LYON 1999 DEUXIÈME PROBLÈME

1. a. $\boxed{\text{et}}$ **b.** $t \to 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0,1[$ et ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $t \to \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Comme $t \to -\dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, par produit $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1[}$.

Montrons que f est continue en 0. $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{0}{\sim} -\dfrac{-t}{t} = 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\Big(-\frac{\ln(1-t)}{t}\Big) = 1 = f(0)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

$\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\left[\dfrac{-1}{1-t} \times t - \ln(1-t)\right]$ donc $\boxed{\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t}\right]}$.

c. $f'(t) = \dfrac{1}{t^2(1-t)}\,[(1-t)\ln(1-t)+t] \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\,[(1-t)\ln(1-t)+t]$.

Cherchons un équivalent en 0 de $t \to (1-t)\ln(1-t)+t$. Pour cela utilisons des développements limités d'ordre 2 au voisinage de 0.

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$ et $1-t = 1-t+\mathrm{o}(t^2)$.

Donc $(1-t)\ln(1-t) = (1-t)(-t-\dfrac{t^2}{2}) + \mathrm{o}(t^2) = -t - \dfrac{t^2}{2} + t^2 + \mathrm{o}(t^2) = -t + \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$.

Ceci donne encore : $(1-t)\ln(1-t)+t = \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$. Par conséquent $(1-t)\ln(1-t)+t \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\cdot$

Finalement : $f'(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\,[(1-t)\ln(1-t)+t] \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \times \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2}}\,\cdot$

f est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et f' admet une limite finie en 0. Le théorème de la limite de la dérivée nous permet de dire que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[}$. Notons encore que l'on a $f'(0) = \dfrac{1}{2}\cdot$

d. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque sa dérivée seconde est négative. Sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant (\ln' 1)(x-1) + \ln 1 = x-1$.

Ainsi : $\forall t \in]0,1[,\ -\ln(1-t) = \ln\dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-t} - 1 = \dfrac{t}{1-t}\cdot$

Il vient alors sans difficulté : $\boxed{\forall t \in]0,1[,\ \ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0}$.

e. Ce qui précède montre que : $\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[\ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t}\right] \geqslant 0$.

Comme $f'(0) = \dfrac{1}{2}$: $\forall t \in [0,1[,\ f'(t) \geqslant 0$. $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1[}$.

$\lim\limits_{t\to 1} -\dfrac{1}{t} = -1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln(1-t) = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 1} f(t) = +\infty}$.

t	0		1
$f'(t)$		$+$	$\|\|$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

f. Courbe ! !

2. a. Si x est un élément de $[0,1[$, f est continue sur $[0,x]$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Montrons maintenant que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

f est continue et positive sur $[0,1[$, et équivalente au voisinage de 1 à $t \to -\ln(1-t)$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dès que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ existe. Montrons la convergence de cette dernière intégrale. Soit α un élément de $]0,1[$.

Une intégration par parties simple ($u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(1-t)$, $u(t) = t-1$ et $v'(t) = \frac{-1}{1-t}$) donne
$\displaystyle\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-1)\ln(1-t)\Big]_0^\alpha - \int_0^\alpha (t-1)\frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}t = (\alpha-1)\ln(1-\alpha) - \int_0^\alpha 1\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = -(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int_0^\alpha \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to 1}\Big(-(1-\alpha)\ln(1-\alpha)-\alpha\Big) = -1$ car $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\Big((1-\alpha)\ln(1-\alpha)\Big) = 0.$

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut -1 ; donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe pour tout élément } x \text{ de } [0,1]}$.

b. La restriction de g à $[0,1[$ est la primitive sur l'intervalle $[0,1[$ de la fonction continue f, qui prend la valeur 0 en 0.

Ainsi g est dérivable sur $[0,1[$ et $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ g'(x) = f(x)}$.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, il en est de même pour g'. Alors $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1[}$.

Montrons que g est continue en 1. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc par définition :

$$\lim_{x\to 1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = g(1).$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est continue en } 1}$.

c. Soit x un élément de $]0,1[$. $\displaystyle\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right] = -\frac{1}{x-1}\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$

$\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \dfrac{1}{1-x}\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Minorons cette dernière intégrale.

Soit α un élément de $]x,1[$. $\forall t \in [x,\alpha],\ -\ln(1-t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t} \geqslant 1$; donc $\forall t \in [x,\alpha],\ f(t) \geqslant -\ln(1-t)$.

