Q1.- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $t \mapsto t^k e^t$ est continue donc localement intégrable sur $]-\infty,0]$.

$\lim\limits_{t\to-\infty}(t^2\, t^k e^t)=0$; $\exists A \in \mathbb{R}_-^*$, $\forall t \in]-\infty, A]$, $|t^2 t^k e^t| \leq 1$

$\forall t \in]-\infty, A]$, $0 \leq |t^k e^t| \leq \frac{1}{t^2}$

Or $\int_{-\infty}^{A} \frac{dt}{t^2}$ converge ; par conséquent : $\int_{-\infty}^{A} |t^k e^t|\,dt$ converge (règles de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives).

Donc $\int_{-\infty}^{A} t^k e^t\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{0} t^k e^t\,dt$ existe pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Q2.. Soit f un élément de $E=\mathbb{R}_n[X]$. $\exists (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $f=\sum_{k=0}^{n} a_k f_k$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $t \mapsto f(t)e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent : $\int_0^x f(t)e^t\,dt$ existe pour tout réel x.

$\forall t \in]-\infty,0]$, $f(t)e^t = \sum_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)$. Comme pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\int_{-\infty}^{0} t^k e^t\,dt$ existe : $\int_{-\infty}^{0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)\right)dt$ aussi ! $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^t\,dt$ converge.

Par conséquent pour tout réel x, $\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt$ existe ; $x \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt$ est donc une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Q 3 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. $L(f_0)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^t\,dt = e^{-x}\lim\limits_{A\to-\infty}\left(\int_A^x e^t\,dt\right) = e^{-x}\times\lim\limits_{A\to-\infty}(e^x-e^A) = e^{-x}e^{x}=1$

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{x} e^t\,dt = e^x$

$L(f_0)=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} te^t\,dt = \lim\limits_{A\to-\infty}\left(\int_A^x te^t\,dt\right) = \lim\limits_{A\to-\infty}\left[[te^t]_A^x - \int_A^x e^t\,dt\right] = xe^x - e^x$

Donc $L(f_1)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} te^t\,dt = x-1$; $L(f_1) = -f_0 + f_1$

Soit $x\in\mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} t^2e^t\,dt = \lim\limits_{A\to-\infty}\left(\int_A^x t^2e^t\,dt\right) = \lim\limits_{A\to-\infty}\left([t^2e^t]_A^x - 2\int_A^x te^t\,dt\right) = x^2e^x - 2\int_{-\infty}^{x} te^t\,dt$

$\int_{-\infty}^{x} t^2e^t\,dt = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2-2x+2)e^x$

$L(f_2)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t\,dt = (x^2 - 2x + 2)$. $\quad \underline{\underline{L(f_2) = 2f_0 - 2f_1 + f_2}}$

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $A \in]-\infty, 0]$. $\displaystyle\int_A^x t^{k+1}e^t\,dt = \left[t^{k+1}e^t\right]_A^x - \int_A^x (k+1)t^k e^t\,dt = x^{k+1}e^x - A^{k+1}e^A - (k+1)\int_A^x t^k e^t\,dt$

En faisant tendre A vers $-\infty$ on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^x t^{k+1}e^t\,dt = x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^x t^k e^t\,dt$ (... les intégrales convergent)

En multipliant par e^{-x} il vient : $L(f_{k+1})(x) = x^{k+1} - (k+1)\,L(f_k)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f_{k+1})(x) = f_{k+1}(x) - (k+1)L(f_k)(x)$.

Donc : $\underline{\underline{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ L(f_{k+1}) = f_{k+1} - (k+1)L(f_k).}}$

Déduisons en que $L(f_k) = (-1)^k k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} f_j$ (pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, camarade conception !)

