PARTIE I

Q1 Remarque. Soit $\theta \in]0,\pi[$. $\pi-\theta \in]0,\pi[$ et $Q_n(\pi-\theta) = \frac{\sin((n+1)(\pi-\theta))}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{(-1)^{n+1}\sin(-(n+1)\theta)}{\sin\theta}$

donc $Q_n(\pi-\theta) = \frac{(-1)^{n+2}\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = (-1)^n Q_n(\theta)$!

Notons que cette égalité vaut encore pour $\theta=0$ ($Q_n(\pi) = (-1)^n (n+1)$ et $Q_n(0) = n+1$) et pour $\theta = \pi$ (... pour les mêmes raisons).

Finalement : $\forall \theta \in [0,\pi]$, $Q_n(\pi-\theta) = (-1)^n Q_n(\theta)$

a) Q_n est continue et dérivable sur $]0,\pi[$ (quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $]0,\pi[$).

$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \underset{0}{\sim} \frac{(n+1)\theta}{\theta} = n+1$. $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = n+1 = Q_n(0)$; par conséquent Q_n est continue en 0.

$\lim\limits_{\theta\to\pi^-} Q_n(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} Q_n(\pi-\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^+}\left[(-1)^n Q_n(\theta)\right] = (-1)^n(n+1) = Q_n(\pi)$; Q_n est continue en π

Finalement : Q_n est continue sur $[0,\pi]$ et dérivable sur $]0,\pi[$.

complément. Etudions la dérivabilité de Q_n en 0 et en π.

Soit $\theta \in]0,\pi[$. $\frac{Q_n(\theta)-Q_n(0)}{\theta-0} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - (n+1)\right] = \frac{1}{\theta\sin\theta}\left[\sin(n+1)\theta - (n+1)\sin\theta\right]$

$\frac{Q_n(\theta)-Q_n(0)}{\theta-0} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\theta^2}\left[\sin(n+1)\theta - (n+1)\sin\theta\right]$.

$\sin(n+1)\theta - (n+1)\sin\theta = (n+1)\theta - (n+1)\theta + o(\theta^2)$! $\sin(n+1)\theta - (n+1)\sin\theta = o(\theta^2)$; donc

$\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin(n+1)\theta - (n+1)\sin\theta}{\theta^2}\right) = 0$; $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{Q_n(\theta)-Q_n(0)}{\theta-0} = 0$.

Q_n est dérivable en 0 et $Q_n'(0) = 0$.

$\lim\limits_{\theta\to\pi} \frac{Q_n(\theta)-Q_n(\pi)}{\theta-\pi} = \lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{Q_n(\pi-\theta)-Q_n(\pi)}{-\theta}\right) = \lim\limits_{\theta\to 0}\left[\frac{(-1)^n Q_n(\theta) - (-1)^n(n+1)}{-\theta}\right] = (-1)^{n+1}\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{Q_n(\theta)-Q_n(0)}{\theta} = 0$

Q_n est dérivable en π et $Q_n'(\pi) = 0$.

b) Arc cos est continue sur $[-1,1]$ et prend ses valeurs dans $[0,\pi]$; Q_n est continue sur $[0,\pi]$. Par composition : $P_n = Q_n \circ \text{Arc cos}$ est continue sur $[-1,1]$.

Soit $x \in]-1,1[$. Arc cos est continue en x et Arc cos $x \in]0,\pi[$. Q_n étant dérivable en tout point de $]0,\pi[$, Q_n est dérivable en Arc cos x ; $P_n = Q_n \circ \text{Arc cos}$ est dérivable en x.

Par conséquent : P_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $P_n(-1)=Q_n(\mathrm{Arccos}\,-1)=Q_n(\pi)=(-1)^{n+1}(n+1)$.

$P_n(0)=Q_n(\mathrm{Arccos}\,0)=Q_n(\pi/2)=\dfrac{\sin\,(n+1)\pi/2}{\sin\pi/2}=\sin\,(n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$P_n(1)=Q_n(\mathrm{Arccos}\,1)=Q_n(0)=(n+1)$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $P_n'(0)=\mathrm{Arccos}'(0)\times Q_n'(\mathrm{Arccos}\,0)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}\times Q_n'(\pi/2)=-Q_n'(\pi/2)$.

