PARTIE A

Q1 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

$\frac{1}{1+x} = 1-x+o(x)$ au voisinage de 0 ; $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Alors $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = x - x^2 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Ainsi $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Q2 $-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} +\frac{1}{2n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2}\geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge ; les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-v_n$ converge.

La série de terme général v_n converge.

Q3 Posons $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$; $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k = V$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_1 + V$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On pose désormais $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$

Pour les amateurs : $\gamma \simeq$ 0,577 215 664 901 532 860 606 512 090
082 402 431 042 159 335 939 923 598
805 767 234 884 867 726 777 664 670
936 947 063 291 746 749 514 631 447
249 8 $(\pm\ 10^{-112})$.

PARTIE B

(Q1) $i : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et $i(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$.

$\lim_{x\to 0} i(x) = 1$. i est prolongeable par continuité en 0, $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $i_n : x \mapsto \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0,1]$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1 \underset{0}{\sim} n\times\left(-\frac{x}{n}\right) = -x$; $i_n(x) \underset{0}{\sim} \frac{-(-x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} i_n(x) = 1$.

i_n est prolongeable par continuité en 0. $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)dx$ converge.

(Q2) a) $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = \ln'1(x-1)+\ln 1$ ou $y = x-1$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$ ou $\forall t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

b) Soit $x \in [0,n[$; $-\frac{x}{n} > -1$; $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$; $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -x$;

$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq -x$. La croissance de la fonction exp donne $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

Notons que cette inégalité vaut encore pour $x=n$ $(0 \leq e^{-n}\,!)$

Ainsi $\forall x \in [0,n]$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

c) $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $1-\frac{x}{n} > 0$ et $1-\frac{x^2}{n} > 0$.

Ainsi φ_n est définie et dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$.

$\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $\varphi_n'(x) = 1 + n\dfrac{(-1/n)}{1-\frac{x}{n}} - \dfrac{(-2x/n)}{1-x^2/n} = 1 - \dfrac{n}{n-x} + \dfrac{2x}{n-x^2}$.

$\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $\varphi_n'(x) = \dfrac{1}{(n-x)(n-x^2)}\left((n-x)(n-x^2) - n(n-x^2) + 2x(n-x)\right)$

$\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $\varphi_n'(x) = \dfrac{1}{(n-x)(n-x^2)}\left(n^2-nx^2-nx+x^3-n^2+nx^2+2xn-2x^2\right)$

$\forall x\in[0,\sqrt{n}[,\ \varphi_n'(x)=\dfrac{x}{(n-x)(n-x^2)}\left(x^2-2x+n\right)=\dfrac{x}{(n-x)(n-x^2)}\left[(x-1)^2+n-1\right]\geqslant 0.$

φ_n est croissante sur $[0,\sqrt{n}[$.

Ainsi $\forall x\in[0,\sqrt{n}]$, $0=\varphi_n(0)\leqslant\varphi_n(x)=x+n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)$.

$\forall x\in[0,\sqrt{n}[$, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\geqslant\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)-x=\ln\left(\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}\right)$.

Alors $\forall x\in[0,\sqrt{n}[$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\geqslant\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}$.

d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,n]$.

1er cas. $x\in[0,\sqrt{n}[$. c) donne alors $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}\leqslant\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

2e cas. $x\in[\sqrt{n},n]$.

Alors $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}\leqslant 0$ et $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\geqslant 0$ donc $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}\leqslant\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,n]$, $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}\leqslant\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

Q3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall x\in]0,1]$, $\frac{1}{x}>0$ et $1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\overset{Q2\,d)}{\leqslant}1-\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x}=1-e^{-x}+\frac{x^2}{n}e^{-x}$.

$\forall x\in]0,1]$, $\frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\leqslant\frac{1-e^{-x}}{x}+\frac{x^2}{n}e^{-x}$.

En intégrant il vient : $I_n\leqslant I+\int_0^1\frac{x^2}{n}e^{-x}dx$ (les trois intégrales existent non ?!)

