PREMIER PROBLÈME

Remarque *Je ne ferai pas, dans ce qui suit, l'identification des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux éléments de $\mathbb{R}^n$ proposée par le texte car elle n'apporte rien ici. Le produit scalaire utilisé sera donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
Je conserverai le parti pris de ne pas parenthèser les expressions du type $\sin k\theta$.

1. A_3 est une matrice symétrique et réelle donc $\boxed{A_3 \text{ est diagonalisable}}$ ... A_n aussi.

Cherchons les valeurs propres de A_3. Soit λ un réel. Déterminons une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

$A_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ donnent successivement : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda^2 - 1)L_2$ donnent successivement : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2-1)+\lambda \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2-2) \end{pmatrix}$ est alors une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

Ainsi $A_3 - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $-\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$; c'est à dire si et seulement si λ vaut 0, $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_3 \text{ sont donc : } \sqrt{2},\ 0 \text{ et } -\sqrt{2}}$.

Cherchons les sous-espaces propres de A_3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$A_3X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = -x.$$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A_3 \text{ associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendrée par } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

Soit ε un élément de $\{-1, 1\}$. Notons que : $\varepsilon^2 = 1$.

$$A_3X = \varepsilon\sqrt{2}\,X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\,x \\ x + z = \varepsilon\sqrt{2}\,y \\ y = \varepsilon\sqrt{2}\,z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\,x \\ z = x \\ 2x = \varepsilon\sqrt{2}\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}\,x \\ z = x \\ y = \dfrac{2}{\varepsilon\sqrt{2}}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2}\,\varepsilon x = \varepsilon\sqrt{2}\,x \end{cases}.$$

$A_3X = \varepsilon\sqrt{2}\,X \Leftrightarrow z = x$ et $y = \varepsilon\sqrt{2}\,x$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A_3 \text{ associé à la valeur propre } \sqrt{2} \text{ (resp. } -\sqrt{2}) \text{ est la droite vectorielle de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendrée par } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (resp. } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}).}$$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de trois vecteurs propres de A_3 associés à trois valeurs propres distinctes $\sqrt{2}$, 0 et $-\sqrt{2}$; $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$ et posons $D = P^{-1}A_3P$. D'après ce qui précède :

$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}}$ comme matrice de passage, $\boxed{D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est diagonale}}$

et $\boxed{A_3 = PDP^{-1}}$.

<u>Exercice</u> *Déterminer P^{-1}. Trouver une matrice orthogonale Q telle que : $A_3 = QD^tQ$.*

2. Le cours nous indique que l'ensemble S'_θ des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos\theta\ s_{k+1} + s_k = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

L'équation caractéristique attachée aux éléments de S'_θ est $x^2 - 2\cos\theta\ x + 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions complexes et conjuguées : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ainsi $\Big((\cos k\theta)_{k\in\mathbb{N}}, (\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$ est une base de S'_θ.

Soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de S_θ. $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est encore un élément de S'_θ. Par conséquent il existe deux réels α et β tel que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $s_k = \alpha\cos k\theta + \beta\sin k\theta$. On a alors $0 = s_0 = \alpha$ et $s_1 = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$; donc $\alpha = 0$ et $\beta = s_1\ \dfrac{1}{\sin\theta}$.

Ainsi si $(s_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de S_θ : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ s_k = s_1\ \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}}$.

En particulier $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement soit $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de cette droite. Il existe un réel β tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ s_k = \beta\ \sin k\theta$.

Par conséquent $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S'_θ et $s_0 = \beta\ \sin(0\theta) = 0$; donc $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de S_θ.

Finalement S_θ est la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}$. $S_\theta = \text{Vect}\Big((\sin k\theta)_{k\in\mathbb{N}}\Big)$.

Ainsi $\boxed{S_\theta \text{ est un espace vectoriel réel de dimension 1}}$.

3. a. λ est une valeur propre de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A_n associé à λ.

$A_n X = \lambda X$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; soit encore $\left\{ \begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \dots\dots \\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ \dots\dots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{array} \right.$.

Ceci donne enfin : $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \quad \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \ \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \quad \lambda x_n = x_{n-1} \end{array} \right.}$.

Observons que ce système est exactement équivalent à : $A_n X = \lambda X$.

Notons que $m = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$ est strictement positif car X n'est pas nul.

$|\lambda||x_1| = |\lambda x_1| = |x_2| \leqslant m \leqslant 2m$ et $|\lambda||x_n| = |\lambda x_n| = |x_{n-1}| \leqslant m \leqslant 2m$.

