PROBLÈME 1 | PARTIE A

(Q1) - $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est la base canonique. On pose $E=\mathbb{C}^4$

Soit u un élément de E de matrice $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow JX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda y\\ t=\lambda z\\ x=\lambda t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda y=\lambda^2 x\\ t=\lambda z=\lambda^3 x\\ x=\lambda t=\lambda^4 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda^4)x=0\\ y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases}.$$

1er cas - $\lambda^4\neq 1$.

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\lambda x=0\\ z=\lambda^2 x=0\\ t=\lambda^3 x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0 \Leftrightarrow u=0_E$$. λ n'est pas valeur propre de g.

2ème cas - $\lambda^4=1$

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases}0=0\\ y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases}$$. Par conséquent 1° - λ est valeur propre de g. 2° - Le sous-espace propre de g

associé à la valeur propre λ est la droite vectorielle F_λ engendrée par $(e_1+\lambda e_2+\lambda^2 e_3+\lambda^3 e_4)$.

Remarquons maintenant que : $\lambda^4=1 \Leftrightarrow \lambda\in\{1,-1,i,-i\}$ et concluons.

1° - Spec $g=\{1,-1,i,-i\}$.

2° - $F_1=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4)$; $F_{-1}=\mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3-e_4)$; $F_i=\mathrm{Vect}(e_1+ie_2-e_3-ie_4)$ et $F_{-i}=\mathrm{Vect}(e_1-ie_2-e_3+ie_4)$.

3° - g est diagonalisable car g admet quatre valeurs propres distinctes et $\dim E=4$.

$\boxed{\text{Posons } u_1=e_1+e_2+e_3+e_4,\ u_2=e_1-e_2+e_3-e_4,\ u_3=e_1+ie_2-e_3-ie_4 \text{ et } u_4=e_1-ie_2-e_3+ie_4.}$

$\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de g.

Notons que : $M_{\mathcal{B}'}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}$; la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est : $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&i&-i\\1&1&-1&-1\\1&-1&-i&i\end{pmatrix}$; $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}$.

(Q2) a) $J^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$; $J^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

... $J^4=I$!

$$M_A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_4&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_4&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_1\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Donc $M_A=a_1 I+a_2 J+a_3 J^2+a_4 J^3$ donc $f_A=a_1\,\mathrm{id}+a_2 g+a_3 g^2+a_4 g^3$.

b) Rappelons que : $M_{B'}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}$ où $B'=(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Donc $M_{B'}(f_A)=M_{B'}(a_1 id+a_2 g+a_3 g^2+a_4 g^3)=a_1 M_{B'}(id)+a_2 M_{B'}(g)+a_3 M_{B'}(g^2)+a_4 M_{B'}(g^3)$.

$M_{B'}(f_A)=a_1 I+a_2 M_{B'}(g)+a_3 M_{B'}(g^2)+a_4 M_{B'}(g^3)$.

$M_{B'}(f_A)=a_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}$

$M_{B'}(f_A)=\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4&0&0&0\\0&a_1-a_2+a_3-a_4&0&0\\0&0&a_1+ia_2-a_3-ia_4&0\\0&0&0&a_1-ia_2-a_3+ia_4\end{pmatrix}$

$\mathrm{Spec}(f_A)=\mathrm{Spec}(M_{B'}(f_A))=\{a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_1-a_2+a_3-a_4,\ a_1+ia_2-a_3-ia_4,\ a_1-ia_2-a_3+ia_4\}$.
↑ la matrice est diagonale !

$\underline{\mathrm{Spec}(f_A)=\{a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_1-a_2+a_3-a_4,\ a_1+ia_2-a_3-ia_4,\ a_1-ia_2-a_3+ia_4\}}$.

Remarque : f_A est diagonalisable car $M_{B'}(f_A)$ est une matrice diagonale.

c) $\mathrm{Spec}(f_A)=\{4,4,-2+4i,-2-4i\}=\{4,-2+4i,-2-4i\}$.

Notons encore que : $M_{B'}(f_A)=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&-2+4i&0\\0&0&0&-2-4i\end{pmatrix}$ $(B'=(u_1,u_2,u_3,u_4))$.

u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f_A associés à la valeur propre 4.
u_3 (resp. u_4) est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre $-2+4i$ (resp. $-2-4i$).

Notons H_4, H_{-2+4i}, H_{-2-4i} les sous-espaces propres de f_A associés aux valeurs propres 4, $-2+4i$ et $-2-4i$.