Q2 b) permet de dire que : $\forall x\in]0,\ ]$, $\frac{1}{x}>0$ et $1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\geqslant 1-e^{-x}$

Alors $\forall x\in]0,1]$, $\frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\geqslant\frac{1-e^{-x}}{x}$. En intégrant il vient $I_n\geqslant I$.

Finalement : $I \leq J_n \leq J + \frac{1}{n}\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^1 x^2 e^{-x} dx\right) = 0$; par encadrement on obtient : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = I}}$.

Q4 $f : x \mapsto \frac{1}{x} e^{-1/x}$ est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}e^{-1/x}\right) = 0$ donc

$\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$ existe. Car $\lim\limits_{X\to+\infty}(Xe^{-X}) = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$.

$y \mapsto \frac{e^{-y}}{y}$ est continue sur $[1,+\infty[$; $\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{e^{-y}}{y} dy \underset{\substack{y=\frac{1}{x}\\ x=1/y}}{=} \int_1^{1/A} x e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$.

$\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{1/A}^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A} = 0$ et $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-1/x} dx$ converge. Ainsi $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y} dy$ converge et vaut $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y} dy \text{ existent et sont égales.}}}$

Q5 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Q2 a) et d) donnent :

$\forall x\in[0,n]$, $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x} \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

$\forall x\in[1,n]$, $\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{n} x e^{-x} \leq \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{x}e^{-x}$.

En intégrant il vient : $\int_1^n \frac{1}{x} e^{-x} dx - \frac{1}{n}\int_1^n x e^{-x} dx \leq J_n \leq \int_1^n \frac{1}{x} e^{-x} dx$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{1}{x} e^{-x} dx = J$.

$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ existe ($\Gamma(2)$) ; $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$ existe également ; ainsi la suite de terme général $\int_1^n x e^{-x} dx$ converge. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^n x e^{-x} dx\right) = 0$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}dx - \frac{1}{n}\int_1^n x e^{-x}dx\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}dx = J$.

Par conséquent on déduit : $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = J}}$.

(Q6) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $h_n : x \mapsto \frac{1-(1-x)^n}{x}$ est continue sur $]0,1]$.

$(1+(-x))^n-1 \underset{x\to 0}{\sim} n(-x)$; $1-(1-x)^n \underset{0}{\sim} nx$; $h_n(x) \underset{0}{\sim} n$.

$\lim\limits_{x\to 0} h_n(x) = n$; h_n est prolongeable par continuité en 0. $\underline{\underline{K_n = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx \text{ existe}}}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in]0,1]$, $\frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \sum_{\ell=0}^{n-1}(1-x)^\ell$.

Alors $K_n = \int_0^1 \sum_{\ell=0}^{n-1}(1-x)^\ell dx = \sum_{\ell=0}^{n-1}\int_0^1 (1-x)^\ell dx = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{\ell+1}}{\ell+1}\right]_0^1 = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}$

Intégrales "propres" !

Ainsi $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, K_n = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}}}$.

(▲) En toute rigueur, pour la 1ère, $\int_\varepsilon^1 \dots$ OK ?!

(Q7) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $I_n - J_n = \int_0^n \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)dx - \int_1^n \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$

$$I_n - J_n \underset{u=\frac{x}{n}}{\overset{(▲)}{=}} \int_0^{1} \frac{1}{nu}(1-(1-u)^n)\,n\,du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{nu}(1-u)^n\,n\,du$$

$$I_n - J_n = \int_0^1 \frac{1}{u}(1-(1-u)^n)du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-(1-u)^n)du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du$$

$$I_n - J_n = K_n - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}du + \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du = K_n - [\ln|u|]_{1/n}^1.$$

les intégrales ici (3) sont convergentes.

Alors $I_n - J_n = K_n + \ln(1/n)$. $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, I_n - J_n = K_n - \ln n}}$.

b) $\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = I - J$ (Q3 et Q5). $\lim_{n\to+\infty} (K_n - \ln n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$.

Alors $I - J = \gamma$. Ce qui s'écrit $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-1/x} dx = \gamma$.

Par conséquent : $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-1/x}}{x} dx = \gamma$.

PARTIE C

Q1 a) $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(\ell)} = (-1)^\ell \varphi$.