De plus si k appartient à $\{2, \dots, n-1\}$: $|\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = |x_{k-1} + x_{k+1}| \leqslant |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leqslant m + m = 2m$.

Finalement $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ de } \{1, \dots, n\}, \ |\lambda||x_k| \leqslant 2m}$.

Ainsi $\operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} (|\lambda||x_k|) \leqslant 2m$ donc $|\lambda| \operatorname*{Max}_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant 2m$. Ceci donne encore $|\lambda| m \leqslant 2m$ donc $|\lambda| \leqslant 2$ car m est strictement positif.

Par conséquent $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A : |\lambda| \leqslant 2}$

<u>Exercice</u> *Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$ on pose $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}|\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est contenu dans $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ (disques de Gershgorin). Retrouver le résultat précédent.

b. Posons pour tout élément t de $]0, \pi[$, $u(t) = 2\cos t$. u est continue et dérivable sur $]0, \pi[$.

$\forall t \in]0, \pi[, \ u'(t) = -2 \sin t < 0$. Ainsi u est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$.

u définit alors une bijection de $]0, \pi[$ sur $]\lim_{t \to \pi} (2\cos t), \lim_{t \to 0} (2 \cos t)[=]-2, 2[$.

Comme λ est élément de $]-2, 2[$, $\boxed{\text{il existe un unique élément } \theta \text{ de }]0, \pi[\text{ tel que } \lambda = u(\theta) = 2\cos\theta.}$

D'après la question 2, la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \ s_k = x_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.
Montrons alors à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ s_k = x_k$.

La propriété est vraie pour $k = 1$ car $s_1 = x_1$. Supposons la vraie jusqu'à k, k élément de $\{1, \dots, n-1\}$ et montrons la pour $k + 1$. $s_{k+1} = 2\cos\theta \ s_k - s_{k-1}$.
Si $k = 1$: $s_{k+1} = s_2 = 2\cos\theta \ s_1 - s_0 = \lambda s_1 = \lambda x_1 = x_2 = x_{k+1}$;
Si $k \geqslant 2$, d'après l'hypothèse de récurrence : $s_{k+1} = 2\cos\theta \ s_k - s_{k-1} = 2\cos\theta \ x_k - x_{k-1} = x_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\boxed{\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ s_k = x_k}$.

$s_{n+1} = 2\cos\theta\ s_n - s_{n-1} = 2\cos\theta\ x_n - x_{n-1} = \lambda x_n - x_{n-1} = 0$. $\boxed{s_{n+1} = 0}$.

Rappelons que $s_{n+1} = x_1 \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. Ainsi $x_1 \times \sin(n+1)\theta = 0$. Donc $x_1 = 0$ ou $\sin(n+1)\theta = 0$.

Supposons x_1 nul. La suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors la suite nulle. Donc $\forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = s_k = 0$. Ce qui donne $X = 0$!

x_1 n'étant pas nul $\sin(n+1)\theta$ l'est. $(n+1)\theta$ est alors un multiple de π. Il existe un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que : $(n+1)\theta = p\pi$. Alors $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$ et comme θ appartient à $]0,\pi[$: p appartient à $\{1,\dots,n\}$.

$\boxed{\text{Il existe un entier } p \text{ de } \{1,\dots,n\} \text{ tel que } \theta = \dfrac{p\pi}{n+1}}$.

c. Soit p un élément de $\{1,\dots,n\}$. Notons déjà que X_p n'est pas nul car sa première composante $\sin\theta_p$ est différente de 0 ($\theta_p \in]0,\pi[$). Dès lors montrons que $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Il suffit de prouver que : $\begin{cases} \bullet \quad \sin 2\theta_p = \lambda_p \sin\theta_p \\ \bullet \quad \forall k \in \{2,\dots,n-1\},\ \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p = \lambda_p \sin k\theta_p \\ \bullet \quad \sin(n-1)\theta_p = \lambda_p \sin n\theta_p \end{cases}$

• $\lambda_p \sin\theta_p = 2\cos\theta_p \sin\theta_p = \sin 2\theta_p$.

• Si p est dans $\{2,\dots,n-1\}$, $\lambda_p \sin k\theta_p = 2\cos\theta_p \sin k\theta_p = 2\sin k\theta_p \cos\theta_p = \sin(k\theta_p + \theta_p) + \sin(k\theta_p - \theta_p)$.

$\lambda_p \sin k\theta_p = \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p$.

• $\lambda_p \sin n\theta_p = 2\cos\theta_p \sin n\theta_p = 2\sin n\theta_p \cos\theta_p = \sin(n\theta_p + \theta_p) + \sin(n\theta_p - \theta_p)$.