$\forall\theta\in]0,\pi[,\ Q_n'(\theta)=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\left[(n+1)\cos[(n+1)\theta]\sin\theta-\sin[(n+1)\theta]\cos\theta\right]$; $Q_n'(\frac{\pi}{2})=(n+1)\cos[(n+1)\frac{\pi}{2}]$

$\forall n\in\mathbb{N},\ P_n'(0)=-(n+1)\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$.

Q3 a) Soit $x\in[-1,1]$.

- $P_0(x)=Q_0(\mathrm{Arccos}\,x)=1$ ($\forall\theta\in[0,\pi]$, $Q_0(\theta)=1$).
- $\forall\theta\in]0,\pi[,\ Q_1(\theta)=\dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}=2\cos\theta$; $Q_1(0)=2=2\cos 0$ et $Q_1(\pi)=-2=2\cos\pi$

Donc $\forall\theta\in[0,\pi], Q_1(\theta)=2\cos\theta$. $P_1(x)=Q_1(\mathrm{Arccos}\,x)=2x$

- On montre de la même manière que : $\forall\theta\in[0,\pi]$, $Q_2(\theta)=3-4\sin^2\theta$ en se souvenant que $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

$\forall\theta\in[0,\pi]$, $Q_2(\theta)=3-4(1-\cos^2\theta)=-1+4\cos^2\theta$. $P_2(x)=Q_2(\mathrm{Arccos}\,x)=4x^2-1$.

$\forall x\in[-1,1]$, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=2x$ et $P_2(x)=4x^2-1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : $\forall x\in[-1,1]$, $P_{n+2}(x)+P_n(x)=2x\,P_{n+1}(x)$ c'est montrer que : $\forall x\in[-1,1]$, $Q_{n+2}(\mathrm{Arccos}\,x)+Q_n(\mathrm{Arccos}\,x)=2x\,Q_{n+1}(\mathrm{Arccos}\,x)$, soit encore : $\forall\theta\in[0,\pi]$, $Q_{n+2}(\theta)+Q_n(\theta)=2\cos\theta\,Q_{n+1}(\theta)$.

Pour $\theta=0$: $Q_{n+2}(\theta)+Q_n(\theta)=Q_{n+2}(0)+Q_n(0)=n+3+n+1=2(n+2)=2\cos 0\ Q_{n+1}(0)$

Pour $\theta=\pi$: $Q_{n+2}(\theta)+Q_n(\theta)=Q_{n+2}(\pi)+Q_n(\pi)=(-1)^{n+3}(n+3)+(-1)^{n}(n+1)=(-1)^{n+2}2(n+2)=-2\,Q_{n+1}(\pi)=2\cos\pi\,Q_{n+1}(\pi)$

Soit $\theta\in]0,\pi[$.

$Q_{n+2}(\theta)+Q_n(\theta)=\dfrac{\sin(n+3)\theta+\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin\frac{(n+3)\theta+(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+3)\theta-(n+1)\theta}{2}}{\sin\theta}=2\cos\theta\,Q_{n+1}(\theta)$ ... cqfd.

Finalement : $\forall x\in[-1,1]$, $P_{n+2}(x)+P_n(x)=2x\,P_{n+1}(x)$.

c) Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynomiale (!) de degré n telle que : $\forall x\in[-1,1]$, $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$.

→ C'est clair pour $n=0$ et 1 car $\forall x\in[-1,1]$, $P_0(x)=1$ et $P_1(x)=2x$.

→ Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ ($n\in\mathbb{N}$). Montrons qu'elle est vraie pour $n+2$.

$\forall x\in[-1,1]$, $P_{n+2}(x) = 2x\,P_{n+1}(x) - P_n(x)$.

$\ell : x \mapsto 2x\,P_{n+1}(x)$ est polynomiale comme produit de deux fonctions polynomiales et P_n est polynomiale. P_{n+2} est donc polynomiale comme différence de deux fonctions polynomiales.