Comme $\alpha > x$ il vient en intégrant entre α et x : $\displaystyle\int_x^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t$. Calculons cette dernière intégrale en faisant une intégration par parties analogue à celle faite dans a).

$$\int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t = \Big[-(t-1)\ln(1-t)\Big]_x^\alpha - \int_x^\alpha -(t-1)\frac{-1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -(\alpha-1)\ln(1-\alpha)+(x-1)\ln(1-x)+(\alpha-x).$$

Ainsi : $\displaystyle\int_x^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^\alpha [-\ln(1-t)]\,\mathrm{d}t = (1-\alpha)\ln(1-\alpha)+(x-1)\ln(1-x)+(\alpha-x)$

En faisant tendre α vers 1 il vient : $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-1)\ln(1-x)+1-x$.

En divisant par $1-x$, qui est strictement positif, on obtient : $\dfrac{1}{1-x}\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\ln(1-x)+1$.

Ainsi : $\dfrac{g(x)-1}{x-1} = \dfrac{1}{1-x}\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant -\ln(1-x)+1$ pour tout élément x de $]0,1[$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to1}(-\ln(1-x)+1) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = +\infty}$. Par conséquent g n'est pas dérivable en 1.

<u>Exercice</u> *Retouver ce résultat en utilisant* $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$ *et le théorème des accroissements finis.*

d.

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$g(1)$

e. $\forall x \in [0,1[,\ g''(x) = (g')'(x) = f'(x) \geqslant 0$. g'' est positive sur $[0,1[$ donc $\boxed{g \text{ est convexe sur } [0,1[}$... et même sur $[0,1]$.

f. Courbe ! !

3. a. Ceci est un résultat de cours. Si t appartient à $[0,1[$, $|t|<1$ et : $\boxed{\text{la série de terme général } t^n \text{ converge}}$.

De plus $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ R_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}}$.

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $\boxed{R_n \text{ est continue sur } [0,1[}$ comme quotient de fonctions continues sur $[0,1[$.

c. Soit x un élément de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{n} t^k + R_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t}.$$

d. Reprenons n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1[$.

$\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant \dfrac{1}{1-t}\leqslant \dfrac{1}{1-x}$ et $t^{n+1}\geqslant 0$. Donc $\forall t\in[0,x],\ 0\leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\leqslant \dfrac{1}{1-x}\,t^{n+1}$.

En intégrant entre 0 et x ($0\leqslant x$) il vient :

$$0\leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x = \frac{x}{(1-x)(n+2)}\times x^{n+1}\leqslant \frac{x}{(1-x)(n+2)}\times 1.$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[,\ 0\leqslant \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)}}$.

e. Soit x un élément de $[0,1[$. c) donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{(n+2)(1-x)} = 0$, l'encadrement de d) donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = -\ln(1-x)$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0,1[, \text{ la série de terme général } \frac{x^{k+1}}{k+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)}$.

En divisant par x élément de $]0,1[$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} = f(x)$.

Ainsi : $\forall x\in]0,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}$. Ceci vaut encore pour $x=0$ car $f(0)=1$.

Donc $\boxed{\forall x\in[0,1[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k+1}}$.

4. a. Soit x un élément de $[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant \dfrac{x^n}{n^2}\leqslant \dfrac{1}{n^2}$. De plus la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n^2}$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0,1] \text{ la série de terme général } \frac{x^n}{n^2} \text{ converge}}$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1[,\ \rho_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{t^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k+1} = f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k+1}$.

f est continue sur $[0,1[$ et $t \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1}$ également. Par différence : $\boxed{\rho_n \text{ est continue sur } [0,1[}$ et ceci pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

c. Soit x un élémént de $[0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k+1} + \rho_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^x + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t}.$$

d. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et soit t un élément de $[0,1[$.

Observons que : $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Ainsi avons-nous :

$$0 \leqslant \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{1}{n+2}\, R_n(t) = \frac{1}{n+2}\,\frac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}}\ .$$

<u>Remarque</u> On peut encore retrouver ce résultat en utilisant 3 d).

e. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $[0,1[$. $\forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \dfrac{1}{(n+2)(1-t)}$.

En intégrant entre 0 et x $(0 \leqslant x)$ il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+2} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}\,\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x.$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2}}\ .$

f. Soit x un élément de $[0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \rho_n(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \leqslant -\frac{\ln(1-x)}{n+2}.$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{\ln(1-x)}{n+2}\right) = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} = g(x).$

Ou : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k^2} = g(x)$ c'est à dire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = g(x).$

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0,1[,\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}\ .$

<u>Exercice</u> Montrer que ceci vaut encore pour $x = 1$

(on pourra en utilisant la définition prouver que $\displaystyle\lim_{x\to1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$).