Si $k=0$ c'est clair ; supposons $k \in [\![1, n]\!]$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $L(f_{j+1}) = f_{j+1} - (j+1)L(f_j)$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{L(f_{j+1})}{(j+1)!} + \dfrac{L(f_j)}{j!} = \dfrac{f_{j+1}}{(j+1)!}$ (divisions par $(j+1)!$)

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - \dfrac{(-1)^j L(f_j)}{j!} = \dfrac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$ (multiplication par $(-1)^{j+1}$)

Donc : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(f_j)}{j!}\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$

ou : $\displaystyle\frac{(-1)^{k-1+1}L(f_k)}{k!} - \frac{(-1)^0 L(f_0)}{0!} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!}$

Il vient alors $\displaystyle\frac{(-1)^k L(f_k)}{k!} = f_0 + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j$

Donc $\displaystyle L(f_k) = \frac{k!}{(-1)^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j$

Et finalement $\underline{\underline{\displaystyle L(f_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}f_j}}$ et ceci pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Remarque.. s'obtient aussi à l'aide d'une petite récurrence.

c) Soit $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ L(f)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(t) e^t\,dt \overset{\text{les } n \text{ intégrales convergent.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \varphi_k(t) e^t\,dt = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k)\right)(x)$

$\forall k \in [\![0,n]\!],\ L(\varphi_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\varphi_j \in E$

donc $L(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k) \in E$

$\forall f \in E,\ L(f) \in E.$

Q4.. a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ [L(\lambda f + g)](x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t) e^t\,dt \overset{\text{les intégrales cvg}}{=} \lambda e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt + e^{-x}\int_{-\infty}^{x} g(t)e^t\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R},\ [L(\lambda f + g)](x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x) = (\lambda L(f) + L(g))(x).$

donc $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$

donc L est un endomorphisme de E

Soit $f \in \mathrm{Ker}\, L$. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt = 0$; $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{0} f(t)e^t\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\, e^t\,dt = 0.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,e^t\,dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)e^t\,dt$; $x \mapsto \int_0^x f(t)e^t\,dt$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et c'est la

primitive de $t \mapsto f(t)e^t$ qui s'annule en 0. donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,e^x = 0$ (la dérivée d'une fonction constante est nulle). Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Donc $\mathrm{Ker}\, L = \{0_E\}$.

L est alors injectif et donc bijectif car L est un endomorphisme de E et $\dim E = n+1 < +\infty$!

Remarque.. Arrêtons nous quelques instants pour stigmatiser le côté artificiel et BIDON de cet exercice.

De quoi parle-t-on ? De pas grand chose ! En effet déterminons L^{-1}

Soit $g \in E$ et $f = L^{-1}(g)$.

$g = L(f)$. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt$; $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^t\,dt$

Dérivons ; $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x g(x) + e^x g'(x) = f(x) e^x$

Il vient alors $f(x) = g(x) + g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Donc $\underline{\underline{\forall g\in E,\ L^{-1}(g) = g+g'}}$. En clair $L^{-1} = Id_E + D$ où D est l'opérateur de dérivation ! Indigeste non ! mais le plus beau est à venir.

b) Rappelons que $\forall \ell\in [\![0,n]\!]$, $L(p_\ell) = (-1)^\ell \ell! \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(-1)^j}{j!} p_j$

Donc si $B = (p_0, p_1, \dots, p_n)$: $M = M_B(L) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \cdots & (-1)^\ell \ell! & \cdots & (-1)^n n! \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{\ell-1}\ell! & \cdots & (-1)^{n-1} n! \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{\ell-2}\frac{\ell!}{2!} & \cdots & (-1)^{n-2}\frac{n!}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Notons bien que $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

M est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée de 1

Ceci donne donc de l'inversibilité à M ce qui était déjà clair car M est la matrice d'un automorphisme de E.