$\deg \ell = n+2$ car $\deg P_{n+1} = n+1$. $\deg P_{n+2} = \deg(\ell - P_n) \underset{\uparrow}{=} \deg \ell = n+2$.

$n+2 = \deg \ell \neq \deg P_n = n$

Il ne reste plus qu'à montrer le troisième point.

$\forall x\in[-1,1]$, $P_{n+2}(-x) = 2(-x)P_{n+1}(-x) - P_n(-x) = -2x(-1)^{n+1}P_{n+1}(x) - (-1)^n P_n(x) = (-1)^{n+2}\left[2x P_{n+1}(x) - P_n(x)\right]$

$\forall x\in[-1,1]$, $P_{n+2}(-x) = (-1)^{n+2}P_{n+2}(x)$, ce qui achève la récurrence.

<u>Pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est polynomiale de degré n et a la parité de n</u> (car $\forall x\in[-1,1]$, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$).

Q4 <u>a)</u> Notons que $\theta \mapsto \sin(n+1)\theta/\sin\theta$ est continue sur $]0,a[$.

Si $a<\pi$ le problème se situe en 0 ; si $a=\pi$ il y a problème en 0 et π.

Dans les deux cas ce sont de faux problèmes car $\theta\mapsto \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ est prolongeable par continuité aussi bien en 0 qu'en π (voir Q_1 !)

<u>b)</u> D'une pierre deux coups !

$x\mapsto \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0,1[$ donc localement intégrable.

Soit $\alpha\in[0,1[$. $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi/2}^{\operatorname{Arccos}\alpha} \frac{Q_n(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta\, d\theta) = \int_{\operatorname{Arccos}\alpha}^{\pi/2} Q_n(\theta)\,d\theta.$

$\theta = \operatorname{Arccos} x$
$\cos\theta = x$
$-\sin\theta\, d\theta = dx$

$\lim_{\alpha\to1} \operatorname{Arccos}\alpha = 0$ donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int_{\operatorname{Arccos}\alpha}^{\pi/2} Q_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}Q_n(\theta)\,d\theta$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{\alpha\to1}\int_0^\alpha \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2}Q_n(\theta)\,d\theta$.

Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^{\pi/2}Q_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta$.

PARTIE II

Q1 Pour la 1000^e fois !

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{\sin nx}_{v'}\,dx = \left[-\frac1n f(x)\cos nx\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac1n \cos nx\,dx$

$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| = \left|\frac1n\left[-f(b)\cos nb + f(a)\cos na + \int_a^b f'(x)\cos nx\,dx\right]\right|$

$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right| \le \frac1n\left[|f(b)||\cos nb| + |f(a)||\cos na| + \int_a^b|f'(x)||\cos nx|\,dx\right] \le \frac1n\left[|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b|f'(x)|\,dx\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(x)|\,dx\right]=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

(Q2) a) g est évidemment continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{-x^3/6}{x^2} = -\frac{x}{6}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x}{6}\right) = 0 = g(0)$

g est donc continue en 0. ↑ $\sin x = x - \frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

Par conséquent g est continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

b) g est continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$

$\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2\sin^2 x}(x^2\cos x-\sin^2 x)$; g' est donc continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]-\{0\}$

Pour montrer que g est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ il ne reste plus qu'à montrer que g est dérivable en 0 et que g' est continue en 0. D'après le théorème "du prolongement de la dérivée" ceci sera clair si $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ existe et est finie.

$g'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^4}(x^2\cos x-\sin^2 x)$. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^4)$ donc $x^2\cos x = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$.

$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ donc $\sin^2 x = x^2 - 2\times x\times\frac{x^3}{6}+o(x^4)$.

$x^2\cos x-\sin^2 x = x^2-\frac{x^4}{2}-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4) = -\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$; $x^2\cos x-\sin^2 x \sim -\frac{1}{6}x^4$.

$g'(x)\underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}$; $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -1/6$.

g est dérivable en 0, $g'(0)=-1/6$ et g' est continue en 0.

