LYON 1990 **2ème PROBLÈME**

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.

ln désigne le logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

PARTIE A. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2n^2}$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$?

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

   On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

PARTIE B. Expression intégrale de γ.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\, dx$ existe,

   et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx$ existe.

2. a. Montrer que, pour tout $t \in \left]-1\,;+\infty\right[$: $\ln(1+t) \leq t$.

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0\,;n]$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

   c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : \left[0\,;\sqrt{n}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

   $$\varphi_n(x) = x + n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right).$$

   d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0\,;n]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers I.

4. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$ existent et sont égales.

   On note $J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_1^n \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

5. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge vers J.

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx$ existe.

b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - J_n = K_n - \ln n$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,dx = \gamma$.

PARTIE C. Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \quad \text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\,(l+1)} \leq I \leq \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\,(l+1)},$$

puis $$-\frac{1}{(2n)!\,2n} \leq I - \sum_{l=0}^{2n-2} \frac{(-1)^l}{(l+1)!\,(l+1)} \leq 0.$$

c. Donner une valeur approchée de I à $0{,}5.10^{-3}$ près.

2. a. Montrer : $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $0 \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

b. Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\dfrac{e^{-x_0}}{x_0} < 0{,}25 \,.\, 10^{-3}$.

c. On admet que $\displaystyle\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ vaut $0{,}2193$ à $0{,}25 \,.\, 10^{-3}$ près.

Donner une valeur approchée de J à $0{,}5.10^{-3}$ près.

d. Conclure.