$M^{-1} = M_B(L^{-1})$. $\quad \underline{L^{-1}(p_0) = p_0}$ car $L(p_0) = p_0$

Soit $\ell\in[\![0,n-1]\!]$. $L(p_{\ell+1}) = p_{\ell+1} - (\ell+1) L(p_\ell)$ donc

$\forall \ell\in[\![0,n-1]\!]$, $\quad p_{\ell+1} = L^{-1}(p_{\ell+1}) - (\ell+1) p_\ell$

$\forall \ell\in[\![0,n-1]\!]$, $\quad L^{-1}(p_{\ell+1}) = p_{\ell+1} + (\ell+1) p_\ell = (\ell+1) p_\ell + p_{\ell+1}$

Ceci donne $\underline{\underline{\forall \ell\in[\![1,n]\!],\quad L^{-1}(p_\ell) = \ell\, p_{\ell-1} + p_\ell}}$.

Ceci confirme le $L^{-1} = Id_E + D$!

$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & 1 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & n \\ (0) & & & 1 \end{bmatrix}$ (matrice triangulaire à diagonale unité ... pas surprenant ... M ...)

<u>Exercice</u> .. Inverser M^{-1} en résolvant un système (réponse : on retrouve M !! mais la résolution du système est intéressante à mettre en forme).

Q5.. L'apothéose ! Camarade concepteur l'algèbre <u>LINEAIRE</u> n'est pas compatible avec l'usage immodéré de la boisson

En effet Q4 b) donne $\mathrm{Spec}(M) = \{1\}$. Alors si M est diagonalisable,

M est semblable à I_{n+1} donc égale à I_{n+1} ($PI_{n+1}P^{-1}=I_{n+1}$!!) ce qui n'est pas !
Donc M n'est pas diagonalisable. L ne l'est pas davantage.
Alors résoudre une équation différentielle pour prouver cela est inévitable.
Mais... spéculons nous !

a) $\lambda \in \operatorname{Spec} L$ et f est un vecteur propre de L associé à λ.
$0 \notin \operatorname{Spec} L$ car L est injective ($\operatorname{Ker}(f - 0.\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$).
$L(f) = \lambda f$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt = \lambda f(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt = \lambda e^{x} f(x)$. Par dérivation (déjà justifiée) :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)e^{x} = \lambda e^{x} f(x) + \lambda e^{x} f'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda f(x) + \lambda f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-\lambda) f(x) = \lambda f'(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}x} f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -\frac{1-\lambda}{\lambda} e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}x} f(x) + e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}x} f'(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}x}\underbrace{\left((1-\lambda)f(x) - \lambda f'(x)\right)}_{=0}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$. φ est donc constante. $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c$

b) ceci donne alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c\,e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}x}$. c n'est pas nul car $f \neq 0_E$.

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, f admet une limite nulle en $-\infty$ et infinie en $+\infty$, ceci est incompatible avec le caractère polynômial de f (si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ou P admet une limite finie en $+\infty$ ET $-\infty$ ou P admet une limite infinie en $+\infty$ ET $-\infty$; OK ?!)

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$, f admet une limite infinie en $-\infty$ et nulle en $+\infty$, ceci est impossible car $f \in E$.

Donc $\frac{1-\lambda}{\lambda} = 0$! $\lambda = 1$ ... et $f \in \operatorname{Vect}(1) = \operatorname{Vect}(f_0)$

Ceci prouve que 1°.. $\operatorname{Spec}(L) \subset \{1\}$
2°.. $F_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}(f_0)$.

Or $f(f_0) = f_0$ et $f_0 \neq 0_E$ donc $1 \in \operatorname{Spec}(L)$ et $f_0 \in F_1$ (ou $\operatorname{Vect}(f_0) \subset F_1$).
"Articulation fondamentale"

Conclusion.. $\operatorname{Spec} L = \{1\}$ et $F_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(f_0)$.
L n'est pas diagonalisable car $\dim F_1 = 1 < n+1 = \dim E$.

Remarque.. Vous souvenez vous qu'en 87 à LYON on diagonalisait un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique était diagonale !! Guignol n'est toujours pas mort.