ et $S'(a_i)=f'(a_i)$. Alors :

$$\forall x \in I,\ |f(x)-S(x)| \leqslant \frac{M}{(2n)!}\big[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\big]^2.$$

On obtient ce résultat, sans difficulté, en reprenant les idées développées dans ce qui précède (Hec 96 Math. 1 encore et encore...).

b) Q4 a) nous donne (en multipliant par e^{-x}...) : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \big|\big(f(x)-S(x)\big)\ e^{-x}\big| \leqslant \dfrac{M}{4!}\ \big(P_2(x)\big)^2\ e^{-x}$.

La convergence de $\int_0^{+\infty} \big(P_2(x)\big)^2\ e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives donnent la convergence de $\int_0^{+\infty} \big|\big(f(x)-S(x)\big)\ e^{-x}\big|\,\mathrm{d}x$ donc l'absolue convergence de $\int_0^{+\infty} \big(f(x)-S(x)\big)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Nous pouvons alors écrire : $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)-S(x)\big)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \big|\big(f(x)-S(x)\big)\ e^{-x}\big|\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{M}{4!}\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P_2(x)\big)^2\ e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} S(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x$ convergent, ceci donne encore :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} S(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{4!}\ \int_0^{+\infty} \big(P_2(x)\big)^2\ e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{4!}\ \|P_2\|^2.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x = \alpha S(a)+\beta S(b) = \alpha f(a)+\beta f(b)$ et $\|P_2\|^2 = \|Q_2\|^2 = 4$ (I Q3 c), par conséquent :

$$\boxed{\left|\int_0^{+\infty} f(x)\ e^{-x}\,\mathrm{d}x - \alpha f(a) - \beta f(b)\right| \leqslant \frac{M}{6}}.$$

Remarque Soient a_1, a_2,..., a_n les n zéros de P_n et $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ l'unique n-uplet de réels tel que :

$$\forall P \in E_{2n-1},\ \int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(a_k).$$

Si f est une application $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$ telle que $|f^{(2n)}|$ soit majorée sur $[0,+\infty[$ par M on obtient alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f(a_k)\right| \leqslant \frac{M}{(2n)!}\,\|P_n\|^2 = \frac{M(n!)^2}{(2n)!}.$$

Notons que la formule de Stirling donne $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}\sqrt{\pi n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui donne de l'espoir . Mais notons aussi que M dépend, a priori, de n.

Q5 ***Application :*** f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,+\infty[$ (f est la restriction d'une fonction rationnelle).

$\forall t \in [0,+\infty[,\ f'(t) = -\dfrac{1}{(10+t)^2},\ f''(t) = \dfrac{2}{(10+t)^3},\ f^{(3)}(t) = -\dfrac{6}{(10+t)^4}$ et $f^{(4)}(t) = \dfrac{24}{(10+t)^5}$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ |f^{(4)}(t)| = \dfrac{24}{(10+t)^5} \leqslant \dfrac{24}{10^5}$.

Posons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \alpha f(a) + \beta f(b) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\ f(2+\sqrt{2}) + \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\ f(2-\sqrt{2})$.

Q4 donne alors $|I - J| \leqslant \dfrac{(24/10^5)}{6}$ donc $|I - J| \leqslant \dfrac{4}{10^5}$.

Ainsi $J - \dfrac{4}{10^5} \leqslant I \leqslant J + \dfrac{4}{10^5}$. Comme $0.0915 \leqslant J \leqslant 0.0916$ on obtient alors : $0.0915 - \dfrac{4}{10^5} \leqslant I \leqslant 0.0916 + \dfrac{4}{10^5}$.

Ceci donne encore : $\boxed{0.09146 \leqslant I \leqslant 0.09164}$.

I appartient à l'intervalle $[0.09146, 0.09164]$ donc $\left| I - \dfrac{0.09164 + 0.09146}{2} \right| \leqslant \dfrac{0.09164 - 0.09146}{2}$.

Ainsi : $|I - 0.09155| \leqslant 0.00009$ et $\boxed{\text{0.09155 est une valeur approchée de } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\,\mathrm{d}t \text{ à } 9\times 10^{-5} \text{ près}}$.