$\mathrm{Vect}(u_1,u_2)\subset H_4$ donc $\dim H_4\geq 2$ car (u_1,u_2) est libre puisque (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de E
$\mathrm{Vect}(u_3)\subset H_{-2+4i}$ et $\mathrm{Vect}(u_4)\in H_{-2-4i}$; $\dim H_{-2+4i}\geq 1$ (!) et $\dim H_{-2-4i}\geq 1$ (!!)
Comme $\dim H_4+\dim H_{-2+4i}+\dim H_{-2-4i}=4$ car f_A est diagonalisable, nécessairement :
$\dim H_4=2$ et $\dim H_{-2+4i}=\dim H_{-2-4i}=1$. Finalement : $H_4=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, $H_{-2+4i}=\mathrm{Vect}(u_3)$, $H_{-2-4i}=\mathrm{Vect}(u_4)$.

Spec $f_A = \{4, -2+4i, -2-4i\}$. $\underline{\underline{H_4 = \mathrm{Ker}(f_A - 4id) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4,\ e_1-e_2+e_3-e_4)}}$. $\dim H_4 = 2$

$\underline{\underline{H_{-2+4i} = \mathrm{Ker}(f_A - (-2+4i)id) = \mathrm{Vect}(e_1 + ie_2 - e_3 - ie_4)}}$.

$\underline{\underline{H_{-2-4i} = \mathrm{Ker}(f_A - (-2-4i)id) = \mathrm{Vect}(e_1 - ie_2 - e_3 + ie_4)}}$.

PROBLÈME 1	PARTIE B

Q1 $\exists X \in \mathbb{C}^4,\ f_A(X) = 0_{\mathbb{C}^4}$ et $X \neq 0_{\mathbb{C}^4} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f_A \neq \{0_{\mathbb{C}^4}\} \Leftrightarrow \underline{\underline{0 \in \mathrm{Spec} f_A}}$.

a Spec $f_A = \{a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_1-a_2+a_3-a_4,\ a_1+ia_2-a_3-ia_4,\ a_1-ia_2-a_3+ia_4\}$

avec $a_1 = \alpha$, $a_2 = \alpha+\beta$, $a_3 = \alpha+2\beta$ et $a_4 = \alpha+3\beta$.

$a_1+a_2+a_3+a_4 = 4\alpha+6\beta$; $a_1-a_2+a_3-a_4 = -2\beta$; $a_1+ia_2-a_3-ia_4 = -2\beta-2\beta i = 2\beta(-1-i)$

et $a_1-ia_2-a_3+ia_4 = -2\beta+2\beta i = 2\beta(-1+i)$

Rappelons que β n'est pas nul, donc $-2\beta \neq 0$, $-2\beta-2\beta i \neq 0$ et $-2\beta+2\beta i \neq 0$.

Donc $0 \in \mathrm{Spec} f_A \Leftrightarrow 4\alpha+6\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta$.

$\underline{\underline{\exists X \in \mathbb{C}^4,\ f_A(X) = 0_{\mathbb{C}^4} \text{ et } X \neq 0_{\mathbb{C}^4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta}}$. Notons que pour $\alpha = -\frac{3}{2}\beta$: $A = \frac{1}{2}(-3\beta, -\beta, \beta, 3\beta)$

$A = \frac{\beta}{2}(-3,-1,1,3)$.

Q2 Remarquons que $M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})}$ signifie que $f_A \circ f_B = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)}$ ce qui

signifie aussi $M_{B'}(f_A) M_{B'}(f_B) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Rappelons que si $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ alors $M_{B'}(f_A) = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1-a_2+a_3-a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1+ia_2-a_3-ia_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1-ia_2-a_3+ia_4 \end{pmatrix}$

Donc $M_A M_B = 0_{M_4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4\alpha+6\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4u+6v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2v(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2v(1-i) \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{C})}$

OK?

Donc $M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \Leftrightarrow (4\alpha+6\beta)(4u+6v) = (-2\beta)(-2v) = (-2\beta)(1+i)(-2v)(1+i) = (-2\beta)(1-i)(-2v)(1-i) = 0$

$M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \Leftrightarrow (2\alpha+3\beta)(2u+3v) = \beta v = 0$.

Donc $\underline{\underline{\beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } v = 0 \text{ et } 2\alpha+3\beta = 0}}$.

On peut donc prendre : $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $u = 37$ et $v = 0$.

I Calcul de I_1.

Q1.. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^3}$. φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ et donc de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Q2.. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{3} \frac{x^2-x+1-x^2+2x-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x^3+1}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

Q3.. Cette question est humiliante (dans sa 1ère partie) !

Notons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} - 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{4}{\frac{3+4x^2-4x+1}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3 \times 4}{4(x^2-x+1)} = \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2-x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} f'(x)$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\left[2\ln|x+1| - f(x)\right]_0^A = \frac{1}{6}\left[2\ln|A+1| - \ln|A^2-A+1| + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\left[\ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\lim_{A\to+\infty} \ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] = 0$; $\lim_{A\to+\infty} \mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \frac{1}{6}\left[2\sqrt{3}\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}\frac{\pi}{6}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$I_1 = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$

II Etude de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$

Q1.. Voir I Q1 !!