$\lambda_p \sin n\theta_p = \sin(n+1)\theta_p + \sin(n-1)\theta_p = \sin p\pi + \sin(n-1)\theta_p = \sin(n-1)\theta_p$.

Ceci achève de prouver que : $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Donc $\boxed{\text{pour tout élément } p \text{ de } \{1,\dots,n\},\ \lambda_p \text{ est une valeur propre de } A_n \text{ et } X_p \text{ un vecteur propre associé}}$.

d. Pour tout élément p de $\{1,\dots,n\}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p = 2\cos\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right) = u\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right)$.

Comme $\dfrac{\pi}{n+1}$, $\dfrac{2\pi}{n+1}$, ..., $\dfrac{n\pi}{n+1}$ sont n réels deux à deux distincts de $]0,\pi[$ et que u est injective sur cet intervalle, λ_1, λ_2, ..., λ_n sont n réels deux à deux distincts.

Ainsi λ_1, λ_2, ..., λ_n sont n valeurs propres deux à deux distinctes de A_n qui est une matrice d'ordre n et qui a donc au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Par conséquent $\boxed{\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \text{ est l'ensemble des valeurs propres de } A_n}$.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont n vecteurs propres de A_n associés à n valeurs propres deux à deux distinctes donc $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension n.

Finalement $\boxed{(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

4. U_n n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Donc $\boxed{U_n \text{ est inversible}}$.

Comme $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_n respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n : $\boxed{D_n = U_n^{-1} A_n U_n \text{ est la matrice diagonale } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}$

5. a. Soit p et q deux éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

A_n est une matrice symétrique donc : $< AX_p, X_q >=< X_p, AX_q >$.

Ainsi $< \lambda_p X_p, X_q >=< X_p, \lambda_q X_q >$. C'est à dire $\lambda_p < X_p, X_q >= \lambda_q < X_p, X_q >$.

Par conséquent : $\boxed{\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q}$. Ceci donne encore : $(\lambda_p - \lambda_q) < X_p, X_q >= 0$.

Dès lors si nous supposons $p \neq q$, λ_p et λ_q sont dictincts et : $< X_p, X_q >= 0$; X_p et X_q sont donc orthogonaux.

$\boxed{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

<u>Remarque</u> *Ce n'est pas un scoop. A_n étant une matrice symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux et donc la base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est orthogonale non ?*

Soient p et q deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p \ \sin k\theta_q = (\sin\theta_p, \sin 2\theta_p, \ldots, \sin n\theta_p) \begin{pmatrix} \sin\theta_q \\ \sin 2\theta_q \\ \vdots \\ \sin n\theta_q \end{pmatrix} = {}^t X_p X_q =< X_p, X_q >= 0.$$

Donc $\boxed{\forall (p, q) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ p \neq q \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p \ \sin k\theta_q = 0}$.

b. Soit p un élément de $\{1, \ldots, n\}$. $\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p)$ est la partie réelle de : $\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)}$. Or $e^{i(2\theta_p)}$ est différent de 1 car $2\theta_p = \frac{2p\pi}{n+1}$ n'est pas un multiple de 2π puisque p appartient à $\{1, \ldots, n\}$; ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i(2\theta_p)}\right)^k = \frac{1 - (e^{i(2\theta_p)})^{n+1}}{1 - e^{i(2\theta_p)}}.$$

Remarquons alors que : $1 - (e^{i(2\theta_p)})^{n+1} = 1 - e^{i(2p\pi)} = 0$. Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k\theta_p)} = 0$.

Finalement $\boxed{\forall p \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) = 0}$.

Soit p un élément de $\{1, \ldots, n\}$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos(2k\theta_p)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta_p)$.

Ceci donne encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Donc $\boxed{\forall p \in \{1, \ldots, n\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \frac{n+1}{2}}$.

c. Posons $U_n^2 = (v_{pq})$. Soient p et q deux éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

$$v_{pq} = \sum_{k=1}^{n} u_{pk} u_{kq} = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{pk\pi}{n+1} \sin \frac{kq\pi}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p \ \sin k\theta_q.$$

Ainsi v_{pq} vaut 0 si p et q sont distincts et $\dfrac{n+1}{2}$ s'ils sont égaux. Donc $\boxed{U_n^2 = \dfrac{n+1}{2}\ I_n}$.

En particulier : $\left(\dfrac{2}{n+1}\ U_n\right) U_n = I_n$ donc $U_n^{-1} = \dfrac{2}{n+1}\ U_n$.