Finalement g est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

PARTIE III

(Q1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

a) φ_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{x} = n$ car $\sin nx \underset{0}{\sim} nx$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{x} = \varphi_n(0)$ ce qui prouve la continuité de φ_n en 0.

Finalement φ_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) La convergence de $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ résulte de la convergence de $\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx$ que la continuité de φ_1 sur $[0,1]$ assure.

φ_1 est continue sur $[1,+\infty[$ donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$.

Montrons la convergence de $\int_1^{+\infty}\varphi_1(x)\,dx$

Soit $A \in]1,+\infty[$. $\displaystyle\int_1^A \varphi_1(x)\,dx = \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\, \underbrace{\sin x}_{v'}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos x)\,dx$

$\displaystyle\int_1^A \varphi_1(x)\,dx = -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx$.

$\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leq \frac{1}{A}$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{\cos A}{A}\right) = 0$; ceci montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Montrons donc que cette dernière intégrale est convergente. En fait nous allons montrer qu'elle est absolument convergente.

$\forall x \in [1,+\infty[$ $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ étant convergente : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ aussi.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est convergente car absolument convergente. Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ qui est de même nature est convergente.

<u>Conclusion</u>.- $\displaystyle\int_0^1 \varphi_1(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ sont convergentes ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx$ aussi. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe.

On se propose de montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Avant cela montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ n'est pas absolument convergente bien que convergente (il en sera de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$) ; montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi_1(x)|\,dx$ diverge.

$\forall x \in [1,+\infty[$, $|\varphi_1(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$ car $|\sin x| \leq 1$ pour tout réel x.

Pour avoir la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi_1(x)|\,dx$ il suffit d'obtenir la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

Or $\forall x \in [1,+\infty[$, $\dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\cos 2x}{x}$

Remarquons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}\,dx$ diverge ; pour avoir la <u>divergence</u> de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2x}{x}\right) dx$ <u>il suffit donc</u> d'obtenir la <u>convergence</u> de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\,\frac{\cos 2x}{x}\right) dx$ ou de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$!!

Cette convergence s'obtient de la même manière que celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Voyons cela !

Soit $A \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{x}\,\frac{\sin 2x}{2}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\frac{\sin 2x}{2}\,dx$

$$= \frac{\sin 2A}{2A} - \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\sin 2A}{2A} = 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$.

$\forall x \in [1,+\infty[$, $0 \leq \left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| dx$ aussi ; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ est convergente car absolument convergente. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ étant de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ est convergente. C'est ce qu'il fallait montrer pour obtenir la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$.

Q2 N'aimant pas qu'il soit admissible d'admettre que l'existence de I_n soit admise.

Voir aussi IQ4!

$\varphi : x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc localement intégrable.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n$ car $\frac{\sin nx}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{nx}{x} = n$; φ est donc prolongeable par continuité en 0.

Par conséquent $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}$ dx existe. Ce qui prouve l'existence de I_n.

a) $I_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 0x}{\sin x}\,dx = 0$. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. $I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx = [2\sin x]_0^{\pi/2} = 2$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\left(\frac{(n+2)x+nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+2)x-nx}{2}\right)}{\sin x}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos(n+1)x\,dx$$

$$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1}\left[\sin(n+1)x\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n+1}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Supposons n pair. $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} - I_n = I_{2p+2} - I_{2p} = \frac{2}{2p+1}\sin\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2(-1)^p}{2p+1}$.