Q2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \int_0^A (1+x^3)^{-n} dx = [x(1+x^3)^{-n}]_0^A - \int_0^A x(-n)(3x^2)(1+x^3)^{-n-1} dx$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}} dx$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} - 3n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

Par passage à la limite on obtient $I_n = 0 + 3n I_n - 3n I_{n+1}$

Par conséquent : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3n I_{n+1} = (3n-1) I_n}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \geq 0$; donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \left(\frac{3n-1}{3n} - 1\right) I_n = -\frac{1}{3n} I_n \leq 0$.

La suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; elle converge.

Q3. Soit $a \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [0,a]$, $(1+x^3)^n \geq 1$. $\forall x \in [0,a]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq 1$; $\int_0^a \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_0^a dx = a$.

$\forall x \in [a,1]$, $(1+x^3)^n \geq (1+a^3)^n$. $\forall x \in [a,1]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{(1+a^3)^n}$; $\int_a^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_a^1 \frac{dx}{(1+a^3)^n} = \frac{1-a}{(1+a^3)^n}$,

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{x^{3n}}$;

de plus les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ sont convergentes ; par conséquent :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}} = \left[\frac{x^{-3n+1}}{-3n+1}\right]_1^{"+\infty"} = -\frac{1}{-3n+1} = \frac{1}{3n-1}.$$

Finalement $\forall a \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq a ; \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n} ; \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{3n-1}}}.$

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall a \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx = \int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx + \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$

Donc $0 \leq I_n \leq a + \frac{1-a}{(1+a^3)^n} + \frac{1}{3n-1}$ pour tout $a \in]0,1[$.

Donc $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq a$ pour tout $a \in]0,1[$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a^3)^n} \overset{1+a>1}{=} 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$.

$\forall a \in]0,1[$, $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq a$; en faisant tendre a vers 0 on obtient : $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}}$.

Remarque.. Se souvenir de cette méthode.

III (Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $w_n = v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{1/3} I_{n+1}}{n^{1/3} I_n}\right)$ p3

$w_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} \times \frac{3n-1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)$.

Rappel : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - \frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $w_n = -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\underline{w_n = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

En particulier $w_n \sim -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$

$-w_n \sim \frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et convergente ; par conséquent la série de terme général $-w_n$ est convergente. Celle de terme général w_n aussi.

b) La suite de terme général v_n étant de même nature que la série de terme général $v_{n+1} - v_n = w_n$, elle est convergente. Posons $l = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^l$. Posons $h = e^l$.

$h > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers h. C'est ce qu'il fallait prouver.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = h > 0$; $u_n \sim h$; $n^{1/3} I_n \sim h$; $\underline{I_n \sim \frac{h}{n^{1/3}}}$.

La série de terme général I_n est donc divergente ($1/3 \leq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n > 0$!).

(Q2) a) Non ! $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = |(-1)^{n-1} I_n| = I_n$. La série de terme général $|a_n|$ est donc divergente. <u>La série de terme général a_n n'est donc pas absolument convergente.</u>

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^k} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k}\, dx.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k} = -\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^k \underset{\substack{\uparrow \\ -\frac{1}{1+x^3} \neq 1}}{=} -\left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)}\right] \times \left(-\frac{1}{1+x^3}\right) = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \ \frac{1}{1+x^3}$$

$$\text{Donc } A_n = \underline{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \times \frac{1}{1+x^3}\, dx}$$

c) Montrer que la série de terme général a_n converge c'est montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \times \dfrac{1}{1+x^3}\, dx = \int_0^{+\infty} \left[\dfrac{1}{2+x^3} - \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\right] dx$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\right| = \dfrac{1}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3} \leq \dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$

ceci montre que $\int_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\, dx$ est absolument convergente ; elle est donc

convergente et $\left|\int_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\, dx\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\right| dx \leq \dfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x^3)^n} = \dfrac{1}{2} I_n$

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\int_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\, dx\right] = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2+x^3}\, dx - \int_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n} \times \dfrac{1}{2+x^3}\, dx$ (les deux intégrales convergent).

Donc $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2+x^3}\, dx}$

Par conséquent $(A_n)_{n \geq 1}$ converge. Finalement la série de terme général a_n converge.

Mieux $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2+x^3}\, dx$.

d.. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^A \frac{1}{t^3+x^3}\, dx = \frac{1}{t^3} \int_0^A \frac{1}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^3}\, dx \underset{\substack{u = \frac{x}{t} \\ du = \frac{1}{t} dx}}{=} \frac{1}{t^3} \int_0^{A/t} \frac{1}{1+u^3}\, t\, du = \frac{1}{t^2} \int_0^{A/t} \frac{1}{1+u^3}\, du$$

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{A/t} \dfrac{du}{1+u^3} = \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{1+u^3} = I_1$

Donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^3+x^3}\, dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{t^2} I_1$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^3+x^3}\, dx = \dfrac{1}{t^2}\, \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3 + x^3}\, dx = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}\, \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}}$$