Alors $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$ donne $A_n = U_n D_n U_n^{-1} = U_n D_n \left(\dfrac{2}{n+1} U_n\right)$.

Finalement : $\boxed{A_n = \dfrac{2}{n+1}\ U_n D_n U_n}$.

<u>Remarque</u> *On pourra pour compléter ce problème visiter ou revisiter HEC 90 MI et ESSEC 96 MI.*

DEUXIÈME PROBLÈME

1. a. $\boxed{\text{et}}$ **b.** $t \to 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0,1[$ et ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $t \to \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Comme $t \to -\dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, par produit $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1[}$.

Montrons que f est continue en 0. $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{0}{\sim} -\dfrac{-t}{t} = 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Par conséquent : $\lim\limits_{t\to 0} \left(-\dfrac{\ln(1-t)}{t}\right) = 1 = f(0)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

$\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\left[\dfrac{-1}{1-t} \times t - \ln(1-t)\right]$ donc $\boxed{\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t}\right]}$.

c. $f'(t) = \dfrac{1}{t^2(1-t)}\ [(1-t)\ln(1-t) + t] \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\ [(1-t)\ln(1-t) + t]$.

Cherchons un équivalent en 0 de $t \to (1-t)\ln(1-t) + t$. Pour cela utilisons des développements limités d'ordre 2 au voisinage de 0.

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$ et $1-t = 1-t+\mathrm{o}(t^2)$.

Donc $(1-t)\ln(1-t) = (1-t)(-t - \dfrac{t^2}{2}) + \mathrm{o}(t^2) = -t - \dfrac{t^2}{2} + t^2 + \mathrm{o}(t^2) = -t + \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$.

Ceci donne encore : $(1-t)\ln(1-t) + t = \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$. Par conséquent $(1-t)\ln(1-t) + t \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\cdot$

Finalement : $f'(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\ [(1-t)\ln(1-t) + t] \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \times \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \dfrac{1}{2}}$.

f est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et f' admet une limite finie en 0. Le théorème de la limite de la dérivée nous permet de dire que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$. Notons encore que l'on a $f'(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$

d. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque sa dérivée seconde est négative. Sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant (\ln' 1)(x-1) + \ln 1 = x - 1$.

Ainsi : $\forall t \in]0,1[,\ -\ln(1-t) = \ln \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-t} - 1 = \dfrac{t}{1-t}$.

Il vient alors sans difficulté : $\boxed{\forall t \in]0,1[,\ \ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0}$.

e. Ce qui précède montre que : $\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t}\right] \geqslant 0$.

Comme $f'(0) = \dfrac{1}{2}$: $\forall t \in [0,1[,\ f'(t) \geqslant 0$. $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1[}$.

$\lim\limits_{t\to 1} -\dfrac{1}{t} = -1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln(1-t) = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 1} f(t) = +\infty}$.

t	0		1
$f'(t)$		$+$	$\Vert$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Voir l'allure de la courbe représentative de f à la fin de la question 2.

2. a. Si x est un élément de $[0,1[$, f est continue sur $[0,x]$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Montrons maintenant que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

f est continue et positive sur $[0,1[$, et équivalente au voisinage de 1 à $t \to -\ln(1-t)$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dès que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ existe. Montrons la convergence de cette dernière intégrale. Soit α un élément de $]0,1[$.

Une intégration par parties simple ($u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(1-t)$, $u(t) = t-1$ et $v'(t) = \frac{-1}{1-t}$) donne $\displaystyle\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-1)\ln(1-t)\Big]_0^\alpha - \int_0^\alpha (t-1)\frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}t = (\alpha-1)\ln(1-\alpha) - \int_0^\alpha 1\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = -(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to 1}\Big(-(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha\Big) = -1$ car $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\Big((1-\alpha)\ln(1-\alpha)\Big) = 0$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 ; donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe pour tout élément } x \text{ de } [0,1]}$.

b. La restriction de g à $[0,1[$ est la primitive sur l'intervalle $[0,1[$ de la fonction continue f, qui prend la valeur 0 en 0.

Ainsi g est dérivable sur $[0,1[$ et $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ g'(x) = f(x)}$.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, il en est de même pour g'. Alors $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1[}$.

Montrons que g est continue en 1. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc par définition :

$$\lim_{x\to 1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(1).$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est continue en } 1}$.

c. Soit x un élément de $]0,1[$. $\displaystyle\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right] = -\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Minorons cette dernière intégrale.