La formule de Taylor avec reste intégral permet alors d'écrire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{x^\ell}{\ell!} (-1)^\ell \varphi(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} (-1)^{p+1} \varphi(t)\, dt.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t}\, dt \quad \text{ok ?}$$

Soit p dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$. $\forall t \in [0,x]$, $\frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$!

Ainsi $\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} dt \geqslant 0$.

Ce Alors $(-1)^{p+1} \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} dt$ est positif si p est impair et négatif si p est pair.

Par conséquent : $e^{-x} \geqslant \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$ si p est impair et $e^{-x} \leqslant \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$ si p est pair.

Plus de doute : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-x)^\ell}{\ell!} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{\ell=0}^{2n} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x dans $]0,1]$. Ce qui précède donne :

$$\frac{1}{x}\left(1 - \sum_{\ell=0}^{2n} (-1)^\ell \frac{x^\ell}{\ell!}\right) \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}\left(1 - \sum_{\ell=0}^{2n-1} (-1)^\ell \frac{x^\ell}{\ell!}\right)$$

Ainsi $\frac{1}{x} \sum_{\ell=1}^{2n} (-1)^{\ell+1} \frac{x^\ell}{\ell!} \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x} \sum_{\ell=1}^{2n-1} (-1)^{\ell+1} \frac{x^\ell}{\ell!}$ ou : $\sum_{\ell=1}^{2n} (-1)^{\ell+1} \frac{x^{\ell-1}}{\ell!} \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \sum_{\ell=1}^{2n-1} (-1)^{\ell+1} \frac{x^{\ell-1}}{\ell!}$.

A SUIVRE

En intégrant il vient : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 x^{k-1}dx \leq I \leq \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 x^{k-1}dx$ car toutes les intégrales existent.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^{k-1}dx = \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,k!} \leq I \leq \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k\,k!}$

En posant $i=k-1$ et en remarquant que $(-1)^{i+2}=(-1)^i$ il vient :

$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} \leq I \leq \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

En retranchant le dernier terme de l'inégalité il vient :

$$-\frac{1}{(2n)!\,2n} \leq I - \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} \leq 0, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

---

c) $\sum_{i=0}^{2n-2} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ est une valeur approchée de I à $0,5\times 10^{-3}$ dès que $\frac{1}{(2n)!\,2n} \leq 0,5\times10^{-3}$. ceci a lieu dès que n est supérieur ou égal à 3.

Alors $\sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ est une valeur approchée de I à $0,5\times10^{-3}$.

$$\sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} + \frac{1}{600} = \frac{5737}{7200}.$$

$\frac{5737}{7200}$ est une valeur approchée de I à $0,5\times10^{-3}$; $\frac{5737}{7200} \simeq 0,7968$.

Q2 a) Soit $x\in[1,+\infty[$. $\forall y\in[x,+\infty[$, $0\leq \frac{e^{-y}}{y} \leq \frac{e^{-y}}{x}$

$\forall A\in[x,+\infty[$, $0 \leq \int_x^A \frac{e^{-y}}{y}dy \leq \frac{1}{x}\int_x^A e^{-y}dy = \frac{1}{x}(e^{-x}-e^{-A})$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient : $0 \le \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \le \frac{e^{-x}}{x}$

$\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \le \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \le \frac{e^{-x}}{x}$.

b) Si $x_0 = 7$: $\frac{e^{-x_0}}{x_0} \simeq 1,302 \times 10^{-4}$; Si $x_0 = 7$: $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 \times 10^{-3}$.

c) $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$

Alors $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \le \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy}_{J} \le \int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$

Ainsi $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ est une valeur approchée de J à $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$.

Or $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \le \frac{e^{-7}}{7} < 0,25 \times 10^{-3}$ et $0,2193$ est une valeur approchée de $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ à $0,25 \times 10^{-3}$

Alors 0,2193 est une valeur approchée de J à $0,25 \times 10^{-3}$ près.

d) $\gamma = I - J$

Il résulte de ce qui précède que $\frac{5737}{7000} - 0,2193$ est une valeur approchée de γ à 10^{-3}.

Nous obtenons ainsi que : 0,577 est une valeur approchée de γ à 10^{-3}.