Supposons n impair. $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} - I_n = I_{2p+3} - I_{2p+1} = \frac{2}{2p+2}\sin\left((2p+2)\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Cette dernière ligne prouve que $(I_{2p+1})_{p\geq 0}$ est constante.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n = I_{2n+1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$. $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \frac{\pi}{2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_{2n} - I_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (I_{2k+2} - I_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$. $I_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$ car $I_0 = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad J_n = I_{2n} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{\uparrow \text{IQ4}}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta = I_{n+1}$

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ 2\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \text{si } n \text{ est impair} \quad (\dots\ n = 2p+1 ;\ n+1 = 2(p+1) ;\ p+1-1 = p = E(\tfrac{n}{2})\ !) \end{cases}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2nx}{\sin x} - \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\right)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx - \sin 2nx\cos x - \cos 2nx \sin x}{\sin x}\,dx.$$

$$J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\sin 2nx - \cos 2nx\right)dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\sin^2 x/2}{2\sin x/2 \cos x/2}\sin 2nx - \cos 2nx\right)dx$$

$$J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \left(\tan\frac{x}{2}\sin 2nx\right)dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2nx\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \tan\frac{x}{2}\,dx - \underbrace{\left[\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi/2}}_{=0\,!}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \tan\frac{x}{2}\,dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nx)\tan\frac{x}{2}\,dx \underset{u=2x}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(nu)\tan\frac{u}{4}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(nx)\tan\frac{x}{4}\,dx$.

$x \mapsto \tan\frac{x}{4}$ est clairement de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi}\sin(nx)\tan\frac{x}{4}\,dx\right) = 0$ d'après II.1. (1ère fois)

Finalement : $\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.

d) $0 = \lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = \lim_{n\to+\infty}(I_{2n} - I_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_{2n} - \frac{\pi}{2}\right)$; par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = \frac{\pi}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = \pi/2$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = \lim_{n\to+\infty} I_{2n+1} = \pi/2$ et donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}}}$

<u>Remarque</u>.. $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ donne : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$ ... ce qui n'est pas nouveau !

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in]0, \pi/2]$. $\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = -\int_a^{\pi/2}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$.

Par conséquent ~~montrer que~~ $\left(\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right)_{n\geq 0}$ a même limite que $(I_n)_{n\geq 0}$ revient à montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_a^{\pi/2} \sin nx \times \frac{1}{\sin x}\,dx = 0$; pour cela il suffit de montrer que $\ell : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est de classe C^1 sur $[a, \frac{\pi}{2}]$ (d'après II.1 ... 2ème fois)

ℓ est dérivable sur $[a,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [a,\frac{\pi}{2}]$, $\ell'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; ℓ' est continue sur $[a,\frac{\pi}{2}]$!

ℓ est bien de classe C^1 sur $[a,\frac{\pi}{2}]$ ... et donc $\left(\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$!

Soit $n \in \mathbb{N}$

(Q3) a) φ_n est continue sur $\mathbb{R}$ (III Q1) donc $\int_0^a \varphi_n(x)\,dx$ existe ; $\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx$ aussi.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int_0^a \sin nx\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)dx \underset{\text{II.2}}{=} \int_0^a \sin nx\, g(x)\,dx.$$

g est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc sur $[0,a]$, par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^a \sin(nx) g(x)\,dx\right] = 0$ (II.1 3ème fois)

donc $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right] = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

Par addition : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. (addition ... de suites convergentes)

donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \pi/2$ pour $a \in]0,\frac{\pi}{2}]$.

c.. Soit $a \in]\frac{\pi}{2}, +\infty[$. $\int_{\pi/2}^{a} \varphi_n(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{a} \frac{1}{x}\sin nx\,dx$ et comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $[\pi/2, a]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\pi/2}^{a} \frac{1}{x}\sin nx\,dx = 0$ (II.1 4ième fois !)

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\pi/2}^{a} \varphi_n(x)\,dx = 0$!

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^a \varphi_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \varphi_n(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{a} \varphi_n(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^a \varphi_n(x)\,dx\right) = \frac{\pi}{2}$.

Q4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^a \varphi_n(x)\,dx = \int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx \underset{u=nx}{=} \int_0^{na} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{na} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = L$; en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{na} \frac{\sin x}{x}\,dx = L$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a \varphi_n(x)\,dx = L$.

Par conséquent d'après (1) : $L = \pi/2$

Finalement : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2$.

Voici un énoncé raisonnable pour montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Q1.. montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

Q2.. montrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$.

Q3.. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ (faire une différence et utiliser Q2)

Q4.. Conclure à l'aide d'un changement de variable.