Soit α un élément de $]x,1[$. $\forall t \in [x,\alpha],\ -\ln(1-t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t} \geqslant 1$; donc $\forall t \in [x,\alpha],\ f(t) \geqslant -\ln(1-t)$.

Comme $\alpha > x$ il vient en intégrant entre α et x : $\displaystyle\int_x^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t$. Calculons cette dernière intégrale en faisant une intégration par parties analogue à celle faite dans a).

$$\int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t = \Big[-(t-1)\ln(1-t)\Big]_x^\alpha - \int_x^\alpha -(t-1)\frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -(\alpha-1)\ln(1-\alpha)+(x-1)\ln(1-x)+(\alpha-x).$$

Ainsi : $\displaystyle\int_x^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t = (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + (x-1)\ln(1-x) + (\alpha - x)$

En faisant tendre α vers 1 il vient : $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-1)\ln(1-x) + 1 - x.$

En divisant par $1-x$, qui est strictement positif, on obtient : $\displaystyle\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\ln(1-x) + 1.$

Ainsi : $\displaystyle\frac{g(x)-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\ln(1-x)+1$ pour tout élément x de $]0,1[$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1}(-\ln(1-x)+1) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = +\infty}$. Par conséquent g n'est pas dérivable en 1.

<u>*Exercice*</u> *Retouver ce résultat en utilisant* $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ *et le théorème des accroissements finis.*

d.

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$g(1)$

e. $\forall x \in [0,1[,\ g''(x) = (g')'(x) = f'(x) \geqslant 0$. g'' est positive sur $[0,1[$ donc $\boxed{g \text{ est convexe sur } [0,1[}$... et même sur $[0,1]$.

Courbe...

Courbe...

3. a. Ceci est un résultat de cours. Si t appartient à $[0,1[$, $|t|<1$ et : $\boxed{\text{la série de terme général } t^n \text{ converge}}$.

De plus $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}}$.

b. $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}}\ .$$

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $\boxed{R_n \text{ est continue sur } [0,1[}$ comme quotient de fonctions continues sur $[0,1[$.

c. Soit x un élément de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{n} t^k + R_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t}.$$

d. Reprenons n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1[$.

$\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant \dfrac{1}{1-t}\leqslant \dfrac{1}{1-x}$ et $t^{n+1}\geqslant 0$. Donc $\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\leqslant \dfrac{1}{1-x}\,t^{n+1}$.

En intégrant entre 0 et x $(0\leqslant x)$ il vient :

$$0\leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x = \frac{x}{(1-x)(n+2)}\times x^{n+1} \leqslant \frac{x}{(1-x)(n+2)}\times 1.$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ 0\leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{x}{(n+2)(1-x)}}$.

e. Soit x un élément de $[0,1[$. c) donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{(n+2)(1-x)} = 0$, l'encadrement de d) donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = -\ln(1-x)$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0,1[, \text{ la série de terme général } \dfrac{x^{k+1}}{k+1} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)}$.

En divisant par x élément de $]0,1[$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} = f(x)$.

Ainsi : $\forall x\in]0,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}$. Ceci vaut encore pour $x=0$ car $f(0)=1$.

Donc $\boxed{\forall x\in[0,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}}$.

4. a. Soit x un élément de $[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant \dfrac{x^n}{n^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}\cdot$ De plus la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n^2}$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0,1] \text{ la série de terme général } \dfrac{x^n}{n^2} \text{ converge}}$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1[,\ \rho_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1} = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1}$.

f est continue sur $[0,1[$ et $t \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1}$ également. Par différence : $\boxed{\rho_n \text{ est continue sur } [0,1[}$ et ceci pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

c. Soit x un éléḿent de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1} + \rho_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$

$g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^x + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$

$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t}$.

d. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et soit t un élément de $[0,1[$.

Observons que : $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Ainsi avons-nous :

$$0 \leqslant \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{1}{n+2}\, R_n(t) = \frac{1}{n+2}\, \frac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \dfrac{1}{(n+2)(1-t)}}$.

<u>Remarque</u> *On peut encore retrouver ce résultat en utilisant 3 d).*

e. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $[0,1[$. $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \dfrac{1}{(n+2)(1-t)}$.

En intégrant entre 0 et x $(0 \leqslant x)$ il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+2} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2}}$.

f. Soit x un élément de $[0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \leqslant -\frac{\ln(1-x)}{n+2}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{\ln(1-x)}{n+2}\right) = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} = g(x)$.

Ou : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k^2} = g(x)$ c'est à dire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = g(x)$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$.

Exercice Montrer que ceci vaut encore pour $x = 1$

(on pourra en utilisant la définition prouver que $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$*).*