I Calcul de I_1.

Q1.. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$. Comme $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$ et donc de $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$.

Q2.. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{x^2-x+1-x^2+2x-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{3}{x^3+1} = \dfrac{1}{x^3+1}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

Q3.. Cette question est humiliante (dans sa 1ère partie) !

Notons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - 2\sqrt{3} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - \dfrac{4}{\frac{3+4x^2-4x+1}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - \dfrac{3 \times 4}{4(x^2-x+1)} = \dfrac{2x-1-3}{x^2-x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2-x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6} f'(x)$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\Big[2\ln|x+1| - f(x)\Big]_0^A = \frac{1}{6}\Big[2\ln|A+1| - \ln|A^2-A+1| + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big]$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\left[\ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] = 0$; $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,\frac{2A-1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \dfrac{1}{6}\left[2\sqrt{3}\,\dfrac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}\,\dfrac{\pi}{6}\right] = \dfrac{2\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$I_1 = \dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$

II Etude de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$

Q1.. Voir I Q1 !!

Q2. Soit $A\in\mathbb{R}_+$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\int_0^A\frac{dx}{(1+x^3)^n}=\int_0^A (1+x^3)^{-n}dx=\left[x(1+x^3)^{-n}\right]_0^A-\int_0^A x(-n)(3x^2)(1+x^3)^{-n-1}dx$$

$$\int_0^A\frac{dx}{(1+x^3)^n}=\frac{A}{(1+A^3)^n}+3n\int_0^A\frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}dx=\frac{A}{(1+A^3)^n}+3n\int_0^A\frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}}dx$$

$$\int_0^A\frac{dx}{(1+x^3)^n}=\frac{A}{(1+A^3)^n}+3n\int_0^A\frac{dx}{(1+x^3)^n}-3n\int_0^A\frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

Par passage à la limite on obtient $I_n=0+3nI_n-3nI_{n+1}$

Par conséquent : $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 3nI_{n+1}=(3n-1)I_n}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(1+x^3)^n}\geqslant 0$; donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geqslant 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}-I_n=\left(\frac{3n-1}{3n}-1\right)I_n=-\frac{1}{3n}I_n\leqslant 0$.

La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; elle converge.

Q3. Soit $a\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$\forall x\in[0,a]$, $(1+x^3)^n\geqslant 1$. $\forall x\in[0,a]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n}\leqslant 1$; $\int_0^a\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\int_0^a dx=a$.

$\forall x\in[a,1]$, $(1+x^3)^n\geqslant(1+a^3)^n$. $\forall x\in[0,1]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n}\leqslant\frac{1}{(1+a^3)^n}$; $\int_a^1\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\int_a^1\frac{dx}{(1+a^3)^n}=\frac{1-a}{(1+a^3)^n}$,

$\forall x\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{(1+x^3)^n}\leqslant\frac{1}{x^{3n}}$;

de plus les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}$ sont convergentes ; par conséquent :

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}=\left[\frac{x^{-3n+1}}{-3n+1}\right]_1^{``+\infty"}=-\frac{1}{-3n+1}=\frac{1}{3n-1}.$$

Finalement $\forall a\in]0,1[$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^a\frac{1}{(1+x^3)^n}dx\leqslant a$; $\int_a^1\frac{1}{(1+x^3)^n}dx\leqslant\frac{1-a}{(1+a^3)^n}$; $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\leqslant\frac{1}{3n-1}$.

Q4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall a\in]0,1[$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^3)^n}dx=\int_0^a\frac{1}{(1+x^3)^n}dx+\int_a^1\frac{1}{(1+x^3)^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^3)^n}dx$

Donc $0\leqslant I_n\leqslant a+\frac{1-a}{(1+a^3)^n}+\frac{1}{3n-1}$ pour tout $a\in]0,1[$.

Donc $0\leqslant\lim_{n\to+\infty}I_n\leqslant a$ pour tout $a\in]0,1[$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+a^3)^n}\overset{1+a>1}{=}0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n-1}=0$.

$\forall a\in]0,1[$, $0\leqslant\lim_{n\to+\infty}I_n\leqslant a$; en faisant tendre a vers 0 on obtient : $\underline{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$.

Remarque.. Se souvenir de cette méthode.

III **Q1** a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $w_n = v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{1/3} I_{n+1}}{n^{1/3} I_n}\right)$ p3

$w_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} \times \frac{3n-1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)$.

Rappel : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - \frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $w_n = -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\underline{\underline{w_n = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}}$.

En particulier $w_n \sim -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$

$-w_n \sim \frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et convergente, par conséquent la série de terme général $-w_n$ est convergente. Celle de terme général w_n aussi.

b) La suite de terme général v_n étant de même nature que la série de terme général $v_{n+1} - v_n = w_n$, elle est convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{\ell}$. Posons $h = e^{\ell}$

$h > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers h. C'est ce qu'il fallait prouver.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = h > 0$; $u_n \sim h$; $n^{1/3} I_n \sim h$; $\underline{\underline{I_n \sim \frac{h}{n^{1/3}}}}$.

La série de terme général I_n est donc divergente ($1/3 \leq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$!).

Q2 a) Non ! $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = |(-1)^{n-1} I_n| = I_n$. La série de terme général $|a_n|$ est donc divergente. <u>La série de terme général</u> a_n <u>n'est donc pas absolument convergente</u>.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^k} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k}\, dx.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k} = -\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^k \underset{-\frac{1}{1+x^3} \neq 1}{=} -\left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)}\right] \times \left(-\frac{1}{1+x^3}\right) = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \, \frac{1}{1+x^3}$$

$$\text{Donc } A_n = \underline{\underline{\int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \times \frac{1}{1+x^3}\, dx}}$$

c) Montrer que la série de terme général a_n converge c'est montrer que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1+\frac{1}{1+x^3}} \times \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2+x^3} - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\right]dx$$ p4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\right| = \frac{1}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3} \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+x^3)^n}$$

ceci montre que $\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx$ est absolument convergente ; elle est donc

convergente et $\left|\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\right|dx \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{1}{2}I_n$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx\right] = 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad A_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx - \int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx$ (les deux intégrales convergent).

Donc $\underline{\lim_{n\to+\infty} A_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx}$

Par conséquent $(A_n)_{n\geq 1}$ converge. Finalement la série de terme général a_n converge.

Mieux $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx}}$.

d.. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^A \frac{1}{t^3+x^3}\,dx = \frac{1}{t^3}\int_0^A\frac{1}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^3}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{t^3}\int_0^{A/t}\frac{1}{1+u^3}\,t\,du = \frac{1}{t^2}\int_0^{A/t}\frac{1}{1+u^3}\,du$$

$u = \frac{x}{t}$ $du = \frac{1}{t}dx$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A/t}\frac{du}{1+u^3} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = I_1$$

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+x^3}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{t^2}I_1$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \underline{\underline{\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+x^3}\,dx = \frac{1}{t^2}\,\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}}}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3+x^3}\,dx = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}\,\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9} = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}}}$$